

CAPITÁN DE FRAGATA  
JUAN E. CÁNEPA

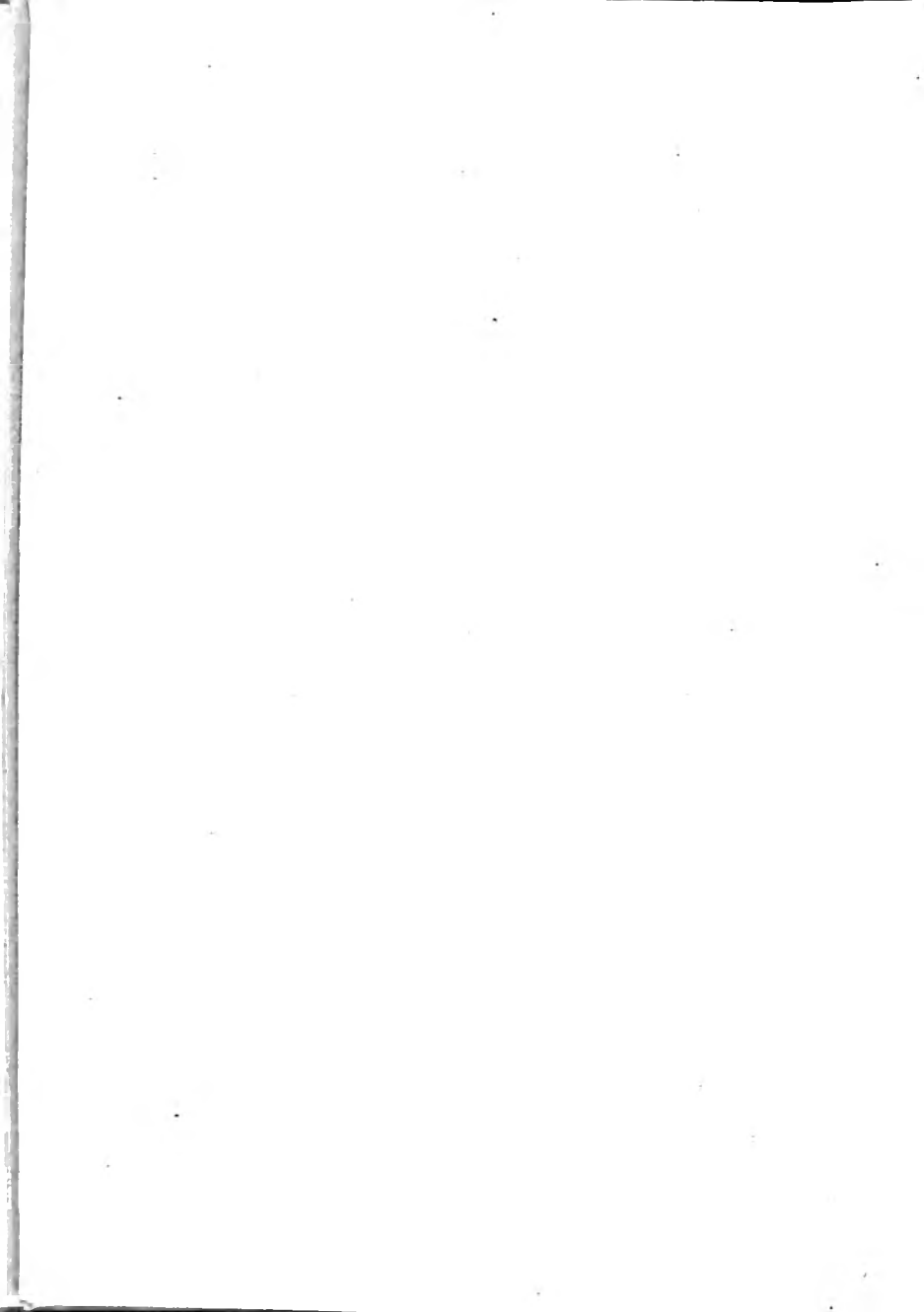
CURSO  
DE  
HIDROGRAFIA



TERCERA EDICION



1939  
ESCUELA NAVAL MILITAR  
REPUBLICA ARGENTINA



## NOTA

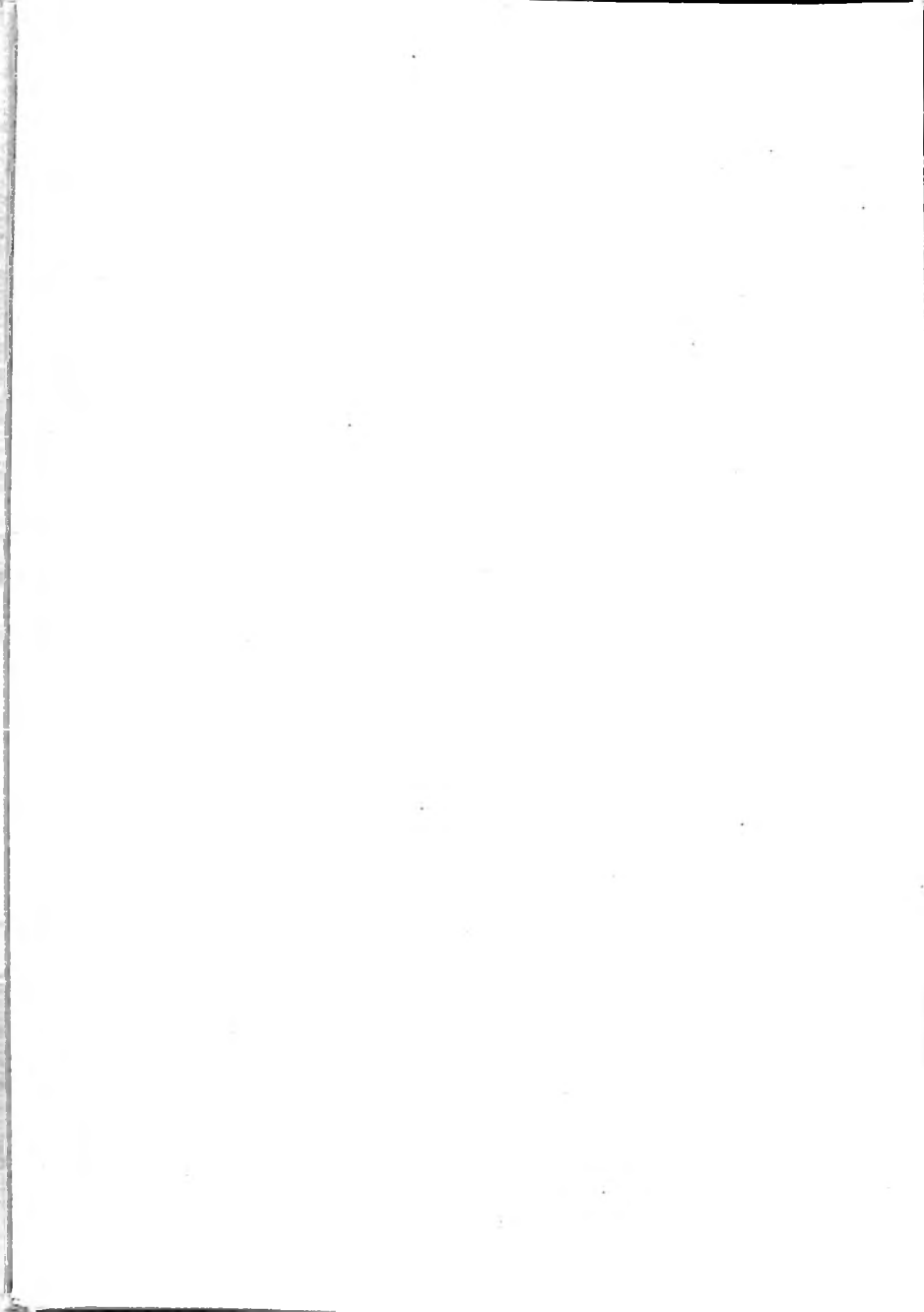
El autor al hacer este libro ha tenido en cuenta especialmente el Curso de Hidrografía de los Tenientes de Fragata Felipe Flores y Carlos M. Llosa, las partes de ese curso que se adaptan al programa en vigor han sido transcritas con ligeras modificaciones.

Para el capítulo de las mareas se ha considerado que el libro de "Mareas" del Teniente de Fragata Ricardo A. Vago tiene todo lo necesario para abordar la práctica de su estudio, a ese deberá ocurrir el Oficial encargado de estos trabajos.

Es de gran utilidad y será una excelente guía para quien tenga que hacer un levantamiento hidrográfico los "Anales" publicados por el Servicio Hidrográfico.

Varios temas hidrográficos han sido desarrollados ampliamente por Oficiales de la Armada en el "Boletín del Centro Naval" y "Revista de Publicaciones Navales", su consulta servirá para ampliar el estudio de muchos puntos tratados en este libro.

En esta 2.<sup>a</sup> Edición se ha introducido modificaciones de concepto, se ha ampliado algunos métodos de trabajo y se ha introducido el principio del error medio y mínimos cuadrados.





# INDICE

## INTRODUCCION

Geodesia y Topografía — Objeto de la hidrografía — Carta marina — Derroteros — Elementos para la construcción de la carta — Relieve submarino — Precisión hidrográfica — Mareas — Estudios complementarios -- Hidrografía expeditiva.

## CAPITULO I

### Soportes diversos de los instrumentos

1. Generalidades — 2. Soportes de instrumentos. Tripode simple — 3. Tripode de seis ramas — 4. Tripode cónico — 5. Unión de los instrumentos a sus pies — 6. Consejos prácticos para el manejo de tripodes — 7. Colocación en estación.

## CAPITULO II

### Nivel de aire

8. Niveles — 9. Teoría del nivel — 10. Sensibilidad del nivel -- 11. Determinación de un ángulo formado por un eje con la vertical en el plano meridiano del nivel — 12. Horizontalidad de una línea y rectificación del nivel — 13. Horizontalidad de un plano — 14. Nivelación de un eje — 15. Rectificación del nivel esférico.

## CAPITULO III

### Anteojos

16. Descripción — 17. Objetivo — Formación de las imágenes — 19. Oculares -- 20. Ocular Ramsden — 21. Ocular Huyghens — 22. Amplificación de un anteojo — 23. Método práctico para medir la amplificación de un anteojo — 24. Campo de un anteojo — 25. Resumen de las condiciones de un anteojo — 26. Dimensiones de los elementos de un anteojo — 27. Enfocar el anteojo -- 28. Práctica del ajuste del anteojo para la observación — 29. Limpieza de las lentes — 30. Verificación del anteojo.

## CAPÍTULO IV

### Goniometría

31. Goniómetros — 32. Pínula — 33. Limbo — 34. Ejes de rotación — 35. Tornillo de presión y coincidencia — 36. Nonio — 37. Lectura de

los nonios — 33. Observaciones sobre los nonios — 39. Microscopio micrométrico — 40. Lecturas en los círculos goniométricos — 41. Práctica del ajuste de microscopios — 42. Microscopio estimador — 43. Limite de apreciación de los instrumentos — 44. Error medio de una lectura de nonios — 45. Causas de errores en las lecturas — 46. Error de excentricidad — 47. Error por la colocación de los índices — 48. Defectuosa graduación del limbo y nonios — 49. Resumen de las comprobaciones de los limbos — 50. Causas que afectan la buena colimación — 51. Error de puntería — 52. Errores provenientes de desgastes en los instrumentos.

## CAPITULO V

### Teodolitos

53. Generalidades — 54. Conformación geométrica del teodolito — 55. Descripción general. Teodolito central — 56. Teodolito reiterador central — 57. Teodolito repetidor con nivel a caballete — 58. Teodolito reiterador con nivel móvil y microscopios micrométricos en el círculo horizontal — 59. Teodolito excéntrico.

## CAPITULO VI

### Rectificación del teodolito

60. Condiciones que debe llenar un teodolito — 61. Rectificación con nivel fijo — 62. Rectificación del teodolito con nivel a caballete — 63. Errores instrumentales residuos — 64. Regla operatoria de Bessel.

## CAPÍTULO VII

### Medida de ángulos

65. Ángulos horizontales — 66. Error medio de una medida angular — 67. Método de repetición — 68. Error medio en el método de repetición — 69. Método de reiteración — 70. Error medio en el método de reiteración — 71. Comparación de ambos métodos — 72. Apreciación práctica definitiva en la medida de los ángulos — 73. Medida de varios ángulos con vértice común con vuelta al horizonte — 74. Medida de varios ángulos con vértice común sin vuelta al horizonte — 75. Coordinación de los ángulos medidos independientemente — 76. Método de direcciones — 77. Método de combinaciones binarias — 78. Medida independiente de ángulos: Método Gauss — 79. Anulación de la paralaje en los teodolitos exéntricos — 80. Empleo del teodolito en la observación de los astros. Ángulos horizontales.

## CAPITULO VIII

### Medida de ángulos

81. Ángulos verticales — 82. Medida por simple puntería — 83. Medida por doble puntería — 84. Graduación de los círculos verticales —

85. Determinación del valor angular de una división del nivel — 86. Empleo del teodolito en la medida de las distancias zenitales de los astros — 87. Angulos zenitales con anteojos excéntricos.

## CAPITULO IX

### Señales

88. Generalidades — 89. Piquetes — 90. Jalones — 91. Banderolas — 92. Señales geodésicas — 93. Efecto de la esfericidad de la tierra y de la refracción en la visibilidad entre las señales — 94. Dimensiones y colores de las señales — 95. Error de faz — 96. Señales luminosas — 97. Heliótopo Gauss — 98. Observaciones nocturnas. Colimadores ópticos — 99. Marcación de los puntos de estación.

## CAPITULO X

### Medida directa de longitudes

100. Alineaciones — 101. Cadena — 102. Cinta metálica — 103. Uso de la cadena y de la cinta — 104. Aproximación que se obtiene con la cadena y la cinta — 105. Generalidades sobre el empleo del alambre metálico — 106. Empleo del alambre — 107. Uso de la cinta en medidas de bases — 108. Generalidades sobre el empleo de las reglas — 109. Aproximación que se obtiene con los reglones.

## CAPITULO XI

### Medida indirecta de distancias

110. Generalidades — 111. Estudio — 112. Anteojos estadimétricos — 113. Reducción al centro del instrumento — 114. Analactismo central — 115. Rectificación del anteojo estadimétrico — 116. Rectificación del analactismo central — 117. Determinación de la distancia por diferencia de pendiente — 118. Miras y retículo — 119. Miras Porro — 120. Alcance de los aparatos estadimétricos — 121. Aproximación en las distancias — 122. Medida en terrenos inclinados — 123. Taquímetros — 124. Comparación entre la medida directa e indirecta de distancias — 125. Determinación de la distancia entre dos puntos con el taquímetro.

## CAPITULO XII

### Miras y Niveles

126. Miras — 127. Mira parlante — 128. Verificación de las miras — 129. Niveles — 130. Nivel Egault — 131. Rectificación — 132. Reglas prácticas para el uso del nivel Egault — 133. Diferencia de nivel entre dos puntos — 134. Nivel Berthelemy — 135. Rectificación — 136.

Reglas prácticas para el uso del Berthelemy — 137. Diferencia de nivel entre dos puntos — 138. Nivel Zeiss — 139. Reglas prácticas para su uso — 140. Niveles reversibles — 141. Verificación de los niveles reversibles — 142. Resumen — 143. Nivelación recíproca para la rectificación de niveles — 144. Errores con los niveles.

### CAPITULO XIII

#### Instrumentos especiales.

145. Generalidades — 146. Pantómetra — 147. Rectificación — 148. Brújula topográfica — 149. Plancheta pretoriana — 150 Rectificación de la plancheta — 151. Uso de la plancheta — 152. Taquímetro antereductor Sanguet. Descripción — 153. Uso del instrumento.

### CAPITULO XIV

#### Planimetría

154. Generalidades — 155. Principio de la planimetría — 156. Ordenes de la triangulación — 157. Orden de las operaciones — 158. Consideraciones sobre las bases — 159. Medida de la base — 160. Corrección de la longitud de la base por temperatura, inclinación y tensión — 161. Reducción de la base al nivel del mar — 162. Influencia sobre los lados de los triángulos de un error cometido en la base — 163. Influencia sobre los lados de un error cometido en los ángulos. Forma de los triángulos — 164. Error medio en la determinación de un lado de un triángulo — 165. Error medio sobre el último lado de una cadena de triángulos — 166. Unión de la base con la red de triángulos — 167. Poligonal de precisión.

### CAPITULO XV

#### Cálculos de la triangulación.

168. Reducción de las medidas angulares horizontales al centro de estación — 169. Reducción al centro de señal — 170. Cálculo de un triángulo — 171. Compensación de los ángulos — 172. Meridiana y perpendicular — 173. Convergencia de meridianos — 174. Coordenadas rectangulares planas de los vértices de triangulación — 175. Cálculo de las coordenadas rectangulares de una cadena de triángulos — 176. Compensación de la triangulación — 177. Compensación de una red de triángulos — 178. Compensación de una cadena de triángulos — 179. Compensación de un cuadrilátero.

### CAPITULO XVI

#### Triángulo geodésico

180. Nivel medio del mar. Geóide — 181. Fórmulas fundamentales para el elipsoide terrestre. Coordenadas — 182. Elipse meridiana — 183.

Latitud geocéntrica — 184. Angulo de las verticales — 185. Radio de paralelo — 186. Normal mayor — 187. Ordenada — 188. Radio de curvatura del meridiano — 189. Radio de curvatura del elipsoide — 190. Longitud de un arco de meridiano — 191. Longitud de un arco de paralelo — 192. Línea geodésica — 193. Esfera local — 194. Triángulo geodésico — 195. Teorema de Legendre — 196. Cálculo del exceso esférico — 197. Exceso esferoideico — 198. Coordenadas geodésicas rectangulares — 199. Transporte de coordenadas geográficas — 200. Fórmulas de Delambre — 201. Cálculo de las fórmulas — 202. Fórmulas de Schreiber — 203. Transporte de coordenadas geográficas en una red de triángulos.

## CAPITULO XVII

### Topografía

204. Consideraciones — 205. Método poligonal — 206. Método de radiaciones — 207. Método intersecciones — 208. Método de coordenadas — 209. Aplicación al levantamiento de zonas poco extensas — 210. Aplicación al levantamiento de costas — 211. Cierre de la poligonal — 212. Coordenadas de los vértices de la poligonal — 213. Registro de poligonal a cadena o cinta — 214. Registro de la poligonal con taquímetro — 215. Formularios para el cálculo de la poligonal — 216. Fórmula aproximada para la compensación de la poligonal — 217. Croquis de la poligonal — 218. Situación de puntos auxiliares por intersecciones.

## CAPITULO XVIII

### Altimetría

219. Generalidades — 220. Influencia de la esfericidad de la tierra — 221. Influencia de la refracción atmosférica — 222. Anulación de la refracción y la esfericidad — 223. Nivelación geométrica — 224. Ordenes de nivelación geométrica — 225. Nivelación geodésica o topográfica — 226. Nivelación taquimétrica — 227. Influencia de la esfericidad de la tierra y de la refracción — 228. Horas convenientes para la observación — 229. Diferencia de nivel por distancias zenitales recíprocas — 230. Diferencia de nivel por dos distancias zenitales — 231. Determinación de la altitud — 232. Métodos de nivelación.

## CAPITULO XIX

### Relevamiento con instrumentos especiales

233. Relevamiento taquimétrico Fórmulas — 234. Métodos de cálculos — 235. Unión de las estaciones — 236. Operaciones sobre el terreno — 237. Relevamiento con la plancheta. Desarrollo en poligonal — 238. Triangulación gráfica — 239. Relevamiento con la brújula. Método general.

## CAPITULO XX

### Fotogrametría

240. Generalidades — 241. Fototeodolitos — 242. Cilindrografo — 243. Estereofotogrametría — 244. Empleo de la fotogrametría en la hidrografía — 245. Aereofotogrametría — 246. Empleo de la aereofotogrametría en la hidrografía.

## CAPITULO XXI

### Observaciones astronómicas

247. Generalidades — 248. Azimut — 249. Circunstancias que determinan la elección de los astros — 250. Método de alturas correspondientes — 251. Ejemplo — 252. Observaciones extrameridianas — 253. Ejemplo — 254. Azimut por elongaciones — 255. Ejemplo.

## CAPITULO XXII

### Latitud

256. Circunstancias favorables para la determinación de la latitud — 257. Observaciones meridianas. Método Sterneek — 258. Ejemplo — 259. Método Horrebow-Talcott — 260. Observación de circunmeridianas — 261. Latitud mediante la observación de los intervalos en que tres estrellas alcanzan una misma altura. Método de Gauss — 262. Principio del método — 263. Deducción de las fórmulas para el cálculo — 264. Análisis del método — 265. Circunstancias favorables para la elección de estrellas — 266. Elección de estrellas.

## CAPITULO XXIII

### Longitud.

267. Generalidades — 268. Circunstancias favorables para la determinación del tiempo — 269. Determinación del tiempo por alturas iguales de dos o más estrellas — 270. Análisis del método — 271. Elección de estrellas — 272. Método de N. Zinger — 273. Análisis del método — 274. Práctica de la observación — 275. Programa de observación — 276. Corrección de la hora por inclinación — 277. Corrección por observación diurna — 278. Ejemplo.

## CAPITULO XXIV

### Observaciones de paso

279. Círculo meridiano — 280. Instrumento de paso con anteojo acodado — 281. Instalación del instrumento — 282. Idea sobre la rectificación y errores debidos al instrumento — 283. Colocación del instrumento en el meridiano. Determinación del azimut — 284. Determina-

ción de la latitud — 285. Determinación de la longitud — 286. Aplicación de la radiotelegrafía.

## CAPITULO XXV

### Operaciones en el mar

287. Generalidades — 288. Sondas — 289. Sondar con embarcaciones: armamento de éstas — 290. Registro de sondas y observaciones — 291. Sondar con mar agitado y viento o corriente — 292. Sondas desde el buque — 293. Distribución de sondas — 294. Situación de sondajes — 295. Sondar con boyas de berlinga situadas — 296. Sondar fuera de la vista de costa — 297. Empleo de observaciones astronómicas — 298. Buscar bajo fondos y peligros — 299. Reconocimiento de un río o canales — 300. Conducción de los trabajos de sonda.

## CAPITULO XXVI

### Observación de la marea

301. Preliminares — 302. Posición del punto de observación — 303. Escalas de mareas. Graduación — 304. Colocación de las escalas — 305. Empleo de varias escalas — 306. Observación de las escalas — 307. Registro de observaciones — 308. Referencia de las escalas — 309. Mareómetros. Mareógrafos — 310. Manógrafo a flotador — 311. Mareógrafos a presión — 312. Lectura de las curvas de mareas.

## CAPITULO XXVII

### Mareas

313. Preliminares — 314. Altura teórica de la marea — 315. Expresión del potencial de un astro — 316. Altura de la marea debida al potencial  $V$  de un astro cuando el mar cubre toda la tierra — 317. Deducción de la fórmula — 318. Discusión de la altura de la marea producida por el potencial de un astro — 319. Altura de la marea en el Océano — 320. Altura de la marea debida a la acción del Sol y la Luna — 321. Marea semi diurna. Constantes de Laplace — 322. Horario de la Luna en el instante de la pleamar — 323. Hora verdadera de la pleamar — 324. Establecimiento de puerto — 325. Cálculo de la hora de la pleamar — 326. Altura de la pleamar — 327. Unidad de altura. Coeficiente de marea — 328. Analisis armónico — 329. Relación entre las constantes armónicas y de Laplace — 330. Determinación de los elementos de la marea — 331. Propagación de la marea.

## CAPITULO XXVIII

### Reducción de Sondajes.

332. Consideraciones generales — 333. Nivel de reducción de sondas — 334. Determinación del plano de reducción — 335. Construcción

de curvas de reducción — 336. Corrientes marinas. Generalidades — 337. Métodos e instrumentos para la observación — 338. Corrientes de mareas.

## CAPITULO XXIX

### Proyecciones

339. Sistemas de cartas principales — 340. Proyección perspectiva. Proyección ortográfica — 341. Proyección estereográfica — 342. Proyección gnomónica — 343. Cartas gnomónicas de navegación — 344. Proyección desarrollada. Proyección cónica — 345. Proyección cilíndrica — 346. Influencia del aplanamiento en la latitud creciente.

## CAPITULO XXX

### Construcción del plano

347. Escalas — 348. Plano de construcción — 349. Plano hidrográfico — 350. Inscripciones — 351. Construcción de la carta reducida o Mercator — 352. Dibujo hidrográfico.

## CAPITULO XXXI

### Métodos y fórmulas fundamentales para la compensación de los errores

353. Errores — 354. Errores materiales — 355. Errores sistemáticos — 356. Errores accidentales — 357. Leyes de los errores. Media aritmética — 358. Error medio aritmético — 359. Error cuadrático medio — 360. Media aritmética. Errores aparentes — 361. Precisión de la media aritmética. Error medio. Errores aparentes — 362. Error medio de una función lineal — 363. Error medio de la media aritmética — 364. Error probable — 365. Error máximo o tolerancia — 366. Error medio de una función cualquiera — 367. Suma o diferencia de cantidades observadas — 368. Multiplo de cantidades observadas — 369. Producto de cantidades observadas — 370. Fórmula logarítmica — 371. Observaciones de distinta precisión. Peso — 372. Relación entre el peso y el error medio de la media — 373. Unidad de peso — 374. Valor de la media aritmética ponderada — 375. Error medio de la unidad de peso, de la media ponderada y error medio de cada observación — 376. Propagación de los pesos de las observaciones — 377. Elección de pesos — 378. Compensación de observaciones indirectas. Determinación del valor probable — 379. Comprobación de la formación de las ecuaciones normales — 380. Resolución de las ecuaciones normales — 381. Error medio de una observación — 382. Error medio de cada incógnita. Coeficiente de peso — 383. Observaciones de distinto peso — 384. Compensación de observaciones con condición. — Solución general — 385. Observaciones de diversa precisión — 386. Caso en que



la ecuación de condición es una función cualquiera — 387. Cálculos de compensación. Triangulaciones. Problema general — 388. Número de condiciones generales — 389. Compensación local. Angulos con vértice común sin vuelta al horizonte — 390. Método de las combinaciones binarias -- 391. Compensación general — 392. Compensación angular de un triángulo — 393. Compensación angular de una red de triángulos — 394. Compensación angular de una cadena de triángulos — 395. Compensación de un cuadrilátero — 396. Consideración final sobre la aplicación del método de los cuadrados mínimos.



## CURSO DE HIDROGRAFIA

### INTRODUCCIÓN

**Geodesia y Topografía.**—La ciencia que tiene por objeto la medida de la superficie terrestre, y su representación sobre planos es la Geodesia, en tanto que la Topografía se ocupa del mismo problema en los casos más simples, en que por la pequeñez de la porción de superficie que se considera, sea lícito desdeñar la curvatura terrestre.

**Objeto de la Hidrografía.**—El objeto de un levantamiento hidrográfico, es el de suministrar al marino, sobre una carta, todos los datos que le son necesarios para reconocer la costa que tiene a la vista, fijar la posición de un buque, trazar el rumbo a seguir para evitar peligros, llegar a un puerto o fondeadero, encontrar abrigo en caso de mal tiempo, etc., es decir, la aplicación de la Geodesia y Topografía a la representación del mar, por lo cual, el hidrógrafo debe reunir a los conocimientos del geodesta o topógrafo, un perfecto conocimiento de la técnica marinera.

**Carta marina.**—Una buena carta marina no debe limitarse a dar el contorno de la costa, las profundidades y la posición de los peligros; debe también ofrecer a la vista la representación de la porción de costa visible desde el mar, la forma y situación de los puntos notables, y principalmente de los que puedan servir para su reconocimiento, el relieve del terreno submarino, sus declives y sus accidentes; debe representar de una manera notable, en su forma y en su profundidad, los bancos, arrecifes, bajofondos y canales que lo separan; acusar la naturaleza del fondo cuyo conocimiento es de la mas alta importancia en ciertas circunstancias, por ejemplo, para fondear; indicar el régi-

men de las mareas, cuyo efecto es modificar a cada instante la profundidad y aspecto mismo de la playa. Muchos otros datos deben unirse a los ya mencionados; entre los mas importantes desde el punto de vista de la navegación, señalaremos los relativos al valor de la declinación magnética, y los que se refieren a las corrientes de marea, a las que nunca será excesiva la preocupación que les dedique un comandante, encontrándose próximo a peligros.

**Derroteros.** — Indudablemente, todas las observaciones que un hidrógrafo debe recoger en el curso de su trabajo, no pueden ser agrupadas en una carta marina, en la cual las dos condiciones principales requieren ser la exactitud y la claridad; pero todas pueden ser utilizadas en las instrucciones principales que se destinan a completar las cartas, y que agrupadas en libros toman el nombre de « Derroteros ».

Agreguemos que durante la campaña, el hidrógrafo no debe olvidar de anotar ningún dato que pueda interesar a la navegación; un croquis, algunas palabras, una nota concisa, le servirán siempre mas fielmente que su memoria. Conviene interrogar a los pilotos o marineros de la localidad y a los pescadores, con la condición de dejarlos hablar después de interrogarlos sin pedirles la confirmación de una idea preconcebida.

**Elementos para la construcción de la carta.** — A objeto de dar al alumno una idea de la materia, explicaremos sucintamente las operaciones principales que se deben efectuar para ejecutar lo que se llama un levantamiento hidrográfico.

Para construir la carta de una región, se procede de lo grande a lo pequeño, determinando con precisión extrema la posición de los puntos principales del terreno, a los cuales se ligan después todos los otros con una precisión muy inferior, adoptando como superficie de referencia, la superficie del *nivel medio del mar*, supuesta extendida a través de los continentes. Tal superficie, puede sensiblemente considerarse coincidente con la del elipsoide de revolución aplastada, que tenga por eje menor el terrestre y un aplastamiento de  $\frac{1}{300}$  aproximadamente. La posición de los puntos estará determinada, cuando para cada

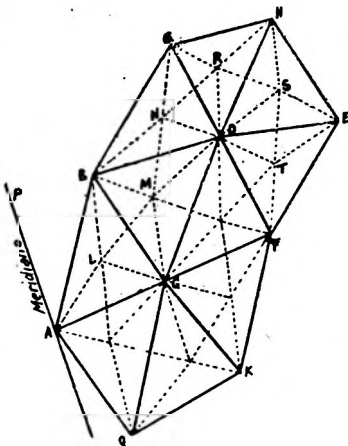
uno, se conozca: *a*) la proyección según la vertical (representada por la plomada) a la superficie de referencia y *b*) la distancia según la vertical de la superficie misma, distancia que llámase *cota* o *altura del punto*; conocimientos a los que se llega mediante dos especies de medidas geodésicas.

1.º La triangulación, cuyo objeto es determinar las posiciones relativas de las proyecciones A, B, C, .... de los puntos principales *a, b, c*, del terreno. Esta unión se obtiene midiendo todos los ángulos y un lado de la red triangular A, B, C, ...., que se forma imaginando cada punto unido a los puntos contiguos mediante líneas de mínima distancia, o en su lugar arcos de la superficie elipsóidica de referencia.

El lado que se mide directamente, llámase base de la triangulación. Los puntos A, B, C, ...., como igualmente sus correspondientes *a, b, c*, se llaman puntos trigonométricos o geodésicos, y la red triangular A, B, C, ...., red trigonométrica o geodésica.

La distancia entre los sucesivos puntos trigonométricos principales *a, b, c*, ...., debe ser la máxima compatible con la condición de visibilidad recíproca (término medio 40 kilómetros), por cuya causa el número de estos puntos es muy reducido. Para multiplicar los puntos de referencia o de 2.º orden, se eligen sobre el terreno, hacia el centro de los triángulos, otros puntos, *l, m, n*, ...., que se ligan a los principales *a, b, c*, ...., y también entre sí. Las proyecciones L, M, N, de estos nuevos puntos juntamente con A, B, C, ...., formarán una red triangular de tercer orden.

2.º La nivelación que tiene por objeto la determinación de las cotas *aA, bB, cC*, ...., de los puntos *a, b, c*, .... Ella se





4.º Orientar la representación del terreno, es decir, determinar en un punto cualquiera del levantamiento, la dirección que tiene el rayo visual dirigido a cada uno de los demás con respecto a la proyección del meridiano de aquel.

**Relieve submarino.**—A estas grandes operaciones comunes a todos los levantamientos, la hidrografía une otra de una importancia capital en navegación, que es la representación del relieve submarino por medio de un gran número de cotas, (sondas), medidas bajo el nivel del mar; la posición de estas sondas, se determina con relación a puntos visibles del terreno, por medio de una verdadera triangulación.

**Precisión hidrográfica.**—Desde el punto de vista de la navegación solamente, se puede decir que en las cartas hidrográficas la exactitud de la escala no tiene la misma importancia que en las cartas topográficas. El marino, en efecto, sólo necesita conocer rigurosamente las posiciones relativas de los puntos que le sirven para fijar la suya en la carta, y la dirección de los rumbos que debe seguir; necesita, pues, una figura semejante a la de la superficie sobre la cual navega.

Resulta que si la medida rigurosa de una base es de utilidad incontestable desde el punto de vista geográfico, porque en los levantamientos de una gran extensión, interviene en la determinación de los puntos notables, y permite unir entre sí los levantamientos parciales y sucesivos de comarcas, a menudo muy separadas, es de un interés menos inmediato en el levantamiento de los planos hidrográficos, principalmente cuando abarcan pequeñas extensiones.

Agregaremos que cuando el tiempo y las circunstancias no hubieran permitido, en un levantamiento hidrográfico, fijar la escala con toda la exactitud deseable, se hará mención de este hecho, pues es importante dar al marino solamente datos precisos sobre los cuales pueda contar en absoluto, señalándosele las partes imperfectas del plano de que dispone, tanto para ponerlo en guardia contra el empleo de datos inciertos, como para solicitar nuevas observaciones propias que corrijan y completen las primeras.

Es el momento de señalar al hidrógrafo la *necesidad de re-*

*currir al cálculo*, siempre que se trate de la determinación de puntos que servirán de apoyo para la situación de muchos otros.

Aunque a primera vista puede parecer que concuerdan los resultados de una construcción gráfica, es imposible responder de su exactitud, aun en límites que puedan parecer suficientes, vista la escala de la carta y las condiciones a que debe satisfacer. *El hidrógrafo no debe limitarse a obtener un resultado suficiente para la navegación, cuando el tiempo le permita alcanzar una precisión mayor, debe, sobre todo, en los trabajos de conjunto, darse cuenta de la precisión que ha obtenido y de la que es necesario alcanzar en vista de operaciones posteriores*; sólo el cálculo puede permitir apreciar la exactitud de su trabajo y el provecho que de él se puede sacar. Es necesario agregar que el empleo exclusivo de la construcción gráfica, podrá dar concordancias mas aparentes que reales, debiendo el dibujante mas prolijo evitar la tentación de forzar los datos para llegar a una precisión ilusoria.

Las mismas consideraciones hacen recomendar especial atención al copiar los cuadernos de observaciones, siendo, en caso de hacerlo, indispensable conservar los originales. Conviene adoptar el mayor orden en su redacción, escribiendo el nombre del lugar, la fecha, la hora, género de instrumento empleado, persona que efectúa la operación, y, en una palabra, todo lo que permita contralorear errores o efectuar nuevamente el trabajo sin dificultad. Importa también adoptar tipos de cuadernos que permitan a una persona extraña calcular y construir con toda facilidad, observaciones en que no haya tomado parte.

**Mareas.**—Entre todas las cuestiones, que exigen la atención e investigación del hidrógrafo, la de las mareas es una de las principales.

No encontrándose jamás el mar en un equilibrio permanente en la mayor parte del globo, las profundidades en un mismo punto varían de una manera más o menos continua y con frecuencia muy irregular; tal ruta practicable en ciertos momentos, no lo es en otros: bancos y rocas que emergen del mar, desaparecen durante largas horas y forman entonces otros tantos peligros que sólo las cartas pueden indicar al navegante.



Estas oscilaciones del nivel del agua originan en las proximidades de las costas, movimientos de traslación, corrientes a veces, violentas, que difícilmente serían evitadas por un comandante que tuviera datos insuficientes, constituyendo causas de peligros, mientras que bien estudiadas pueden ser utilizadas para abreviar las rutas.

**Estudios complementarios.**— Además de los estudios hidrográficos propiamente dichos, que el marino debe hacer y dirigir con orden y método, fijando cada mañana el trabajo del día, recogerá, para completar su carta, todos los datos que puedan interesar a la navegación; dirigirá y controloreará las observaciones sobre mareas, vientos, corrientes, meteorología y magnetismo; recogerá y dividirá las muestras de fondo y aquellas que puedan ser útiles para clasificar la naturaleza del terreno; interrogará a los habitantes sobre los productos del país, las fuentes de agua, los minerales, utilizables etc., no omitiendo incomodidades para verificar sus informaciones; estudiará la marcha de los cronómetros y los instrumentos de observación; finalmente, y como *regla absoluta*, pondrá diariamente en limpio el trabajo hecho, aprovechando los días de mal tiempo en la construcción gráfica de trabajos topográficos y sondas, sin esperar que el tiempo haya borrado de su memoria el recuerdo del terreno, y que el alejamiento del sitio de operaciones no le permita llenar vacíos que la construcción gráfica o el cálculo le hagan descubrir demasiado tarde. Indudablemente, no podrá todos los días disponer de los elementos necesarios para la redacción definitiva de los relevamientos y de las observaciones, pero podrá a menudo construir de un modo bastante aproximado las operaciones del día, para asegurarse que han sido hechas en buenas condiciones, y poder determinar el programa de operaciones para el día siguiente.

**Hidrografía expeditiva.**— Muchas cartas náuticas han sido ejecutadas por el procedimiento llamado *Expeditivo*; es decir, perentoriamente y valiéndose de los instrumentos de uso ordinario en la navegación, por lo que su exactitud depende de las circunstancias en que se han desarrollado las operaciones.

En otras ocasiones, estando imposibilitados de efectuar des-

embarques, se han hecho levantamientos desde a bordo llamados en *movimiento*, que consisten en referir a los puntos de posición de la nave (sean astronómicos o estimados) los puntos de la costa mediante arrumbamientos y distancias).

Por esto, no hay que extrañarse que aun hoy en día existan cartas que están bien lejos de poseer el grado de exactitud que exigen las siempre crecientes necesidades de la navegación con el aumento de la rapidez en las comunicaciones y el considerable desarrollo del material.

---

## CAPITULO I

### SOPORTES DIVERSOS DE LOS INSTRUMENTOS

**1. Generalidades.** — Un número considerable de modelos de instrumentos se ofrece a la elección del operador, pero comparando los diversos tipos, se nota entre ellos ciertos caracteres que siendo semejantes, permiten agruparlos por especies que responden cada una a operaciones determinadas, por lo que, en general, basta conocer bien un instrumento de cada clase para poder emplear útilmente todos los del mismo género.

El examen de los instrumentos que se utilizan en Hidrografía, muestra que la mayoría están constituidos por un pequeño número de órganos esenciales que les son comunes, por ejemplo: las *alidadas* que sirven para definir la dirección de la línea visada, los *anteojos* que facilitan la precisión de las visuales, *círculos graduados* para la medida de los ángulos, los *niveles* para llevar a la horizontal los ejes de los instrumentos, etcétera. Se ve, pues, la ventaja que presenta un estudio previo de estos órganos, para evitar repeticiones al efectuar el estudio parcial de los instrumentos.

**2. Soportes de instrumentos. Tripode simple.** — Los instrumentos utilizados en topografía deben disponerse para facilidad de observación a la altura del hombre, para lo cual es necesario asentarlos sobre soportes especiales; ellos tienen diversas denominaciones, según su construcción.

En los trabajos de gran precisión se asientan directamente sobre pilares, eliminando así las pequeñas variaciones que se producirían con los soportes comunes.

El tripode simple se compone de tres piernas constituidas cada una por una pieza de madera herrada en su parte inferior; estas tres piernas se ensamblan por su parte superior a una pieza prismática P, mediante tornillos V con mariposas E; las piernas pueden tener movimientos y plegarse para facilidad de transporte.



Fig. 1.

El prisma P termina en su parte superior por una pieza cónica sobre la que reposa el instrumento por medio de un mango hueco o cubo (fig. 2) munido de un nillo v de presión. Este pie no presenta una estabilidad suficiente para los instrumentos de precisión y solo se usa con los de reconocimiento.



Fig. 2.

**3. Trípode de seis ramas.** — Cada una de las tres piernas del arriba descrito, en lugar de estar formadas por una sola pieza, está constituida por dos ramas  $B_1$   $B_2$  (fig. 3), que abrazan en su parte superior una de las orejas O de un platillo de madera P, destinado a soportar el instrumento; estas dos ramas convergen hacia sus extremidades inferiores, donde ellas se reunen en la base de un regatón de hierro, estando cada pierna munida de un pedal, sobre el cual se hace presión con el pie para enterrar las piernas en el suelo. Cada pierna está articulada sobre la oreja (O), mediante un eje que le permite movimiento de giro alrededor de él (figura 4), el eje lleva una

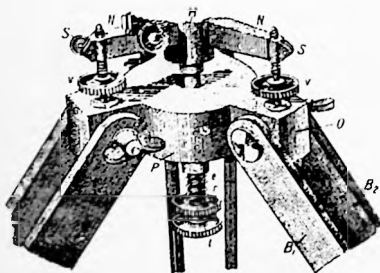


Fig. 3.

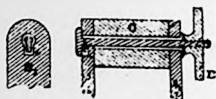


Fig. 4.

mariposa E, que debe aflojarse cuando se quiere hacerla girar.

**4. Trípode cónico.** — Este trípode, usado en los instrumentos ingleses, y llamado así por la forma que tiene cuando está cerrado, con objeto de proporcionar un cómodo transporte, se halla formado (fig. 5) por tres pies cuyas extremidades están armadas con regatones y en su parte superior llevan unas piezas de cobre *p* sujetas por medio de tornillos y terminadas en espigas, las cuales entran en otras piezas unidas a un platillo o meseta *m*, formando una articulación o juego en charnela *l*. Del centro de la cara superior de *m*, arranca una rosca donde se tornilla la pieza de tres brazos *n*, sobre la cual se monta el instrumento. Para que la rosca no reciba golpes que la inutilice, cuando no se usa el trípode, se le coloca un sombrerete. Tres anillos de metal sirven para mantener unidos los pies. Estos trípodes suelen colocarse en un estuche de cuero para facilitar su transporte.

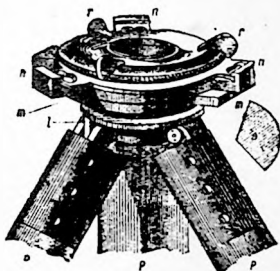


Fig. 5.

**5. Unión de los instrumentos a sus pies.** — Los instrumentos se unen a sus pies por intermedio de órganos que se llaman plataformas, sean de tres o cuatro tornillos. La primera está constituida por una pieza metálica llamada triángulo (fig. 6), que tiene tres alas *A*, atravesadas por tres tornillos nivelantes *V*; para alojar las puntas de estos tornillos, la mesa del trípode lleva incrustadas tres piezas metálicas *f*, en cuyo centro se ha formado una pequeña hendidura o canal de sección triangular. El instrumento debe estar unido sólidamente para

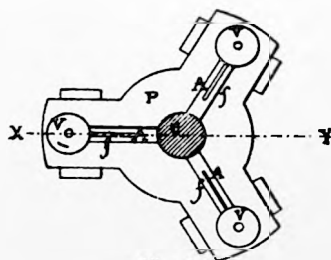


Fig. 6.

evitar caídas y facilitar el transporte a este efecto, el tripode está munido con el siguiente dispositivo.

El tornillo *t*, (fig. 3) lleva en su extremidad una rosca que penetra en la parte interna e inferior de la columna *H* de la plataforma, pasando por un orificio vaciado en el platillo de madera *P*. Una tuerca *r*, atornillada sobre la rosca hecha en la superficie de *t*, oprime un resorte espiral *l*, que al ser apretado contra la cara inferior del platillo *P*, reacciona sobre la tuerca *r*, lo que hace ir hacia abajo al tornillo *t*, cuya extremidad estando roscada en la columna *H*, aprieta esta por medio de sus puntos de apoyo (los tornillos nivelantes *V*) contra el tripode.

En algunos pies, sobre todo en los destinados a instrumentos de precisión; (fig. 7), las tres piezas metálicas, sobre las que apoyan los tornillos *V*, en vez de estar colocadas sobre el platillo *T*, lo están sobre un disco de madera movable, al cual puede dársele un pequeño desplazamiento lateral, con el objeto que después de colocado el tripode, el instrumento pueda tener un pequeño movimiento de traslación. Este disco está atravesado por el tornillo *t* y como en los tripodes

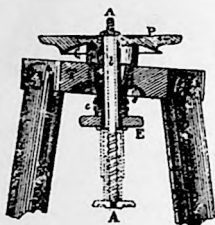


Fig. 7.

anteriores el ajuste se hace con la rosca *E* y el resorte *c*.

Las plataformas a cuatro tornillos están constituidas por una pieza circular atravesada por cuatro tornillos nivelantes, instalados en los extremos de dos diámetros perpendiculares, este sistema es usado en algunos instrumentos ingleses o italianos.

Algunos operadores encuentran en el uso de cuatro tornillos la ventaja que una vez establecida la verticalidad del eje del instrumento, es más difícil que la pierda, pero en las plataformas modernas en que los brazos están dotados de los tornillos mordazas *s* (fig. 3), que los oprime contra los tornillos nivelantes, se evita en absoluto que se produzcan resbalamientos y que haya alteración en la posición de la plataforma.

En los instrumentos que usan tripode cónico, la plataforma de unión es diferente y está constituida por una plancha de centralización *n*, (fig. 5), en la cual se apoyan los tornillos ni-

velantes del instrumento, y se ajusta en el saliente roscado de la meseta.

La plancha de centralización esta constituida por dos piezas, la parte *n*, roscada en su interior y que es la que se ajusta a la cabeza del trípode y las planchas triangulares comprendidas entre las piezas de *n*, que pueden tener un movimiento dentro de ellas para centralizar el instrumento cuyos tornillos de nivelación se aplican en la parte correspondientes de las planchas triangulares.

El conjunto se ajusta con la pieza *r*.

**6. Consejos prácticos para el manejo de los trípodes.**— El transporte de un instrumento montado sobre su pie de una estación a otra, puede hacerse de tres maneras.

1.º Cerradas las piernas y apretados los tornillos de ensambladura de ellas con las abrazaderas, se lleva el trípode casi verticalmente, apoyando su parte superior en un hombro y sujeto por la mano correspondiente un poco arriba del centro de gravedad.

2.º Cerradas dos piernas y una un tanto abierta, de manera que el trípode pueda cabalgar sobre un hombro.

3.º Abiertas las tres piernas de modo que quedando una por la espalda, las otras dos cabalguen cada una sobre un hombro y sujetas por sus respectivos brazos.

El primer método es usado para franquear pequeñas distancias, en tanto que los otros dos, especialmente el tercero, siendo el más seguro, es el más cómodo cuando se emplea un instrumento pesado o se desea recorrer una larga distancia.

**7. Colocación en estación.**— Para instalar un pie se debe cuidar que los tornillos a mariposa no estén demasiado apretados, pues si lo estuvieran, el gran esfuerzo necesario para hacer girar las piernas, podrían producir la ruptura del perno del giro, o por lo menos una deformación pasajera en las ranuras del pie, las que debido a su elasticidad recobrarían su posición después de hallarse rectificado el instrumento, ocasionando una desnivelación.

La posición a darse a las piernas depende de la clase y forma del terreno; sobre un terreno horizontal, los tres extre-

mos deben ocupar los vértices de un triángulo equilátero, cuya extensión se elegirá de modo que, cada pierna forme con el suelo un ángulo próximo a  $3/4$  de un recto. Sobre un terreno con pendiente, conviene poner dos pies sobre una misma horizontal y el tercero más alto. El tripode debe ponerse en forma tal que sus piernas no incomoden al operador en la operación de visar los objetos, quien deberá evitar aproximar sus pies a los extremos enterrados en el suelo, pues su peso es suficiente en terrenos blandos para provocar un pequeño hundimiento; igualmente en estos terrenos los pies del tripode deben introducirse lo suficiente para evitar cambios de posición o instalarlos sobre piquetes convenientemente enterrados.

Hecha la instalación, la meseta del pie debe quedar sensiblemente horizontal, y su centro sobre la vertical de un punto determinado del suelo que se llama *centro de estación*, lo que se comprueba con una plomada.

Como estas dos condiciones no son fáciles de llenar, especialmente la de centralización, gran número de pies tienen el dispositivo que antes se mencionó que permite un pequeño desplazamiento del instrumento sobre el pie.

Las primeras veces que se hace esta operación suele presentárseles a los operadores algunas dificultades para llenar las condiciones a que debe satisfacer la colocación en estación del tripode; con un poco de ejercicio se adquiere fácilmente el golpe de vista necesario para hacerlo en forma rápida. Para reducir los tanteos, conviene colocar el tripode de manera que esté centrado sobre el punto de estación, lo que se conoce porque la punta de la plomada coincidirá con él; se entierra algunos centímetros dos de sus patas y luego llevando hacia adelante, atrás o transversalmente la tercera se trata de centrar la plomada nuevamente, se entierra la tercera pata y después se ejerce sucesivamente presión sobre cada uno de los pies del tripode, tratando que la plataforma quede lo mas horizontal posible y centrada sobre el punto de estación.

Es muy recomendable ejercer la presión para enterrar los pies sobre el pedal correspondiente, de manera que el esfuerzo sea paralelo a ellos; una presión vertical produciría un efecto útil menor y podría provocar la ruptura del pie sobre el cual se obra o produciría una deformación pasajera que, desapareciendo en el curso de la observación, haría variar la posición del instrumento.



## CAPÍTULO II.

### NIVEL DE AIRE

**8. Niveles.** — El medio más simple que puede utilizarse para determinar la dirección de la vertical es la plomada, la que no resultando de fácil aplicación ha sido substituída por el nivel de aire o de burbuja.

Los niveles de aire pueden ser esféricos o tubulares; si bien el primero teóricamente sería el ideal, por dificultades tanto de construcción como de verificación no se adopta para las operaciones delicadas, utilizándolos solamente para la instalación vertical de los instrumentos de poca precisión.

El nivel tubular está formado por un trozo de tubo cilíndrico internamente trabajado, de manera que su parte superior sea una superficie cóncava.

Si cerramos un tubo cilíndrico recto por sus dos extremos, después de llenarlo de líquido y de manera que quede en su interior un poco de aire, la ampolla o burbuja que se forme siempre ocupará la parte más elevada del tubo y si lo colocamos de manera que la generatriz del cilindro sea horizontal, la burbuja ocupará toda la longitud de la generatriz superior; en



Fig. 8.

estas condiciones sería muy sensible, pues la más pequeña inclinación llevaría la burbuja toda a uno de sus extremos. Para evitar este inconveniente, se le da al tubo nivel cierta curvatura con lo cual la burbuja ocupará la parte *b*, más alta y la tangente al centro de ella misma será la horizontal, (fig. 8).

Sobre el tubo se graba con rasgos paralelos una escala de partes iguales que se utiliza para medir los desplazamientos de la burbuja, el cero de la graduación puede establecerse bien sea en la extremidad o en el centro.

La forma circular del tubo hace que la burbuja tenga siempre la misma longitud, lo que se comprueba dándole al tubo distintas inclinaciones y midiendo en cada una de ellas su longitud en la escala. Si hubiese variación el tubo nivel no serviría. Cuando se hace esta comprobación debe cuidarse que no haya variación de temperatura, pues dilatándose o comprimiéndose el líquido cuando se eleva o baja la temperatura, la burbuja se achica o se agranda.

La longitud de la burbuja no debe ser muy reducida, para evitar que la capilaridad disminuya su movilidad y por lo tanto la exactitud de sus indicaciones. No conviene tampoco exagerar su longitud hasta el punto que se haga imposible la observación simultánea de las dos extremidades de la burbuja; la experiencia indica que es necesario mantener la burbuja entre un máximo de 6 cm. y un mínimo de 3 cm. de longitud.

Es muy importante que el interior del tubo sea bien pulido y que su diámetro no sea muy pequeño, generalmente 1 a 1.5

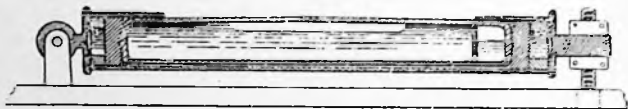


Fig. 9.

centímetros, para no disminuir la movilidad de la burbuja. Para que no se congele con las bajas temperaturas y por ser menos viscoso, lo que disminuye el rozamiento, facilitando su movilidad, el líquido que se coloca en el tubo es éter o alcohol o una mezcla de los dos.

Este tubo está asentado en una armadura metálica que, al par que lo protege, sirve para aplicarlo fácilmente sobre el plano que se desca nivelar; la armadura a su vez se apoya por sus extremos en un caballete, y con objeto de permitir las rectificaciones que más adelante se indicarán, uno de los extremos va fijo a charnela y el otro por medio de un tornillo (fig. 9); en otros,

uno de sus extremos lleva un dispositivo de 4 tornillos que permite mover el tubo en su armadura en todo sentido.

El nivel esférico aplicado al extremo superior del eje CA, está formado por una caja cilíndrica *a a* T T (figura 10) llena de alcohol y cubierta superiormente con un vidrio de forma esférica; el pequeño espacio vacío es ocupado por los vapores del líquido, constituyendo la burbuja, cuyo centro se mantiene siempre en la parte culminante de la tapa esférica, es decir que coincide con el extremo N del radio vertical. El centro de la tapa está marcado con un punto en coincidencia del cual habrá que llevar el centro

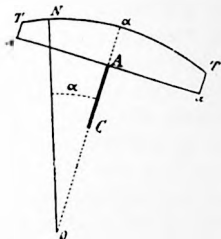


Fig. 10.



Fig. 11.

de la burbuja, pero como esto sería muy difícil, dado que no es posible a ojo determinar el centro de la burbuja, se trazan sobre el vidrio con centro en *α* uno o dos circulitos concéntricos a los cuales hay que llevar la base de la burbuja (fig. 11).

**9. Teoría del nivel.**—Sea MN el tubo que constituye el nivel trazado con centro en O y radio R, (fig. 12). La sección MN determinada por el plano que pasa por el centro O y el

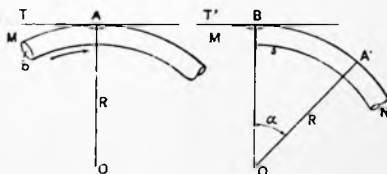


Fig. 12.

centro *b* de la circunsferencia del toro se llama plano meridiano. La burbuja ocupará la posición A donde la tangente T perpendicular al radio OA es horizontal.

Si hacemos girar MN en su plano meridiano alrededor del punto O, un ángulo  $\alpha$ , el punto A irá a A', la burbuja ocu-

pará el extremo de la vertical O B y estará en B, el arco desplazado A' B estará ligado por la relación :

$$\text{arco A' B} = R. \alpha.$$

Esto muestra que para el mismo valor de R, radio de curvatura, los desplazamientos de la burbuja son proporcionales a los ángulos girados por el nivel en su plano meridiano.

**10. Sensibilidad del nivel.**—La misma relación muestra que para un mismo ángulo, los desplazamientos de la burbuja aumentan con el valor de R, es decir que el valor del radio de curvatura del tubo nivel dá la medida de la sensibilidad. En general se expresa por el valor del ángulo  $\alpha$  correspondiente a 1 mm. o a una división de la escala del tubo.

En los instrumentos geodésicos y astronómicos de gran precisión, el valor de  $\alpha$  varía de 1" a 4" (radio de curvatura de 600 a 150 ms.), en los teodolitos ordinarios es de 4" a 10" (radio de 150 a 60 ms.) y en los instrumentos topográficos de 10" a 30" (radio de 60 a 20 ms.).

Llamando  $d$  el desplazamiento del centro de la burbuja, R el radio de curvatura del tubo y  $\alpha$  el ángulo que gira el nivel en su plano meridiano, correspondiente al desplazamiento  $d$ :

$$d = R \alpha \text{ sen } 1".$$

A continuación se dan los valores de  $\alpha$ " correspondientes al desplazamiento de 1 mm. y los valores de  $d$  correspondientes al giro de  $\alpha = 1"$ .

R.	para $\alpha = 1"$	para $d = 1 \text{ mm.}$
10 ms.	$d = 0.048 \text{ mm.}$	$\alpha = 20"0$
20	0.097	10.3
60	0.291	3.0
100	0.484	2.0
150	0.728	1.3
200	0.969	1.0
600	2.909	0.3

Los métodos para la determinación del valor angular de una división del nivel se presentarán al tratar en particular los instrumentos y su uso.

En el gabinete se verifica la curvatura del nivel y se mide la sensibilidad del mismo con un aparato llamado «Verificador de niveles».

11. Determinación de un ángulo formado por un eje con la vertical en el plano meridiano del nivel. — Sea M N, (fig. 13) un tubo de nivel, O el centro del mismo, X Y un eje cual-

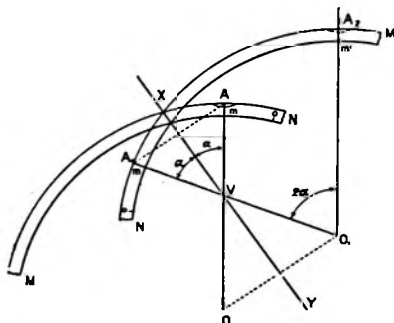


Fig. 15.

quiera en el plano meridiano; la vertical O A nos dá la posición de la burbuja, a la que corresponde una lectura  $m$  de la graduación; el ángulo  $\alpha$  formado por O A y X Y es la inclinación de este eje que tratamos de medir. Si hacemos girar el nivel  $180^\circ$  alrededor de X Y, el punto A ocupará la posición  $A_1$  simétrica con A.

$$\sphericalangle A_1 V X = \sphericalangle A V X = \alpha.$$

El centro O ocupará la posición simétrica  $O_1$ . Es fácil construir la nueva posición del tubo nivel M' N', teniendo en cuenta la nueva situación del centro  $O_1$  y que el punto X no se ha movido por estar sobre el eje de rotación. La burbuja ocupará la posición  $A_2$ , sobre la vertical de  $O_1$  y le corresponde la lectura  $m'$  de las graduaciones del nivel. El  $\sphericalangle A_1 O_1 A_2 = \sphericalangle A_1 V A = 2\alpha$ , luego el desplazamiento de la burbuja  $A_1 A_2$  medida del ángulo al centro  $2\alpha$  es la medida del doble de la inclinación del eje.

$$\alpha = \frac{m' - m}{2}$$

Si queremos llevar el eje X Y a la vertical, siendo  $\alpha$  el án-

gulo que forma con ella, lo haremos girar ese ángulo en el plano meridiano del nivel, para esto llevaremos la burbuja al medio de  $A_1 A_2$  es decir a la graduación

$$x = \frac{m + m'}{2}.$$

Siendo difícil y erróneo apreciar la graduación que corresponde al centro de la burbuja, determinaremos dicho valor en función de las lecturas correspondientes a sus extremos. Daremos el signo  $+$  a las lecturas que caen a la derecha del cero y el signo  $-$  a las que caen a la izquierda; el observador debe mirar al nivel sin cambiar de posición. Aplicando las reglas siguientes se deducen los valores de  $\alpha$  y  $x$  y el sentido de la inclinación.

Regla 1) La lectura del centro de la burbuja es la semisuma de las lecturas de sus extremos, teniendo en cuenta sus signos.

Regla 2) La inclinación es igual a la semi-suma de las lecturas correspondientes a los centros de la burbuja, aplicadas con su signo

$$\alpha = \frac{m + m'}{2};$$

siendo  $m$  la lectura correspondiente a la primera posición y  $m'$  a la segunda.

Regla 3) La lectura que corresponde a la posición del centro de la burbuja para llevar la plataforma sobre la que se apoya el nivel a la horizontal es la semi-diferencia de las lecturas aplicadas con su signo

$$x = \frac{m' - m}{2}.$$

El signo del resultado, para lo que debe tenerse en cuenta la segunda posición del nivel, indica en qué graduación hay que centrar la burbuja para llegar a ponerla horizontal, el sentido del desplazamiento de la burbuja nos da la posición del extremo más elevado de la línea que se quiere nivelar.

Las figuras siguientes muestran algunas aplicaciones y comprueban las reglas.

Cero en una extremidad, (fig. 14).

$$\langle 1^a R \rangle m = \frac{11 + 19}{2} = 15$$

$$\langle 1^a R \rangle m' = \frac{-1 - 9}{2} = -5$$

$$\langle 2^a R \rangle x = \frac{15 - 5}{2} = 5$$

$$\langle 3^o R \rangle r = \frac{-5 - 15}{2} = -10$$

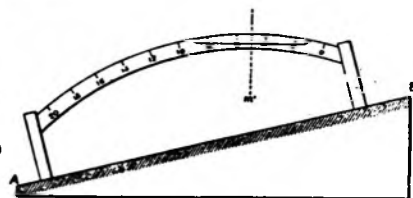
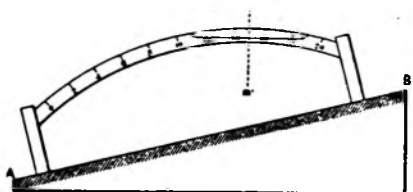


Fig. 14.

Para llevar la burbuja a la graduación —10, hay que desplazarla hacia la izquierda, teniendo en cuenta la segunda posición del nivel, hay que bajar el extremo B.

Cero en el centro, (fig. 15).

$$\langle 1^a R \rangle m = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$\langle 1 R \rangle m' = \frac{13 + 5}{2} = 9$$

$$\langle 2 R \rangle x = \frac{9 + 1}{2} = 5$$

$$\langle 3 R \rangle r = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

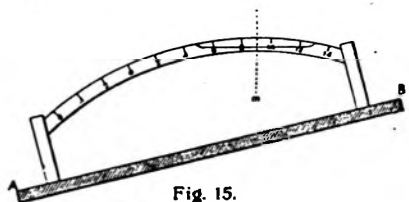
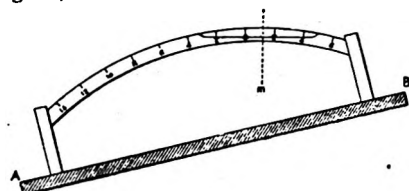


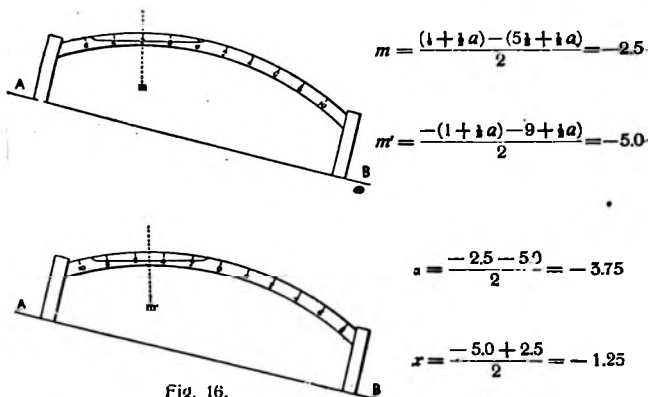
Fig. 15.

Refiriéndonos a la segunda posición del nivel, hay que llevar el centro de la burbuja en la posición + 4, haciéndola desplazar 5 divisiones a la izquierda, es decir hay que bajar el extremo B que es el más elevado.

Dos ceros en el centro, (fig. 16).

Se procede como si fuera uno solo.

Llamando  $a$ , la distancia de los dos ceros y tomando el punto medio como origen y aplicando las reglas como en el caso que se tenga un cero en el centro.



Como  $\frac{1}{2} a$  se elimina, es suficiente hacer las lecturas de los extremos de la burbuja solamente. Refiriéndonos a la segunda posición hay que llevar el centro de la burbuja a la graduación - 1.25, haciéndola desplazar 3.75 divisiones a la derecha, es decir hay que bajar el extremo A que es el más elevado.

## 12. Horizontalidad de una línea y rectificación del nivel.—

Para analizar el procedimiento, supongamos una regla MN, (figura 17) reposando por sus extremidades sobre dos tornillos  $V_1$  y  $V_2$ . Coloquemos el nivel AB, cuya tangente T al centro.



del mismo sea paralela a  $MN$ , la burbuja ocupará la posición  $a_1$ . Moviendo los tornillos  $V_1$  y  $V_2$ , haremos girar la regla y el nivel hasta que ocupe la burbuja la posición central  $a_2$ , entonces  $T$  será horizontal y por lo tanto  $MN$  que es paralela. Este es el caso en que el nivel está exactamente arreglado y que la tangente  $T$  es paralela a la regla sobre la que se aloja el nivel, en general esto no sucede y hay que llevar el nivel a esa posición de paralelismo.

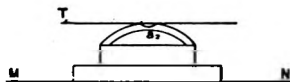
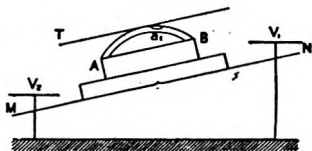


Fig. 17.

Supongamos que la regla  $MN$  forme con la horizontal un ángulo  $\alpha_2$ , y que la tangente  $T$  (fig. 18) forma con la regla un

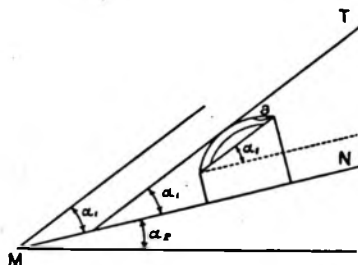


Fig. 18.

ángulo  $\alpha_1$ , la burbuja está en  $a_1$ , si la llevamos posición central  $a$ , (figura 19)  $T$  será horizontal, para esto hacemos girar

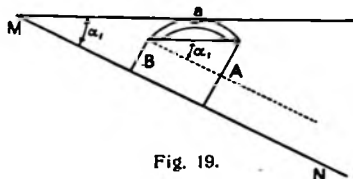


Fig. 19.

el sistema un ángulo  $\alpha_1 + \alpha_2$ : tendremos  $T$  horizontal y  $MN$

formando con ella un ángulo  $\alpha_1$ , debido a la desigualdad de los pies A y B del nivel. Si invertimos el nivel  $180^\circ$ , de manera que el pie largo ocupe la posición del corto B y vice-versa, tendremos (fig. 20), M N ocupa la misma posición formando el ángulo  $\alpha_1$  con su horizontal M H; N T forma el ángulo  $\alpha_1$  con M N y con la horizontal el ángulo  $\beta = 2 \alpha_1$ , la burbuja ocupará la posición  $a_2$  y se habrá movido desde  $a$  (centro de la posición anterior), hasta  $a_2$ , luego el número de divisiones  $a a_2$ .

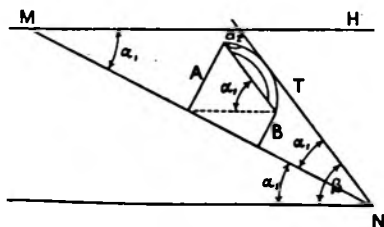


Fig. 20.

es el correspondiente al ángulo  $\beta = 2 \alpha_1$ , y para hacer T paralela a M N en que debemos anular  $\alpha_1$ , tendremos que modificar los pies del nivel A y B hasta que la burbuja ocupe la posición media entre  $a$  y  $a_2$ , quedará M N  $\parallel$  T T, y como ésta también forma un ángulo  $\alpha_1$  con la horizontal, maniobremos los tornillos de M N hasta llevar la burbuja desde su posición media a la posición central de la burbuja.

**Resúmen.**—Para poner horizontal una regla y rectificar el nivel: 1.º Con los pies de la regla llevamos la burbuja al centro. 2.º Invertimos el nivel en su alojamiento y leemos la graduación de la nueva posición de la burbuja. 3.º Volvemos a llevarla al centro, desplazándola la mitad con los tornillos de la plataforma y la otra mitad con los tornillos del nivel.

**13. Horizontalidad de un plano.**—Apliquemos el procedimiento que se ha expuesto para nivelar una línea a un plano sostenido por tres tornillos, para lo cual: 1º Colocamos el nivel en la dirección  $a b$ , (fig. 21) determinada por los tornillos de nivelación  $V_1, V_2$  y moviéndolos convenientemente cen-

tramos la burbuja, con lo cual, si la tangente al centro del nivel es paralela a la plataforma, la línea  $a b$  de la misma quedará horizontal, en general esto no sucederá y es necesario rectificar el nivel.

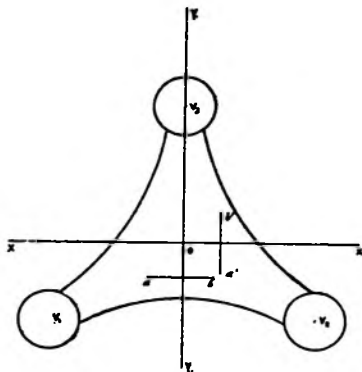


Fig. 21.

2.º Llevamos el nivel a la posición  $a' b'$ , perpendicular a la primera y con el tornillo  $V_3$ , sin tocar el  $V_1$  ni el  $V_2$ , pues sacariamos la dirección  $a b$  de la horizontal, llevamos la burbuja al centro; 3.º volvemos a la posición  $a b$ , seguramente la burbuja no estará centrada, se llena esta condición y giramos el nivel  $180^\circ$  para hacer su rectificación y horizontabilidad de la línea  $a b$  en forma definitiva.

Cuando el nivel está fijo a la plataforma, haciéndola girar sobre su eje de rotación vertical, se lleva a la posición paralela a  $a b$  y  $V_1 V_2$ , pero donde el nivel está invertido  $180^\circ$ , respecto a la posición primera de la plataforma, si la burbuja se mantiene centrada, la plataforma estará horizontal, si se desplaza se corrige la mitad con los tornillos del nivel y la otra mitad con los tornillos  $V_1$  y  $V_2$  de la plataforma; 4.º se lleva el nivel a la posición  $a' b'$  y se centra la burbuja con el tornillo  $V_3$ .

Se repite todo el procedimiento hasta obtener que en cualquier posición de la plataforma la burbuja esté centrada. Al final de la nivelación conviene que los tornillos nivelantes esten

fuera de los brazos en cantidad más o menos igual, pues sino sufrirían esfuerzos desiguales que pueden producir la ruptura de alguno de ellos. Para esto se colocan los tornillos de manera que estén igualmente afuera de los brazos, y para centrar la burbuja se obra simultáneamente sobre dos de ellos en sentido contrario.

**14. Nivelacion de un eje.**—Cuando aplicamos el nivel sobre un plano, su sección meridiana, para la cual hemos hecho la teoría del nivel, determina sobre el plano que se quiere nivelar una recta  $ab$ , proyección de  $AB$  (fig. 22); como lo que interesa es nivelar una recta cualquiera del plano, la teoría es aplicable.

Supongamos que  $ab$  es el centro de un eje cilindrico  $MN$ , sobre el cual descansa el nivel por un soporte; en este caso el eje  $ab$  estaría contenido en la sección meridiana del nivel  $AB$ .

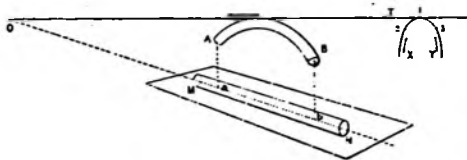


Fig. 22.

Si hacemos girar el nivel alrededor de un eje según la flecha  $x$ , la tangente  $T$  que encuentra al eje  $ab$ , en  $O$ , por estar contenida en el mismo plano, engendrará una superficie cónica y descendiendo  $T$  de la posición (1) a la (2), la burbuja se moverá en dirección hacia  $O$ ; igualmente, si hacemos girar el nivel según la flecha  $y$  pasando  $T$  de (1) a (3), la burbuja se moverá en la misma dirección. Hay que tener presente que el punto  $O$ , por estar sobre el eje  $ab$ , tiene una posición inmóvil.

**REGLA 1.ª** — Cuando el centro del eje cilíndrico de rotación está contenido en el plano meridiano del nivel, haciendo oscilar éste alrededor del eje hacia adelante y atrás, la burbuja se desliza en el mismo sentido. En este caso se rectifica el nivel y se lleva a la horizontal el eje como si fuese una línea § 12.

Si el eje del nivel  $AB$  no es coplanar al eje de rotación  $ab$ , (fig. 23) haciéndolo girar hacia adelante, ocupará la posición  $A'B'$ ; la extremidad  $A$  habrá descendido y la  $B$  se habrá elevado; la burbuja se moverá en sentido de flecha (1).

Si de la posición  $AB$  lo llevamos a la  $A''B''$ , haciéndolo girar hacia atrás, la extremidad  $A''$  se elevará y la  $B''$  descenderá; la burbuja se mueve en sentido de la flecha (2).

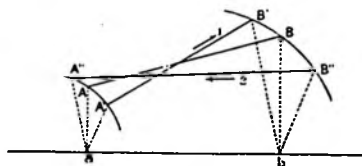


Fig. 23.

**REGLA 2.ª**—Cuando haciendo oscilar el nivel sobre sus apoyos hacia adelante y atrás, la burbuja invierte el sentido de su desplazamiento, la sección meridiana del nivel no es coplanar al eje de rotación.

Esta corrección es previa a cualquier otra, sinó el menor desplazamiento lateral lleva la burbuja fuera del centro, aún en el caso de que el eje cilíndrico esté horizontal.

Para hacer esta rectificación el tubo del nivel debe estar montado sobre una armadura que le permita desplazamientos laterales. Se maniobran los tornillos  $a$  (fig. 24), hasta conseguir que haciendo oscilar el nivel, la burbuja se desplace en el mismo sentido.

De lo expuesto se deduce fácilmente el sentido en que deben moverse los tornillos.

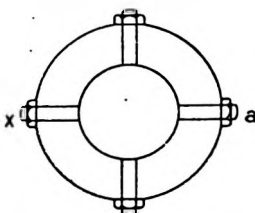


Fig. 24.

**15. Rectificación del nivel esférico.**—Este nivel está (fig. 25), provisto de sus tres tornillos de corrección  $a$ ,  $b$  y  $c$ , dispuestos en los vértices de triángulo equilátero.

Para la rectificación hay que considerar:

1.º Que el instrumento de que forma parte esté provisto de niveles tubulares; en este caso, despues de poner la plataforma horizontal con el nivel tubular, se mueven los tornillos *a, b y c*, hasta llevar la burbuja a la posición central *m*, (fig. 25).

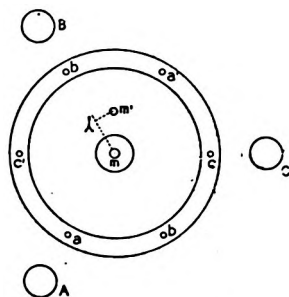


Fig. 25.

2.º Que el instrumento no tenga niveles tubulares; se disponen los tornillos *a, b y c* según los pies A B y C del instrumento y se centra la burbuja en *m*; se gira el nivel 180º; los tornillos correctores ocuparan la posición *a' b' y c'* y la burbuja la *m'*, el desplazamiento *m m'* lo descomponemos en *m' λ* y *λ m*. El *m' λ* lo anulamos corrigiendo la mitad con los tornillos *a y c* y la otra mitad con los A y C; para el desplazamiento *m λ*, corregimos la mitad con el tornillo *b* y la otra mitad con el B. Se repite la operación si es necesario.

El procedimiento indicado se deduce considerando el nivel esférico como la intersección de dos niveles tubulares perpendiculares.

### CAPITULO III.

#### ANTEOJOS

**16. Descripción.**—El anteojo está formado por tres tubos enchufados que pueden correr uno dentro del otro. El primero A B (fig. 26) se llama porta objetivo, por llevar en su parte anterior el objetivo, en el interior de la otra extremidad

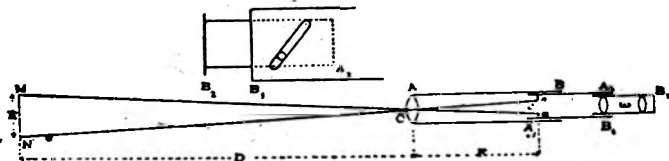


Fig. 26.

presenta una superficie cilíndrica donde encaja el segundo tubo A<sub>1</sub> B<sub>1</sub> llamado porta retículo. El movimiento a lo largo del primer tubo lo hace A, B, por medio de un piñon fijo en A B que obra sobre una cremallera asegurada al A<sub>1</sub> B<sub>1</sub>; para evitar movimientos de giro de A<sub>1</sub> B<sub>1</sub> alrededor de un eje longitudinal, existe un tope que corre en una ranura practicada en el A B.

En el interior del tubo A, B, se instala el diafragma *m n* que como se demuestra en óptica reduciendo el campo de vista y obstruyendo el paso de los rayos demasiados inclinados que deforman las imágenes, permite obtener mejores condiciones de visibilidad.

Este diafragma se compone de una pieza metálica circular (fig. 27), con un taladro concéntrico, en el cual y en dirección de dos diámetros perpendiculares entre sí, se hallan colocados los hilos de araña muy delgados *h h*, *v v*, llamados hilos del retículo; de manera que estableciendo uno de ellos vertical, el

otro será horizontal. A veces se coloca uno o dos hilos equidistantes a ambos lados del horizontal.

Como consecuencia de las variaciones de temperatura, los hilos pueden descolarse o cortarse, algunos constructores, para evitar estos inconvenientes, los sustituyen por una placa de vidrio sobre la cual están grabadas con diamante, líneas de extraordinaria fineza que desempeñan el papel de los hilos, este sistema presenta el inconveniente de absorber mucha luz.

El retículo debe ser susceptible de recibir movimientos según dos ejes diametrales perpendiculares, en el sentido vertical y horizontal, para poder colocar su centro sobre el eje optico del antejo y otro tercer movimiento de rotación alrededor del eje optico, para permitir instalar verticalmente uno de los hilos.

Para obtener esto, el diafragma retículo está sostenido por cuatro tornillos  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  y  $t_4$ , en forma tal que haciendo funcionar dos opuestos, se le comunica desplazamientos horizontales o verticales (fig. 27); el movimiento de giro se obtiene fijando

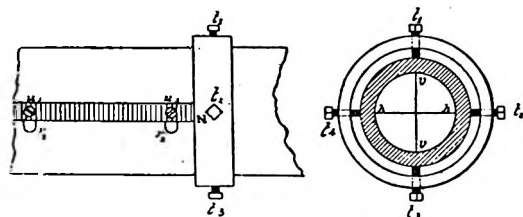


Fig. 27.

los tornillos  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  y  $t_4$ , no sobre el tubo porta retículo A B, sino sobre un manchón que puede girar. Este manchón lleva un apéndice N que va fijado al tubo por dos tornillos  $u_1$ ,  $u_2$ , que juegan en las cavidades ovaladas  $r_1$ ,  $r_2$ , de modo que aflojando los dos tornillos, se pueden hacer girar pequeños ángulos al apéndice N y por consiguiente al manchón y al retículo. Algunos anteojos presentan otros sistemas para obtener estos movimientos.

El tercer tubo  $A_2 B_2$  del antejo, constituye el ocular, formado generalmente por dos lentes (fig. 26). Esta cerrado en su parte



posterior por un obturador, horadado en su centro con objeto que el observador dirija la visual. En algunos anteojos, el porta ocular, corre a frotamiento suave en el porta reticulo, sistema defectuoso, por cuanto es necesario para desplazarlo, tirar o empujar el porta ocular, lo que puede ocasionar variación en la posición del instrumento, por cuya causa es más conveniente reunirlo al porta ocular por un tornillo que obliga a  $A_2 B_2$  a seguir un movimiento helicoidal, por medio de un tope saliente fijo al porta ocular que corre en una ranura oblicua practicada en el otro tubo (fig. 26). En consecuencia basta imprimir un movimiento suave de rotación al ocular para que avance o retroceda sin esfuerzo.

Para evitar que se produzcan graves errores, es esencial que no haya juego alguno entre los tubos, principalmente entre el porta-objetivo y el porta-reticulo.

**17. Objetivo.**—Sirve para obtener en el interior del anteojo la imagen real del objeto visado.

Las lentes que se usan no son sencillas, pues éstas al descomponer la luz dan por resultado imágenes irizadas en los bordes. Corrijese este defecto usando objetivos compuestos de lentes de distinto índice de refracción, una  $\alpha_1$  de vidrio común o crown-glass y otra  $\alpha_2$  divergente de cristal o flint-glass, colocada siempre en la parte interior del anteojo (fig. 28 a).

Muchos objetivos se componen de tres lentes, según las combinaciones siguientes. Las lentes ex-



Fig. 28.

teriores cóncavas-convexas (fig. 28 b) y la interior biconvexa.

Las exteriores biconvexas (fig. 28 c) y la interior bicóncava.

Importa mucho que estas lentes no tengan juego en su alojamiento, lo que provocaría un desplazamiento del eje óptico del anteojo y se recomienda especialmente no desarmarlas de su montura. El polvo y materias que puede depositarse en su parte interna no llegan nunca a disminuir de una manera apreciable su claridad, por esta razón su limpieza debe ser considerada como una operación *perjudicial más que útil*; el des

arme del objetivo debe hacerse donde se disponga de elementos para rectificar su nueva colocación y por una persona hábil.

**18 Formacion de las imágenes.**—Siendo  $F$  y  $F'$  (fig. 29) los focos principales de una lente, la recta  $FF'$  es el *eje principal* que pasa por el centro  $O$ , llamado *centro óptico* de la lente.

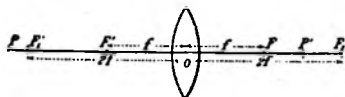


Fig. 29.

La distancia  $OF = OF'$  es la distancia focal igual a  $f$ .

Un punto  $P$  a una distancia  $OP = p$  del centro óptico forma una imagen en un punto  $P'$  a una

distancia  $OP' = p'$  ligada a  $p$ , por la siguiente relación:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Considerando a  $P$  infinitamente alejado;  $p = \infty$ ,  $p' = f$ , la imagen real se forma en el foco principal  $F$ .

Cuando  $p = 2f$ ,  $p' = 2f$ , luego: variando la distancia de  $P$  desde  $\infty$  hasta  $2f$ , la imagen varía desde  $F$  hasta  $F'$ , siendo  $FF' = f$ .

Para  $p = f$ ,  $p' = \infty$  y siendo  $p < f$  el valor de  $p'$  es negativo, se forma la imagen del mismo lado de la lente en que está  $P$ .

En el caso que se tenga un objeto  $MN$ , (figura 30); para  $OP = \infty$  se formará una imagen real reducida a un punto en el foco  $F$ .

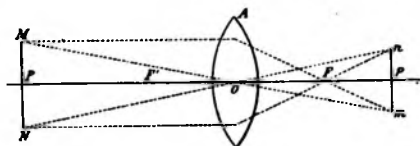


Fig. 30.

Variando  $OP$  desde  $\infty$  hasta  $2f$  se forma una imagen

real invertida  $mn$  más pequeña cuya distancia  $op$  varía desde  $f$  hasta  $2f$ . Para  $OP = 2f$  la imagen es de la misma dimensión que el objeto. Siendo  $2f > OP > f$ , la imagen es real, invertida y mayor que el objeto. Para  $OP = f$  no hay imagen y para  $OP < f$  se forma una imagen virtual derecha más grande que el objeto; es.

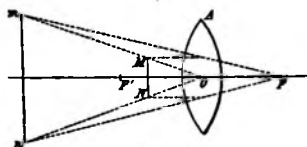


Fig. 31.

ma una imagen virtual derecha más grande que el objeto; es.

este último caso el principio de la construcción de los oculares de los anteojos y microscopios (fig. 31).

**19. Oculares.**—La imagen de un objeto cuando su distancia al centro óptico de la lente varía entre  $\infty$  y  $2f$ , hemos visto que es real, invertida y más pequeña; es éste el caso de la lente objetiva del anteojo; para ampliar esta imagen se usa el ocular. Hemos visto, también, que cuando la distancia del objeto al centro óptico es menor que su distancia focal, se forma una imagen virtual mayor; en el anteojo, el objeto es la imagen real invertida formada cerca del plano focal de la lente objetiva y coincidiendo con el plano del retículo, la combinación de las lentes del ocular aumentan esa imagen y evita, también, la causa de cromatismo y la aberración de esfericidad.

Los sistemas de oculares más usados en los instrumentos topográficos son: el positivo o de Ramsden y el negativo de Huyghens o Campani; es positivo o negativo según que la imagen dada por el objetivo tenga el rol de un objeto real o virtual con respecto a la primer lente del ocular llamada *colector*. La lente que queda del lado del observador es la *lente ocular*.

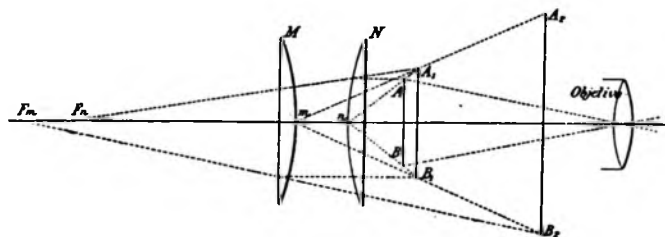


Fig. 52.

**20. Ocular Ramsdem.**—Formado por dos lentes plano convexas, con sus caras planas exteriormente, la imagen invertida  $AB$  producida por el objetivo se forma a una distancia de la lente  $N$  menor que la distancia focal  $n F_n$ , se tiene por lo tanto la imagen virtual mayor  $A_1 B_1$  debida a la lente  $N$ . Esta nueva imagen está en las mismas condiciones respecto a la lente  $M$ , y se tiene finalmente la imagen  $A_2 B_2$  aún mayor. Como la  $AB$

debe formarse en el plano del retículo y esta imagen se forma en la parte anterior del sistema de lentes, es fácil reconocer un anteojo cuando está provisto con el ocular Ramsden, en ese caso el retículo está colocado entre el ocular y el objetivo en A B. Casi todos los anteojos topográficos tienen este sistema de ocular.

**21. Ocular Huyghens.**— Está compuesto por dos lentes plano convexas cuyas caras planas están hacia el lado del ocular. La imagen invertida real A B producida por el objetivo se forma entre las dos lentes N y M del ocular, la primera  $A_1 B_1$  debida

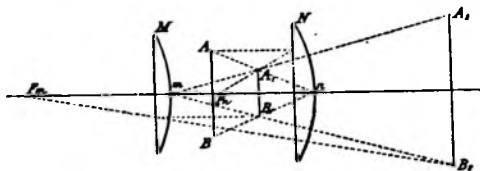


Fig. 33.

a la lente N es más pequeña, con la lente M se tiene la imagen final  $A_2 B_2$  que es la ampliada.

Este ocular produce un aumento menor que el Ramsden; cuando se le adapta un retículo, éste se coloca entre las dos lentes, donde se forma la imagen A B, el retículo y la lente colectora N están fijados en el mismo tubo y la lente acular en otro tubo que se desliza dentro del primero y por lo tanto se puede variar la distancia de la última lente al retículo.

El ocular Huyghens acorta la longitud del anteojo a expensas de la ampliación de la imagen; el Ramsden da imágenes más ampliadas, pero exige anteojos de mayor longitud.

**22. Amplificación de un anteojo.**— Es la relación que existe entre los ángulos bajo los cuales se ve un objeto a simple vista y con el auxilio del anteojo.

Visto directamente un objeto alejado, subtende un ángulo  $A O B = A' O B'$  (fig. 34).

Si se mira la imagen  $A' B'$  con el ojo colocado en K sin

ocular, el aumento será, reemplazando los ángulos por las tangentes.

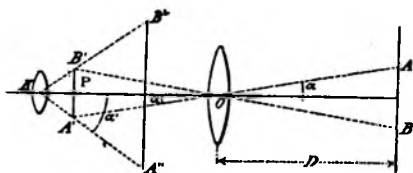


Fig. 54.

$$A = \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \frac{\frac{A'B'}{KP}}{\frac{A'B'}{OP}} = \frac{OP}{KP} = \frac{F}{d}$$

llamando  $F$  la distancia focal  $OP$  del objetivo y  $d$  la distancia  $KP$  del ocular al foco.

Se aumenta la amplificación disminuyendo  $d$  y para esto se mira la imagen  $A'B'$  a través de una lente de distancia focal muy corta, la nueva imagen  $A''B''$  es necesario que se forme a una distancia igual a la de la *visión distinta*, llamando  $\Delta$  a esta, tenemos siendo  $f$  la distancia focal de la lente ocular

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{f}.$$

por consiguiente :

$$A = \frac{F}{d} = F \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{f} \right) = \frac{F}{f} \left( 1 + \frac{f}{\Delta} \right) = \frac{F}{f}$$

aproximadamente debido a lo pequeño que es  $f$  con respecto a  $\Delta$ .

De la fórmula anterior deducimos que hay dos maneras de aumentar la amplificación.

1.º Aumentando la distancia focal  $F$  y por lo tanto el diámetro del objetivo, con lo cual la imagen real  $A'B'$  aumentará de tamaño, creciendo en igual proporción la virtual  $A''B''$ .

2.º Disminuyendo la distancia focal  $f$  y por lo tanto el diámetro del ocular; con lo que sin alterarse el tamaño de la imagen real  $A'B'$ , crece solo el de la virtual  $A''B''$ .

Ofrece este segundo medio el inconveniente de que, iluminada  $A' B'$  con una cantidad de luz determinada (la que permite pasar el objetivo), ésta será la total que iluminará a  $A'' B''$  y por consiguiente, cuanto mayor sea dicha imagen, menos clara parecerá, pudiendo llegar a ser insuficiente la cantidad de luz que la ilumina. No ofrece tales inconvenientes el primer medio, pues si bien aumenta el tamaño de  $A' B'$ , también crece el diámetro del objetivo con lo cual, pasa mayor cantidad de luz.

Por lo tanto, para favorecer la buena iluminación de las imágenes conviene tomar objetivos de largo foco y oculares que no lo tengan muy corto; pero así resultan anteojos muy grandes y debe pensarse en las condiciones de equilibrio de los instrumentos en que están montados y en el transporte de los mismos; deberá, por lo tanto, combinarse ambos métodos para no perder demasiada claridad ni dar lugar a anteojos muy grandes.

**23. Método práctico para medir la amplificación de un anteojo.**— Cuando no se conocen las distancias focales de las lentes, ni los diámetros de ellas, puede medirse la amplificación colocando una regla graduada bien vertical frente al anteojo; este colocado bien horizontal y a una distancia tal que se vean a simple vista sus divisiones; enfocado el anteojo, se aplicará un ojo al ocular, leyendo en la mira el número de divisiones abarcadas por dos hilos horizontales del retículo; una vez hecha la lectura se abre el otro ojo, y mirando con él directamente a la mira, mientras que con el otro se sigue haciéndolo por el anteojo, se verán dos imágenes de aquella, una al lado de la otra, en su verdadero tamaño una y amplificada la otra, lo mismo que los hilos del retículo. Observando cuales son las divisiones que en la vista directamente enrasan con los hilos que antes se emplearon para ver por el anteojo, y dividiendo por la longitud del espacio que comprenden al interceptado en aquella lectura, se tendrá la amplificación. Esta operación no necesita mucha práctica para obtener un resultado aceptable, puede facilitarse haciendo que un ayudante en la mira baje o suba una señal a lo largo de ella, hasta que se vea a simple vista en prolongación de los hilos del retículo.

Debe repetirse varias veces la operación hasta obtener igual-

los valores para la ampliación, que si no será exacto tendrá la aproximación necesaria:

También pueden compararse las distancias a las cuales deben colocarse dos objetos iguales para que el tamaño aparente visto en el antejo sea igual al tamaño real visto con el ojo desnudo. Para esto se dibujan dos círculos negros de 20 a 30 cm. de diámetro sobre los cartones blancos, se lleva uno de ellos a una distancia conveniente y se observa con el antejo; el otro círculo, mirándolo a ojo desnudo se hace acercar o alejar hasta que ambos parezcan del mismo tamaño, la relación de las distancias es la ampliación del antejo.

**24. Campo de un antejo.**—Es la porción de espacio visible nitidamente a través del ocular, un límite es evidentemente el cono cuyo vértice es el centro óptico del objetivo y tiene por generatrices los ejes secundarios OA y OB, que se apoyan sobre la circunferencia del ocular.

Si AB (fig. 54), está suficientemente alejado, la imagen se formará en el foco de la lente objetiva, en A'B', el campo será el ángulo AOB, que representamos por la relación

$$C = \frac{A'B'}{F}$$

A través del ocular solamente se vé con claridad y precisión dentro del cono que tiene por vértice el ojo del observador y las generatrices formando un ángulo de 25°; luego si A'B' está del ojo K a una distancia tal que el ángulo A'KB' < 25°, el campo útil será  $\frac{A'B'}{F}$ , pero si A'KB' > 25° el campo útil se reduciría, no viéndose la parte A'B' de la imagen AB sino una más pequeña.

Aproximadamente, teniendo en cuenta el valor pequeño de la distancia focal  $f$  de la lente ocular, como en el caso de la ampliación podemos poner  $A'KB' = \frac{A'B'}{f}$  y la condición anterior es

$$\frac{A'B'}{f} \leq 25^\circ$$

por lo tanto

$$C \approx \frac{25^\circ}{\frac{F}{f}} = \frac{25^\circ}{A}$$

Esta relación muestra que el campo de un anteojo está en razón inversa de la amplificación del mismo, y por esta razón los anteojos de gran amplificación tienen un campo pequeño que hace dificultoso dirigirlo sobre un punto dado por lo que se acompañan con un *buscador* que es un anteojo de pequeña amplificación y de campo grande; ambos con sus ejes paralelos entre sí, y que sirve para encontrar el punto al que se quiere apuntar. El cono de plena luz y uniformemente iluminado, determinado por los  $25^\circ$ , está limitado por un diafragma que se coloca en el foco de la lente objetivo y es donde se ponen los hilos del retículo.

Prácticamente puede determinarse el campo de un anteojo, colocando a una distancia  $D$  del objetivo, una regla graduada vertical, la longitud  $AB$  que corresponde a las visuales extremas divididas por  $D$  nos da el campo

$$C = \frac{AB}{D}$$

**25. Resumen de las condiciones de un anteojo.**— Las condiciones que debe llenar un anteojo son: nitidez, amplificación, campo y claridad.

La *nitidez* depende de la buena fabricación de las lentes y que sean acromáticas.

La *amplificación*, es aproximadamente igual a la relación de la distancia focal del objetivo a la del ocular. Cuando se quiere aumentar la amplificación hay que aumentar la distancia focal del objetivo, lo que hace los anteojos poco manejables, no hay por otra parte interés en tener grandes aumentos, puesto que la claridad disminuye cuando la amplificación aumenta y los objetos visados sobre el terreno están generalmente poco iluminados.

El *campo* disminuye, también, cuando aumenta la amplificación y con un campo chico es más difícil encontrar la señal que se quiere visar.



**26. Dimensiones de los elementos de un anteojo.**— La experiencia y el cálculo muestran que para el mejor empleo topográfico, debe aproximarse, en lo que sea posible, la relación entre los elementos de un anteojo, a las siguientes:

R, diámetro del objetivo (supuesto simple).

F, distancia focal de la lente objetiva.

$f$ , distancia focal del ocular (compuesto).

A, amplificación.

C, mitad del campo real.

L, longitud del anteojo.

Las dimensiones expresadas en mm.; se debe tener:

$$\frac{R}{F} = \frac{1}{10}$$

$$A = \frac{R}{1.6}; A = \frac{F}{16}$$

$$f = \frac{F}{A} = 16 \text{ mm. (constante).}$$

$$C = \frac{0.2}{A}$$

$$L = F + f.$$

La claridad en estas condiciones es más o menos constante

Con las relaciones anteriores se ha calculado el siguiente cuadro:

LENTE OBJETIVA		A amplificacio- nes	2 C campo real	L longitud del anteojo
R diámetro	F distancia focal			
10 mm.	100 mm.	6	4"	116 mm.
15 "	150 "	9	2" 40'	166 "
20 "	200 "	12	2"	216 "
25 "	250 "	15	1" 36'	266 "
30 "	300 "	18	1" 20'	316 "

**27. Enfocar el anteojo.**— Los hilos del retículo sirven para hacerlos coincidir con ciertos detalles de los objetos visados, por lo que es necesario que la imagen real dada por el objeto se forme exactamente en el plano del retículo.

Si esto no sucede y siendo  $AB$  la imagen real,  $mno p$  los hilos del retículo (fig. 35) que se cortan en  $F$ , dando al ojo las posiciones  $a, b$  y  $c$ , las proyecciones del cruce de los hilos sobre la imagen del objeto, serán:  $a', b'$  y  $c'$  y habrá incertidumbre en la posición del anteojo que corresponde a la coincidencia del centro del retículo.

Como la distancia de la imagen al objetivo varía según la distancia del objeto, es necesario poder variar la distancia entre el retículo, donde debe formarse la imagen y el objetivo. Esto se consigue de dos maneras; cuando el retículo está fijo, sin desplazamiento, el objetivo está montado en un tubo interior que puede desplazarse longitudinalmente, la otra

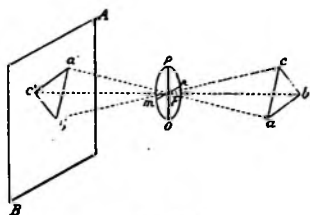


Fig. 35.

forma es fijar el retículo en el tubo porta-retículo y éste es el que se desplaza.

Para cada vista existe una distancia mínima, entre el ojo y el objeto, que oscila alrededor de 30 cm. normalmente, para la cual la imagen se presenta muy nítida y no fatiga la vista; es la distancia de la *visión distinta*. La imagen virtual del objeto visado y la del retículo en el anteojo debe, entonces, formarse a esa distancia del ojo, lo que se consigue con el ocular Ramsdem, desplazándolo convenientemente respecto al retículo que, en general, está fijo en el anteojo en la parte anterior del tubo porta-retículo; con el ocular Huyghens se desplaza una de las lentes que lo forman, la más cercana al ojo.

En resumen: 1.º La imagen real debe formarse en el plano del retículo, lo que se consigue desplazando el objetivo respecto al retículo. 2.º Los hilos del retículo deben formar su imagen virtual agrandada a la distancia de la visión distinta, lo que se obtiene moviendo el ocular.

Llamando  $D$  la distancia al objetivo del objeto que se quiere colimar,  $f$  la distancia focal del objetivo y  $x$  la distancia de la imagen (fig. 36).

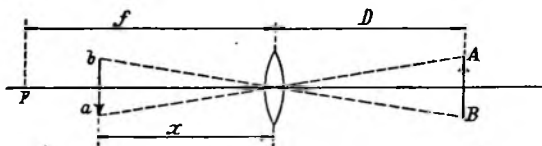


Fig. 36.

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f} \quad \text{ó} \quad x - f = \frac{f^2}{D - f}$$

y con suficiente aproximación

$$x - f = \frac{f^2}{D}$$

El primer miembro representa la distancia de la imagen  $a b$  al retículo y por lo tanto lo que éste debe desplazarse para llevar la imagen a su plano. Suponiendo  $f = 30$  cm., los valores correspondientes de  $D$  y  $x - f$  son

$D$	$x - f$	$D$	$x - f$
40000 ms.	0.032 mm.	500 ms.	0.180 mm.
20000 >	0.004 >	100 >	0.900 >
10000 >	0.009 >	50 >	1.810 >
1000 >	0.090 >	10 >	9.000 >

Estos valores muestran que para distancias superiores a 500 ms. puede considerarse al retículo fijo en el plano focal del objetivo, mientras que para distancias menores la longitud del anteojo debe ser modificada a fin de que la imagen del objeto sea llevada al plano del retículo.

En la hipótesis de  $f = 30$  cm. y de el tubo porta objetivo o porta retículo, según el caso, pueda desplazarse 2.5 cm. se tendrá por la fórmula anterior  $D = 3.2$  ms., éste es el valor de la distancia mínima a la que puede ser enfocado un objeto por un anteojo de esas características.

**28. Práctica del ajuste del anteojo para la observación.—**

1.º Se dirige el anteojo sobre un fondo claro (el cielo o una hoja de papel) y se mueve el ocular hasta que los hilos del retículo aparezcan bien nítidos y negros.

2.º Se visa el objeto que se quiere observar y se desplaza el objetivo hasta que su imagen aparezca con un máximo de nitidez; si después de esta operación la imagen del retículo ha perdido un poco de su nitidez, se mueve nuevamente el ocular hasta conseguirlo.

3.º Se asegura, finalmente, que la imagen del objeto visado se forma exactamente en el plano del retículo; para esto es necesario mover el ojo perpendicularmente a uno de los hilos y si este parece desplazarse sobre la imagen hay *paralaje*, la que se destruye variando convenientemente la distancia objetivo retículo.

**29. Limpieza de las lentes.—**El objetivo no debe ser desmontado sino por un hábil operador; en general su limpieza no influye mucho en la claridad de las imágenes.

Cuando se observan manchas sobre las imágenes hay que atribuir las a suciedad de las lentes del ocular o del retículo. Si estas manchas se mueven sobre la imagen, cuando se mueve el ojo delante la lente ocular, la causa que la produce es la suciedad en las lentes colocadas detrás del retículo, del lado del observador; cuando no se desplazan sobre la imagen, la suciedad está en el retículo.

Para limpiar un anteojo es suficiente repasar con un trapo de hilo muy suave y limpio, la cara exterior del objetivo que es la más expuesta a la tierra y las superficies de las lentes del ocular que el observador puede limpiar sin desarmarlo. Para una limpieza mas completa de las lentes, se frota suavemente su superficie con un trapo de hilo mojado en alcohol rebajado con una cantidad igual de agua (alcohol a 50º), se seca enseguida con otro trapo y se extiende sobre ellas con el dedo un poco de vaselina pura; finalmente se recorre de nuevo con un trapo seco y suave.

**30. Verificación del anteojo.** -- Además de las condiciones anteriormente enunciadas la bondad de un anteojo depende de

la perfección con la que han sido centradas las lentes, cuestión que puede comprobarse como sigue.

Tratándose de las lentes del objetivo, sáquese el ocular del anteojo y póngase en su lugar la llama de una vela a 50 o 40 cm. del objetivo, mirando por éste las múltiples imágenes de la llama producidas por las superficies de las lentes, ellas deberán estar en línea recta si están bien centradas las partes constituyentes del objetivo; en caso contrario habrá que moverlas en su alojamiento hasta conseguirlo. Este método es debido a Wollaston.

Para juzgar en conjunto la centración de las lentes del ocular y objetivo, se apunta el anteojo a una estrella de 1ª o 2ª magnitud, desplazando un poco el ocular de la distancia de la visión distinta se hace confusa y aumenta la imagen de la estrella pero si se mantiene en forma circular, las lentes están bien centradas. También puede emplearse el método debido a Fraunhofer; se dibujan sobre un papel blanco algunas figuras regulares geométricas como círculos de 2 a 5 cm. de diámetro, cuadrados de 3 a 5 cm. de lado, estas figuras se llenan con negro y se miran a una distancia de 50 a 100 ms., la regularidad de ellas debe estar bien definida y sin coloración, a lo mas ligeramente azuladas.

Para constatar la falta de acromatismo dirijase el anteojo a un objeto pequeño y negro, el asta de un pararrayo, enfóquese el anteojo hasta tener una imagen nítida. Si después se acerca o aleja el ocular al objetivo hasta que los contornos de la imagen estén irisados, se comprueba a veces que, para una de sus posiciones extremas, el objeto en vez de ser negro aparece violeta y que para otra posición es verde o amarillo.

Esta coloración es debida a falta de acromatismo y ella no tiene importancia cuando el enfoque del anteojo es correcto.

Para reconocer que un anteojo está convenientemente diafragmado, es decir que el anillo ocular es suficiente, se enfoca el anteojo sobre un objeto lejano, se apunta después al cielo y luego con una lupa de corta distancia focal se examina el anillo poniéndola a una distancia del ocular tal que dé una imagen neta del contorno del anillo diafragma. Si se notara sobre el pequeño círculo luminoso visible, que es la imagen

del objetivo, sea una aureola luminosa o coronas iluminadas y oscuras, ello probaría que el anteojo no está bien diafragmado.

Cuando la imagen del objetivo no es tan luminosa en el centro como en los bordes, ello es indicio de que uno, por lo menos, de los diafragmas es insuficiente.

También puede comprobarse la insuficiencia de los diafragmas mirando al interior del anteojo sirviéndose del objetivo; si se forman sobre las paredes del tubo aureolas luminosas queda comprobada la existencia de este defecto.

## CAPITULO IV.

### GONIOMETRIA

**31. Goniómetros.**—Bajo este nombre se designan los instrumentos destinados a la medida de los ángulos, medida que se efectúa mediante la determinación del desplazamiento sobre un círculo graduado, llamado limbo, de un índice solidario a una pinula o anteojo, llamado alidada.

Describiremos algunos detalles comunes a todos estos instrumentos.

**32. Pinula.**—Sirve para determinar una línea de mira; está formada por una regla metálica, en cuyos extremos, unidas a charnela, se elevan perpendicularmente a ella otras dos reglas; cada una de éstas presenta una pequeña hendidura longitudinal (figura 37) y un rectángulo vaciado y dividido en dos partes por un hilo. El plano determinado por los dos hilos pasa por el centro del limbo.

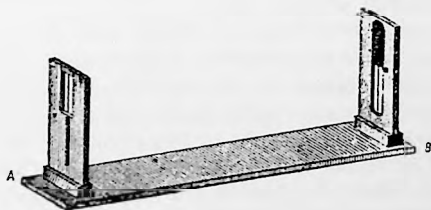


Fig. 37.

Estas pinulas, en la mayoría de los instrumentos, han sido substituidas por antejos, que a las ventajas del aumento y claridad con que permiten observar objetos que por su gran distancia o insuficiencia de luz propia no serían visibles a simple vista, unen la de presentar con exactitud y bien definida la línea de mira. En los trabajos hidrográficos siempre se usan instrumentos provistos de antejos.

**33. Limbo.**— Es todo arco de círculo que lleva una graduación que sirve para medir ángulos.

En la mayor parte de los instrumentos, el limbo tiene la forma de un disco anular en el interior del cual gira un disco concéntrico sobre el cual están grabados los índices y montado el anteojo. Está dividido en 360 o 400 partes según que la graduación adoptada sea la sexagesimal o la centesimal, siendo las divisiones menores en ellos trazadas de un valor angular tanto mas reducido cuanto mayor precisión proporcione el aparato. Esta graduación suele numerarse de 10 en 10 grados o de 5 en 5; los trazos correspondientes a las decenas de ellos son más largos que los que señalan las medias decenas; estos más largos que los que señalan los grados y así sucesivamente hasta la menor graduación.

Las superficies sobre las que se marcan las graduaciones con una máquina de dividir, son coronas circulares planas, fajas troncos cónicas o cilíndricas. El metal que se emplea es plata, platino o metal blanco muy duro.

Los índices marcados en el disco interior que son invariables con respecto al anteojo o pinula, son dos, colocados en los extremos de un diámetro o cuatro colocados por pares en los extremos de dos diámetros perpendiculares.

Estos índices que son unos trazos hechos en un pequeño sector del mismo metal que el arco graduado del limbo, son en general los céros de los nonios.

En algunos instrumentos los índices están en el limbo fijo y el limbo en el móvil y solidario con el anteojo.

**34. Ejes de rotación.**— Para que los movimientos de los índices y los limbos sean perfectamente concéntricos, los ejes de rotación están constituidos por piezas cónicas que atraviesan mangos de la misma forma; los constructores designan estos dispositivos bajo el nombre de centros; los croquis de las figuras 38 y 39 muestran los más generales.

En la (fig. 38) el aparato comprende solo una parte móvil  $M_1$  que gira con respecto a una pieza fija  $F$ .

La figura 39, corresponde a instrumentos que llevan dos partes móviles distintas  $M_1$  y  $M_2$ , en ambos sistemas, tornillos llamados de presión, permiten hacer solidarios a voluntad, bien,



sea la parte fija  $F$  a la móvil  $M_1$  (fig. 39) o bien las partes móviles  $M_1$  y  $M_2$ .

En un centro bien acabado, las piezas cónicas deben tener contacto por una parte, en toda la extensión de las superficies cónicas, y por otra parte sobre pequeños anillos circulares: En la (fig. 39) se ve que la pieza móvil  $M$  reposa sobre la pieza  $F$ ,

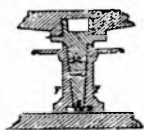


Fig. 38.

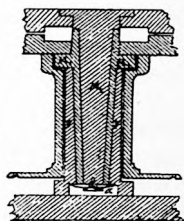


Fig. 39.

no solamente por su superficie cónico interior, sino también en su parte inferior por medio de un pequeño plano horizontal. Si  $M$  apoyara sobre este plano solamente habría juego; si por el contrario apoyara sobre la parte cónica únicamente se produciría acunamiento; para asegurar los contactos horizontales, se instalan los pequeños resortes  $a$ .

**35. Tornillo de presión y coincidencia.**—Para visar con un instrumento un punto determinado, se manobra a mano sobre la parte móvil, hasta tener el objeto en el campo del antejo y después se hará coincidir con la prolongación de su eje óptico, lo que se obtendrá por pequeños movimientos imposibles de graduar a mano. Para ello se utiliza un dispositivo semejante en todos los instrumentos, constituidos por dos tornillos; el de *presión* que sirve para inmovilizar el plano móvil y permite el funcionamiento del de *coincidencia*. Existen muchas disposiciones para ellos, de las cuales una, es la que generalmente tiene el sextante; en los instrumentos topográficos son análogos.

**36. Nonio.**—Consiste en una regla circular del mismo radio que el limbo, graduada en el mismo sentido y tal que  $(n - 1)$  divisiones del limbo, comprenden  $n$  divisiones del nonio.

Llamando  $d'$  la longitud de la división del nonio y  $d$  la longitud de la división del limbo:

$$n d' = (n - 1) d$$

$$d' = d \frac{n-1}{n},$$

Siendo  $x$  la diferencia  $d - d'$  entre la longitud de ambas;

$$x = d - d' = \frac{d}{n}.$$

El valor de la aproximación del nonio es evidente que será tanto mayor cuanto menor sea  $x$ , es decir cuanto mas chicas sea la longitud de las graduaciones del limbo  $d$  y más grande el número  $n$ , en que se divide el nonio. Pero esto tiene un límite impuesto por el diámetro de la corona donde va graduado el limbo, no pudiendo ser muy grande este diámetro porque haría voluminoso el instrumento y poco adecuado para trabajos topográficos, tampoco se puede llevar la división del limbo mas alla de lo compatible con la claridad de la lectura, comodidad y posibilidad material de la división y grabado del limbo en buenas condiciones.

Tampoco conviene aumentar con exceso el número de divisiones del nonio, pues resulta indeterminación entre los varios trazos contiguos respecto a cual corresponde la coincidencia exacta.

**37. Lectura de los nonios.**—Consideramos el limbo A B (fig. 40), dividido en medios grados iguales a  $30'$ ; tomando 29

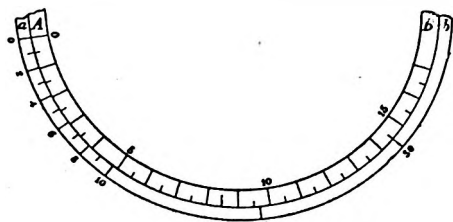


Fig. 40.

divisiones del mismo, la longitud  $a b$  del nonio, la dividimos en 30 partes. La aproximación es igual a  $\frac{d}{n} = 1'$ .

Coincidiendo el cero del limbo y el cero del nonio, coincide la graduación final 30 del nonio con la  $14^{\circ} 30'$  que corresponde a 29 divisiones del limbo.

La división 1 de  $a b$  está separada de la correspondiente del limbo,  $x = 1'$ ; la 2 en  $2 x = 2'$ ; y así sucesivamente, la 10 en  $10 x = 10'$  de la graduación  $5^{\circ}$  del limbo, es evidente que si se desplaza el nonio de manera que estas dos últimas graduaciones coincidan, el cero del mismo se habrá alejado del cero del limbo  $10'$  hacia la derecha, luego para hacer la lectura es suficiente leer los grados y medios grados (en general la menor división) en el limbo y después buscar cual es la del nonio, la lectura de esta última será el número, en este caso de minutos, que hay que agregar a la lectura hecha en el limbo.

Considerando que la graduación 20 del nonio (fig. 41), coin-



Fig. 41.

cida con la 17 del limbo, como cada división del primero es  $\frac{d}{n}$  menor que las del segundo, los trazos  $a, b, c \dots$  se irán separando a la izquierda de las graduaciones del limbo  $\frac{d}{n}$ ,  $2 \frac{d}{n} \dots$  y las  $a, b', c' \dots$  se alejarán la misma cantidad respectivamente hacia la derecha; esto permite juzgar con exactitud la apreciación de la coincidencia de las graduaciones y buscarla rápidamente.

Si la distancia del cero del nonio a la graduación mas próxima del limbo no es un múltiplo exacto de  $\frac{1}{n}$ , ninguna graduación del nonio estará en coincidencia con la del limbo; se presentará la lectura como indica la figura 42 dos trazos  $a$  y

comprendidos dentro de una graduación  $AB$  del limbo y las sucesivas  $a'$ ,  $a''$ ... y  $b'$ ,  $b''$ ... alejándose más. Se considera como lectura definitiva el promedio de las dos.



Fig. 42.

**38. Observaciones sobre los nonios.** — Hemos dicho que, generalmente los instrumentos llevan dos nonios, cuyos ceros deben corresponder a los extremos de un diámetro; por lo tanto, las lecturas que se hagan con ellos deben diferir  $180^\circ$  ó  $200^\circ$ ; mas o menos una pequeña diferencia que depende de los errores del instrumento y lectura, diferencia que debe estar dentro de los límites tolerables que mas adelante estudiaremos.

Las lecturas de los nonios siempre se hacen con microscopios, que deben enfocarse cuidadosamente hasta ver con perfecta claridad las divisiones, y moviéndolos conjuntamente con el ojo en sentido de las graduaciones, mirando normalmente según el eje del microscopio; éste debe estar bien centrado sobre el trazo o trazos que aparezcan próximos a la coincidencia, pues una desviación lateral del ojo o del aparato amplificador puede ser causa de errores.

Los nonios deben estar bien iluminados pero no directamente porque producen reflejos que dificultan las lecturas.

No debe hacerse lecturas aisladas de cada uno de los nonios por distintos operadores, pues suele suceder con frecuencia que uno de ellos tenga tendencia a mirar más hacia la derecha o izquierda que el otro; es el error propio del operador llamado *ecuación personal*; por ser constante para cada uno, no tiene realmente importancia sobre los resultados obtenidos por el mismo observador, pero por ser variable de un observador a otro, hace que no sean utilizables ni comparables las lecturas verificadas por distintos individuos, en observaciones de precisión. En todo el giro de la alidada alrededor del centro del

limbo, no debe producirse huelgos entre los bordes circulares del limbo y nonios, que deben estar siempre en perfecto contacto, y la superficie de ambos deben estar exactamente en el mismo plano.

En algunos instrumentos el limbo es plano y los nonios están tallados en una superficie tronco-cónica, cuya base inferior, de igual radio que aquél, se adapta a su borde. Esta disposición es defectuosa; no se presta a enfocar los microscopios en buenas condiciones; si éstos están bien con respecto al limbo, normalmente a su superficie, no lo estarán con respecto al nonio.

**39. Microscopio micrométrico.** — Tiene por objeto reemplazar al nonio en las lecturas en que se precise obtener mayor precisión. Está constituido por un tornillo micrométrico y un microscopio. Al girar la cabeza del tornillo micrométrico, se desplaza un chasis que lleva fijo un hilo de araña; cada vuelta y fracción de vuelta puede ser medida por un tambor  $h$  con referencia a un índice. El hilo al desplazarse recorre un peine fijo; a cada diente del peine corresponde una vuelta del tornillo micrométrico, mas o menos.

Si consideramos un anteojo formado por la lente objetivo  $b$  y el ocular positivo o negativo  $a$  (fig. 43), apuntado sobre el limbo  $C$ , dos divisiones de éste  $d$  y  $d'$ , formarán su imagen en  $D$  y  $D'$ , sobre el chasis, cuando el hilo se traslade de  $D$  a  $D'$ , pasará de la superposición de una división del limbo a la superposición de otra y el número de vueltas y fracción de vueltas que haya dado el tambor corresponderá al valor de una división del limbo.

Si  $d \text{ } d' = 10'$  y el tambor está dividido en 60 partes iguales, si el hilo para recorrer  $d \text{ } d'$  necesita hacer una y media vuelta igual a 90 divisiones, una división del tambor tendrá por valor  $10' = 6''66$ .

En general se ajusta el micrómetro de manera que para cada vuelta entera del tornillo se desplace el hilo móvil una división exacta del limbo lo que se consigue variando la distancia entre el objetivo y el retículo, moviendo el tubo  $B$  porta objetivo dentro del tubo  $A$ . Es fácil darse cuenta en la figura anterior que cuanto más se acorte la distancia  $om$  mas chica es la dis-

tancia  $DD'$  que corresponde al valor invariable de  $dd'$  y al contrario si se alarga la distancia  $om$ ; luego variando esta se consigue que una vuelta del tornillo produzca en el hilo un desplazamiento igual a dos divisiones consecutivas del limbo.

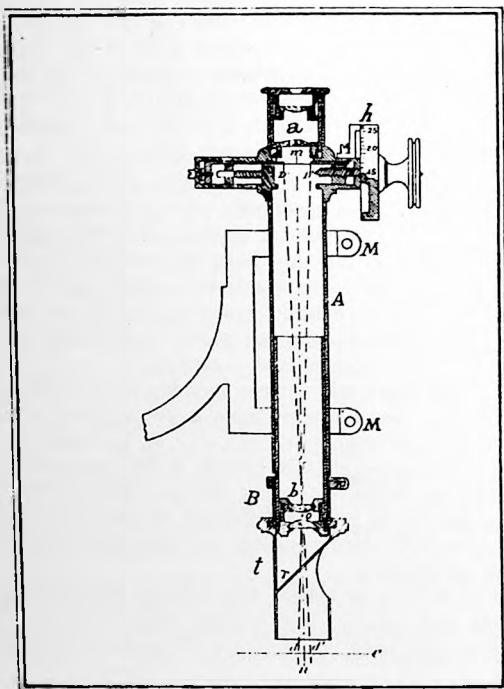


Fig. 43.

Llamando  $u$  el valor  $dd'$  de una división del limbo,  $s$  la distancia  $DD'$ ,  $L = om$  distancia del objetivo a los hilos del retículo y  $l = on$  distancia del objetivo al limbo y siendo la distancia focal de esta lente.

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \quad , \quad \frac{s}{L} = \frac{u}{l}$$

$$L = f + \frac{sf}{u} \quad , \quad l = f + \frac{uf}{s}$$

para otra posición del microscopio en la que se tenga  $L'$ ,  $l'$ ,  $s'$  y  $u'$

$$L' = f + \frac{s'f}{u'} \quad , \quad l' = f + \frac{u'f}{s'}$$

o

$$L - L' = \frac{L^2}{L+l} \left(1 - \frac{s'}{s}\right)$$

$$l - l' = \frac{l^2}{L+l} \left(1 - \frac{s'}{s}\right)$$

y

$$(L + l) - (L' + l') = (L - l) \left(1 - \frac{s'}{s}\right)$$

Suponiendo que el micrómetro perfectamente ajustado describe un ángulo de  $5'$  al desplazarse los hilos de D a D',  $s = 5'$  y que las distancias medidas sean  $L = 85$  mm. y  $l = 48$  mm. y que no estando ajustado el ángulo medido en el tambor  $s' = 5'9$

$$1 - \frac{s'}{s} = 1 - \frac{5.9}{5} = -0.030$$

$$L + l = 133 \text{ mm.} \quad L - l = 37 \text{ mm.}$$

luego

$$L - L' = -1.63 \text{ mm.} \quad l - l' = 0.52 \text{ mm.}$$

Como hay que llevar las partes del microscopio a la posición de ajuste, habrá que levantar el objetivo 0.52 mm. para que, aumentando  $l'$  sea igual a  $l$  moviendo todo el sistema y habrá que variar la distancia del objetivo al retículo acortándola 1.63 milímetros para que  $L'$  sea igual a  $L$ .

Para hacer esta operación: 1.º Se enfoca el limbo, de manera que sus divisiones se vean bien nítidas, para lo cual se aleja o acerca el anteojo en conjunto; 2.º se lleva mediante la cabeza del tornillo micrométrico, a coincidir el hilo móvil con una división del limbo; 3.º generalmente el tambor no quedará en cero, pero éste tiene un movimiento independiente del tornillo por el cual se le puede llevar a cero sin alterar la coincidencia del hilo móvil con la graduación del limbo; 4.º puesto

en cero el tambor se hace girar la cabeza del tornillo hasta que el hilo móvil cubra la otra graduación del limbo y se lee el número de divisiones que ha girado el tambor, puede presentarse dos casos: *a)* para recorrer la distancia de dos divisiones del limbo, el tambor ha tenido que dar más de una vuelta entera, se *acercas el objetivo al retículo*; *b)* el tambor ha dado menos de una vuelta, *aleja el objetivo del retículo*.

En ambos casos habrá que mover el conjunto hasta enfocar el limbo y ver con nitidez las divisiones del mismo después de haber modificado la distancia retículo objetivo.

En vez del hilo móvil, que debido al aumento del microscopio se ve muy grueso y sería difícil hacerlo coincidir con las divisiones del limbo se usan dos hilos delgados muy juntos y entre los dos se intercepta la división del limbo.

Los hilos móviles deben ser paralelos a las graduaciones del limbo, para lo cual al microscopio puede dársele un movimiento de rotación hasta conseguirlo.

La visual al limbo debe serle normal, para lo cual las lecturas se hacen cerca de la línea eje del anteojo del microscopio.

**40. Lecturas en los círculos goniométricos.**—El peine cuyos dientes marcan cada vuelta entera del tambor, tiene una entalladura que sirve de índice para las lecturas, como ese índice tiene una posición invariable con respecto a la alidada, los ángulos que él gire serán iguales a los girados por el anteojo, por lo tanto, hallando la lectura del limbo correspondiente a dos posiciones de ese índice, la diferencia de esas lecturas será el ángulo descrito por el anteojo.

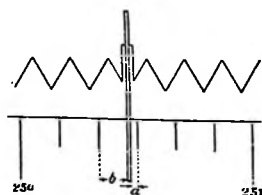


Fig. 44.

Para hacer la lectura que corresponde a la entalladura o índice, mirando por el microscopio, vemos las graduaciones que comprenden al índice, supuesto el limbo dividido de  $10'$  en  $10'$ , el índice está comprendido entre  $250^{\circ}20'$  y  $250^{\circ}30'$  (fig. 44), el tambor colocado en cero y los hilos sobre el índice, giramos el tornillo hasta que los hilos desplazándose la cantidad  $\alpha$  vaya a cubrir la división  $30'$ , el tambor girará  $n$  di-



visiones, su valor en minutos y segundos es lo que hay que restar a la lectura  $250^{\circ}50'$  para obtener la de la graduación ideal del limbo que coincide con el índice.

Si medimos la distancia  $b$ , a la graduación  $250^{\circ}20'$ , obtendremos lo que hay que sumar para obtener el mismo resultado.

Las lecturas deben hacerse siempre girando el tornillo micrométrico en el mismo sentido para evitar *tiempos perdidos* o sino hacer en todos los casos una lectura con tornillo entrante y otra con tornillo saliente, se toma el promedio como definitivo.

En los círculos goniométricos los microscopios están montados por pares como los nonios y es indispensable que las entalladuras índices estén sobre un mismo diámetro, para esto se coloca una de ellas sobre una graduación exacta de grados, si el índice del otro microscopio no está exactamente sobre la graduación que difiere  $180^{\circ}$  de la primera, se mueve el tornillo opuesto al micrómetro que desplaza al peine y se lleva a coincidir su índice con esa graduación.

El valor angular de una división del tambor debe determinarse antes y después de cada serie de observaciones y se llama hacer la *tara de los micrómetros*.

La (fig. 45) muestra la instalación de los microscopios micrométricos en los instrumentos.

En los extremos de una pieza  $a$  giratoria alrededor del eje  $E$  del instrumento y sobre el

cual va montado el limbo  $L.L.$ , se sujetan dos tubos  $b$  que en su parte superior llevan un microscopio y en la parte inferior, próximo a las graduaciones del limbo están abiertos.

El tubo  $b$  atraviesa una caja  $c$ , que contiene el bastidor o chasis del que antes hemos hablado.

**41. Práctica del ajuste de microscopios.** (Fig. 45). — Las operaciones del arreglo de los microscopios se hacen en el orden siguiente:

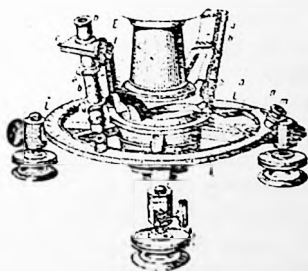


Fig. 45.

1. *Enfocar el retículo.*—El tubo *t*, cortado lateralmente y con un reflector perforado *r* inclinado  $45^\circ$ , se mueve hasta que la luz solar o de una lámpara ilumine bien las graduaciones del limbo y los hilos del retículo; al mismo tiempo se desplaza el ocular *a* hasta enfocar el retículo.

2. *Enfocar el limbo.*—Se giran los collares a rosca *MM* que sirven para desplazar todo el conjunto, alejando o acercando el objetivo al limbo, hasta que se vea bien nítidas y sin paralaje sus graduaciones, para comprobar esto último se moverá el ojo lateralmente y debe verificarse la inmovilidad relativa entre la imagen de las graduaciones y la del hilo del retículo.

A veces conviene más, desplazar un poco el ocular en vez de mover todo el sistema para anular el error de paralaje.

Simultáneamente con esta operación se pondrán los hilos del retículo paralelos a las graduaciones del limbo, girando el chasis hasta que ambos se superpongan en toda su extensión.

Algunos instrumentos en vez de los collares con rosca, tienen collares a presión; en este caso se aflojan los tornillos antes de hacer estas operaciones y terminadas se ajustan con cuidado.

3. *Ajustar el cero del microscopio.*—Se lleva a coincidir el hilo móvil con la entalladura del chasis, si el cero del tambor no coincide con la línea de fé del índice, se gira tirándolo hacia afuera, para que no accione por frotamiento sobre el eje, es decir, sin desplazar el hilo móvil.

4. *Ajuste de la corrida del hilo móvil.*—Para hacer que un número entero de vueltas o medias vueltas del tambor corresponda al desplazamiento del hilo móvil desde una a otra graduación del limbo, se hace coincidir aquel con una de éstas, se hace la lectura del tambor y luego se gira éste tantas vueltas como sean necesarias para que el hilo móvil se desplace una o mas graduaciones del limbo y se hace una nueva lectura del tambor, si el número de vueltas de éste no comprende un número exacto de medias vueltas se modifica convenientemente la distancia del objetivo al retículo haciendo que el tubo *B* entre o salga del tubo *A* (fig. 43). Si el tambor ha tenido que dar un número entero de vueltas *mas* cierta fracción se

acerca el objetivo al retículo y si ha tenido que girar en *menos* cierta posición, se aleja.

Hecha esta corrección debe enfocarse nuevamente el limbo (2).

**5. Ajuste diametral de los microscopios.**—Se pone el hilo de ambos microscopios en coincidencia con la entalladura, luego se lleva uno de ellos a coincidir con una graduación del limbo, el otro debe quedar en coincidencia con la graduación opuesta diametralmente. No verificándose esto se rectifica en posición desplazando el índice con el tornillo correspondiente, después de hecho esto se vuelve a ajustar el cero del tambor.

**42. Microscopio estimador.**—Es un microscopio común en cuyo diafragma se han colocado tres o mas hilos, en número impar, equidistantes entre sí y paralelos a las graduaciones del limbo. El hilo del medio es el índice para las lecturas.

Se emplea principalmente los instrumentos con graduación centesimal.

Se leen directamente las partes enteras de la graduación correspondiente a cada hilo, la fracción de cada división se estima a ojo en décimos de división. Las sumas de las lecturas dividida por el número de hilos da el valor definitivo.

En la figura (46) cada división del limbo es de 0°.2; las lecturas estimadas: 25°50, 26°03, 26°62. La lectura definitiva es 26°066.

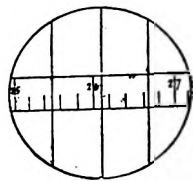


Fig. 46.

Si en la lectura de un solo hilo se comete un error  $\Sigma$ , el error medio de la lectura definitiva si  $n$  es el número de hilos será  $\frac{\Sigma}{n}$ .

**43. Límite de apreciación de los instrumentos.**—Vamos a determinar cual es la aproximación máxima que podemos exigir de los nonios y microscopios micrométricos, de acuerdo con sus características.

Admítese que un ojo normal y ejercitado en las observaciones de precisión, es capaz de apreciar directamente un ángulo de 1', límite que se llama agudeza o potencia de la vista y que indicaremos con  $\Sigma$ . Determinemos la aproximación con que

puede hacerse una lectura en un círculo de radio  $R$  (fig. 47), utilizando un microscopio de aumento  $A$ .

Llamemos  $f$  la longitud mínima perceptible sobre el limbo,  $f''$  el número de segundos que contiene,  $\delta$  la distancia mínima del ojo a la visión perfecta, y  $\varphi$  el ángulo mínimo apreciable; de la figura se deduce  $f = \delta \sin \varphi = \delta (\varphi \text{ en } 1'')$ , sabemos, que expresado en segundos  $f'' = \frac{f}{R \sin 1''}$ , sustituyendo y teniendo en cuenta que  $\varphi = \frac{\Sigma}{A}$

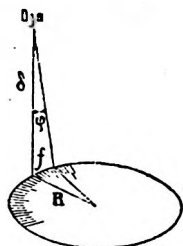


Fig. 47.

Si  $\delta = 200 \text{ mm.}$  y  $\Sigma = 1' = 60''$ .

$$f'' = \frac{200 \times 60}{R A}$$

si consideramos un instrumento en que  $R = 200 \text{ mm.}$

$$f'' = \frac{60''}{A}$$

para obtener la aproximación  $f'' = 10''$  los microscopios deberán tener un aumento  $A = 6$  veces.

En los instrumentos portátiles, siendo imposible dar a los limbos grandes diámetros, no se consigue gran precisión en las lecturas, pues como vemos ellas dependen exclusivamente de  $R$  y  $A$  por lo cual es inútil usar nonios o micrómetros contruidos para una aproximación superior al  $f''$  deducido de las fórmulas.

Las graduaciones de los limbos difieren según el objeto a que se destina el instrumento, en general se tienen las siguientes relaciones:

#### Lecturas con Nonios

Diámetro en Cm del limbo	División menor del limbo	Ampliación del microscopio	Aproximación
8 a 12	30'	10	1'
15 a 18	20'	"	50''
20 a 25	10'	"	10''

**Lecturas con microscopios micrométricos**

Diámetro en Cm del limbo	División menor del limbo	Ampliación del microscopio	División del tambor	Aproxi- mación
15 a 20	10'	20 a 30	120	5"
	5'		60	5"
20 a 26	2'	30 a 35	60	2"
	1'		30	2"
	1'		120	2"
	4'			

El valor de un 1', para la potencia o agudeza de la vista es un valor medio.

Un objeto convenientemente iluminado puede verse bajo un ángulo de 50" y aun menos si se proyecta sobre un fondo obscuro, mientras que un objeto obscuro sobre fondo claro puede necesitar un ángulo de 2'.

Helmholtz en su Optica fisiológica dá para la potencia de la vista 51"6 a 147"5; Ferráris 1'; Jadanza en base a sus experiencias le asigna un valor de 20"; Borletti 30" a 32" y el ingeniero Salmoiraghi le dá un valor medio de 90".

**44. Error medio de una lectura de nonios.**—Se adopta como error medio de una lectura de nonios,  $\mu_1$ , la mitad de la apreciación  $f''$  del mismo.

La lectura de un solo nonio tendrá la aproximación

$$\mu_1 = \pm \frac{f''}{2} \quad \text{y con los dos nonios} \quad \mu_1 = \pm \frac{f''}{2 \cdot 2}$$

El cuadro siguiente reúne los resultados para las aproximaciones más usadas.

APROXIMACIÓN DEL NONIO	ERROR DE LECTURA	
	1 nonio	2 nonios
60"	$\pm 30''$	$\pm 21''2$
30	15	10.6
20	10	7.1
15	7.5	5.2
10	5	3.5
5	2.5	1.7
2	1	0.7

**45. Causas de errores en las lecturas.**— Los instrumentos goniométricos, por defectos de construcción, dan en general al usarlos, origen a errores que obedecen a las siguientes causas:

- 1) Error de excentricidad.
- 2) Error en la colocación de los índices.
- 3) Defectuosa graduación del limbo y de los nonios.
- 4) Causas que afectan la buena colimación.
- 5) Errores provenientes de desgastes en los órganos de los instrumentos.

**46. Error de excentricidad.**— Sea O el centro de las divisiones del limbo (fig. 48), R el centro de rotación de la alidada

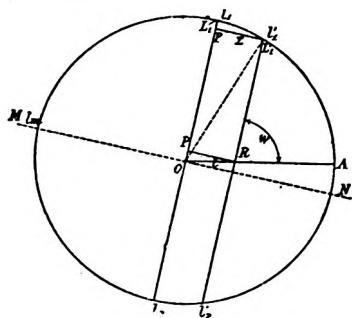


Fig. 48.

que colocada en la dirección  $R L'$ , da la lectura  $l'$  del limbo y forma el ángulo  $L' R A = w$  con el radio  $OR$  que une los dos centros. Si la alidada estuviese centrada en O, tendría una posición paralela  $OL$  a la que corresponde la lectura  $l$  del limbo; el error angular de la visual es  $L'OL$ , medido por el arco igual a la diferencia de las dos lecturas,  $\epsilon = l - l'$ .

Por su pequeño valor,  $\epsilon = l - l'$ , podemos sin error sensible considerarlo igual a la perpendicular trazada sobre  $OL$  desde  $L'$ .

$$\epsilon = l - l' = L'P = RP = e \operatorname{sen} w \quad (1)$$

Para  $w = 0^\circ$  y  $180^\circ$ , la alidada está sobre el diámetro que

une los dos centros,  $\varepsilon = 0$  y para  $w = 90^\circ$  y  $270^\circ$ ;  $\varepsilon = \pm e$ , su valor máximo.

Un índice en la alidada diametralmente opuesto al que nos dió la lectura  $l_1$  nos dá la lectura en el limbo  $l_2$ , análogamente, tenemos por (1).

$$(2) \quad \varepsilon' = l_2 - l_1 = e \sin(w + 180) = -e \sin w$$

de (1) y (2), deducimos

$$\frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{l'_1 + l'_2}{2}$$

Por consiguiente el promedio de las lecturas erróneas  $l'_1$  y  $l'_2$  es igual al promedio de las lecturas exactas  $l_1$  y  $l_2$ ; en esta forma se elimina el error de excentricidad poniendo dos índices diametralmente opuestos.

De las fórmulas (1) y (2) se deduce

$$(l_2 - l_1) - (l'_2 - l'_1) = -2e \sin w, \text{ siendo } l_2 - l_1 = 180^\circ$$

$$180^\circ - (l'_2 - l'_1) = -2e \sin w.$$

Luego el suplemento a  $180^\circ$  de la diferencia de las lecturas hechas en los índices es igual al doble del error.

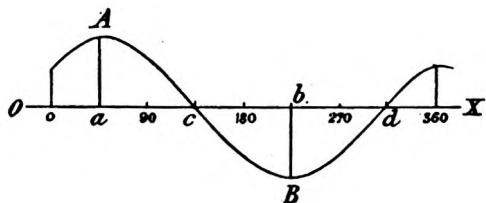


Fig. 49.

Sobre un eje OX tomemos en escala los valores de la división del limbo y como ordenadas el valor del doble del error, la curva AB debe ser una sinusoide simétrica con respecto a OX.

El valor de la excentricidad  $e = \frac{1}{2} Aa = \frac{1}{2} Bb$ , ordenada máxima, el error es nulo para las graduaciones  $c$  y  $d$ , donde los índices están sobre el diámetro que une los centros de

limbo y de la alidada, la posición  $c$  y  $d$  debe diferir  $90^\circ$  de  $a$  y  $b$ .

**47. Error por la colocación de los índices.**— En lo anterior hemos supuesto que la recta que une los índices de ambos nonios, pasa exactamente por el centro de rotación  $R$  de la alidada. Cuando así no sucede, el índice  $l_2$  (fig. 50), tendrá la posición  $l_3$ , siendo el error debido a esta causa  $l_2 l_3$ , igual al arco del limbo  $\delta$  sin diferencia sensible, suponiendo que haya error de excentricidad.

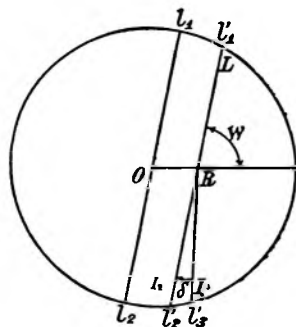


Fig. 50.

Tendremos como anteriormente

$$l_1 = l'_1 + e \operatorname{sen} w$$

$$l_2 = l'_2 - e \operatorname{sen} w$$

$$l_2 = l'_3 - \delta - e \operatorname{sen} w$$

teniendo en cuenta que

$$l_2 - l_1 = 180^\circ$$

$$180^\circ - (l'_3 - l'_1) = -\delta - 2e \operatorname{sen} w$$

La curva de los errores como en el caso anterior es una senoide, pero el eje  $OX$  no es simétrico, (fig. 51) sino que

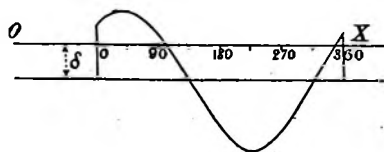


Fig. 51.

está desplazado paralelamente una cantidad  $\delta$  que ha afectado igualmente a todas las ordenadas.

**48. Defectuosa graduación del limbo y nonios.**— Los errores ocasionados por desigualdad en las divisiones de la graduación de los limbos, son pocos comunes, dados los elementos con que cuenta el arte mecánico y el especial esmero que



los fabricantes dedican a su verificación; la influencia con que este defecto, siendo pequeño, pudiera afectar una medida, se elimina adoptando métodos especiales de observación llamados de repetición y reiteración que veremos más adelante.

Para asegurarse que todas las graduaciones del limbo son iguales, se coloca el cero del nonio en exacta coincidencia con una graduación del limbo, debiendo quedar la última graduación del nonio en exacta coincidencia con otra del limbo; se hace correr el cero del nonio una graduación del limbo y la última graduación del primero deberá correr exactamente una división de último. Esta verificación se repite para distintos sectores del limbo y está basada en que  $n$  divisiones del nonio corresponde exactamente a la longitud de arco de  $n - 1$  divisiones del limbo.

En los instrumentos provistos de micrómetros, una vez arreglado este para que una vuelta del tambor comprenda una división del limbo, debe verificarse en cualquier sector la misma condición.

Para comprobar las divisiones del nonio, se hace coincidir una de las divisiones centrales del mismo con una de las del limbo, las graduaciones laterales inmediatas deben separarse igualmente de las del nonio.

**49. Resumen de las comprobaciones de los limbos.**— Para comprobar un limbo graduado hacemos la lectura  $I_1$  del índice  $I_1$ , y la  $I_2$  del  $I_2$  y con  $180 - (I_2 - I_1)$  como ordenada y  $I_1$  como abscisa, trazamos la curva de los errores.

1) Si es una senoide simétrica respecto al eje  $OX$ , hay error de excentricidad.

2) Si es una recta paralela, hay sólo error en la colocación de los índices.

3) Si es una senoide disimétrica respecto a  $OX$ , hay error de excentricidad y de colocación de índices.

4) Si el error varía sin seguir una de las leyes anteriores hay error en la graduación de los círculos.

Es suficiente determinar la curva de los errores con 8 lecturas equidistantes. Más adelante veremos que para medir un ángulo se hacen varias lecturas en distintos sectores del limbo, si en todos los casos deducimos de esas lecturas la curva de

los errores, siempre deberá ser la misma; la divergencia nos probará que las lecturas no han sido bien hechas.

**50. Causas que afectan la buena colimación.**—Visar o colimar un punto o señal, es hacer coincidir el centro del retículo del anteojo con el centro de la señal. Las siguientes causas dan motivo a errores de colimación; falta de nitidez de las imágenes que se forman, excesivo espesor de los hilos del retículo que no permiten dividir en dos partes al objeto visado, lo que constituye el *error de puntería* y la no coincidencia del centro del retículo con el eje óptico del anteojo.

La nitidez depende de la buena calidad de las lentes; los hilos del retículo ya hemos indicado su construcción para que no produzcan errores, en cuanto a la no coincidencia del centro del retículo y el eje óptico, al tratar la corrección de los instrumentos veremos los métodos que se aplican para conseguirlo.

A los anteojos debe dársele una amplificación conveniente, que es proporcional al valor  $f''$  de la aproximación de la lectura en los limbos, sean con nonios o micrómetros.

Si se supone que la línea de mira de un anteojo se desplaza un ángulo  $f''$  igual a la aproximación del limbo (43), en un plano paralelo a el mismo, la variación angular observada en el campo del anteojo si su amplificación, es  $A$ , no será  $f''$  sino  $f'' A$  y para que ésta sea sensible al ojo, deberá ser  $f'' A = \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es la potencia de la vista igual a  $60''$ . De aquí se deduce que la amplificación que debe tener un anteojo para un valor  $f''$  de la aproximación en las lecturas, es

$$A = \frac{60''}{f''}$$

Para  $f''$  igual a  $2''$ ,  $5''$ ,  $10''$  y  $20''$ ; será suficiente que el anteojo amplifique 30, 12, 6 y 3 veces respectivamente. Sería inútil disponer de limbos que den gran aproximación si el instrumento no tiene el anteojo que le corresponde a aquella.

En general no se dota a los teodolitos con anteojos de menos de 15 diámetros para no limitar con exceso su alcance, y tampoco aún en los más perfeccionados conviene llegar a grandes amplificaciones, pues no tratándose de hacer lecturas en miras.

colocadas a corta distancia, sino de ver señales para precisar bien la puntería a distancias que pueden ser muy grandes, más interesante que el aumento de tamaño de las imágenes es la claridad de ellas, que sabemos está en razón inversa a la amplificación

**51. Error de puntería.**—Además de las causas ya indicadas de este error, también depende de la agudeza de la vista y la amplificación del anteojo.

Si  $e$  es el error de puntería a ojo desnudo, el error correspondiente sirviéndose de un anteojo de aumento  $A$  supuesto que la claridad de las imágenes se mantenga siempre la misma tendrá el valor

$$\mu_p = \frac{e}{A}$$

Las experiencias del Ing. Salmoiraghi, admitiendo sea  $90''$  la agudeza de la vista, dá valores para  $e$  comprendidos entre  $e = 90''$  y  $e = 120''$ . Pasini por experiencias hechas con anteojos de distintos aumentos dá  $e = 80'$  como valor medio.

El Ing. Noetzli discutiendo los valores de: Stampfer,  $e = 10''$ ; Hammer  $e = 60''$  a  $40''$ ; Vogler,  $e = 50''$ ; Hartner-Dolezal,  $e = 30''$ ; encontró la siguiente fórmula

$$\mu_p = \frac{4''}{A} \quad \text{hasta} \quad \frac{3''}{A} \quad \text{según la habilidad del operador.}$$

Es decir: *el error de puntería es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del aumento del anteojo.*

La tabla siguiente dá los valores de  $\mu_p$  que adoptaremos en cálculos posteriores de acuerdo con el primer valor  $\frac{4''}{A}$

A	$\mu_p$	A	$\mu_p$
1	4"	30	0"7
10	1"3	35	0"6
15	1.0	50	0"5
20	0.9	65	0"5
25	0.8		

**52. Errores provenientes de desgastes en los instrumentos.**

—Aún al salir los instrumentos de manos del constructor se notan ciertas imperfecciones; juego en los ejes, mal ajuste de los tornillos, etc., defectos que aumentan con el uso del instrumento, dando origen a errores imposibles de determinar. Para reducirlos a un mínimo, se emplean métodos especiales de observación.

---

## CAPITULO V

### TEODOLITOS

**53. Generalidades.** — Llámense teodolitos los instrumentos que pueden utilizarse tanto en la medida de ángulos azimutales como verticales, los elementos principales que los constituyen ya los hemos visto en detalle, son: plataforma con tornillos nivelantes; alidada azimutal y zenital, teniendo ambos el mismo anteojo; limbos, azimutal y zenital, sistema de tornillos de presión y coincidencia; nonios o microscopios micrométricos. Entre todos los instrumentos destinados a medir ángulos debe dársele el nombre de teodolitos a aquellos que garantizan la medida de los ángulos con una aproximación de  $1'$  sexagesimal por lo menos.

Considerándolos en uno de sus aspectos podemos dividirlos en *centrales* y *excéntricos*, según que la proyección del anteojo pase o no por el centro del limbo. Desde otro punto de vista se dividen en *repetidores* y *reiteradores*, la razón de esta división la veremos oportunamente.

**54. Conformación geométrica del teodolito** (figura 52) —

La línea de mira  $vv$  determinada por el anteojo, gira alrededor del eje horizontal  $dd$ , al cual es normal: el plano descripto por  $vv$  es por lo tanto normal al eje  $dd$  y los ángulos en este plano se miden sobre un círculo graduado vertical  $zz$ , mediante un índice  $ii$ .

El eje  $dd$  puede girar alrededor del eje vertical  $aa$ , lo que permite hacer coincidir el plano de mira con un plano vertical cualquiera del punto de estación; los desplazamientos se miden sobre un círculo horizontal graduado  $hh$ , mediante los índices  $II$ .

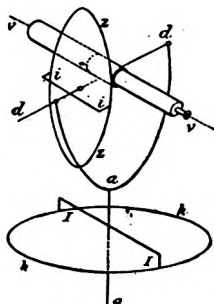


Fig. 52.

**55. Descripción general. — Teodolito central.** — Se compone de un círculo graduado horizontal H (figura 55), llamado horizontal, sostenido por una plataforma de tres o cuatro tornillos nivelantes  $t, t', t''$ ; sobre el círculo H descansa otro H' llamado círculo alidada que tiene su eje de rotación común

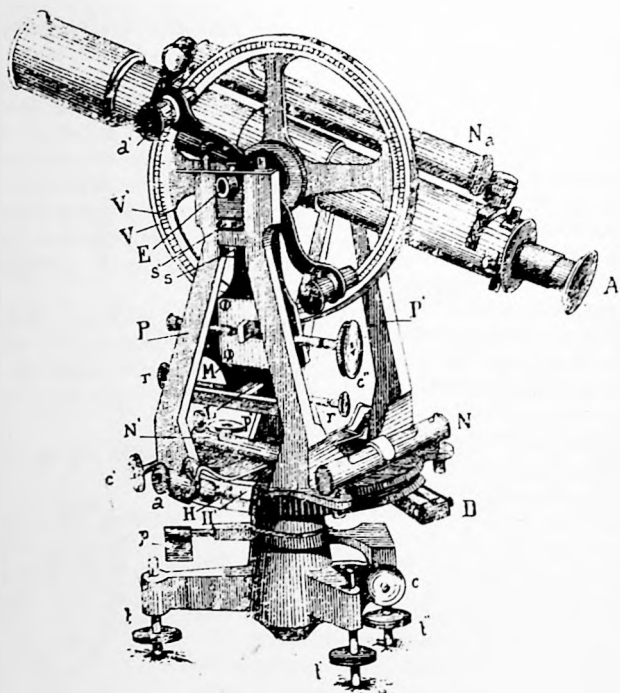


Fig. 55.

con el anterior. El círculo H' mantiene dos pilares P y P' y dos niveles N y N', colocados con sus ejes perpendiculares.

Los pilares en sus extremos superiores tienen los aloja-

mientos correspondientes para recibir los muñones del eje E, sobre el cual están instalados el anteojo A y el círculo vertical V, de manera que el plano vertical que pasa por el eje de figura del anteojo A, pase por el centro del círculo azimutal H.

Las lecturas azimutales se hacen en el limbo colocado en el círculo H, mediante un nonio colocado en el círculo alidada H', para facilitar la operación lleva los microscopios *a*.

Las lecturas verticales se hacen en el círculo V, mediante los nonios V' y los microscopios *a'*. El círculo vertical V lleva un apéndice M, el cual por medio de tornillos *r r*, es fijado a un tope L, instalado en la cara interna de ambos pilares P y P'.

Los tornillos *p, p', p''* son llamados de presión y las *c, c', c''* de coincidencia.

El círculo azimutal H puede ser fijo o móvil, designándose los instrumentos en este último caso con el nombre de repetidores, la (fig. 53) muestra un teodolito repetidor, aflojando el tornillo de presión *p*, el círculo H puede girar sobre el eje vertical.

Se llama *eje principal* al eje vertical del instrumento; *eje secundario* al eje de rotación del anteojo. Diremos que las observaciones se han efectuado con *anteojo a la derecha* cuando éste se halla a la derecha del círculo vertical para un operador dispuesto á la observación, y *anteojo a la izquierda*, cuando se halle a ese lado; la figura muestra la posición anteojo a la derecha.

**56. Teodolito reiterador central.** -- En la (figura 54) se observa que falta el tornillo de presión que desinmovilizando el círculo azimutal permita darle un movimiento de rotación.

Los tornillos y piezas semejantemente colocadas a las del teodolito anterior, ya descrito, tienen la misma función.

La graduación de los círculos está cubierta por un disco de cobre A, el que tiene dos ventanas M donde están los nonios, disposición cuyo objeto es preservar las divisiones del polvo y la humedad.

El pie sobre el cual está montado pertenece al sistema de

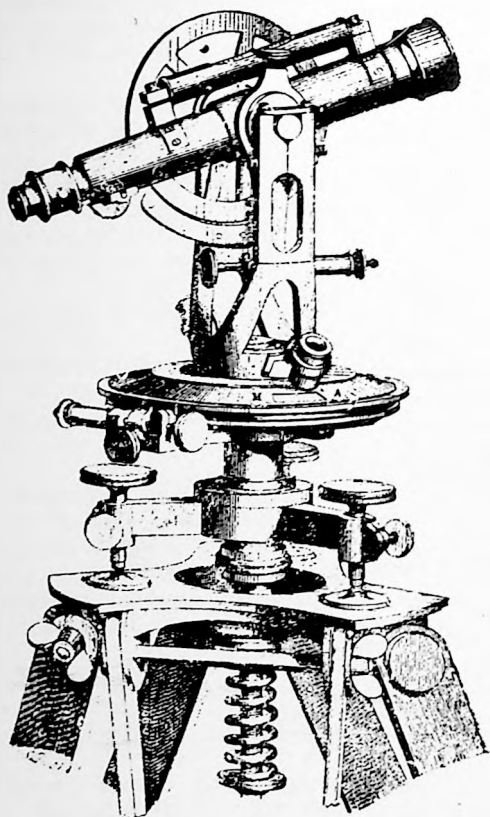


Fig. 54.



plataforma movable, lo que permite una exacta centración del instrumento sobre el centro de estación. El detalle de la fijación del instrumento al pie se ve en la (figura 55), tiene

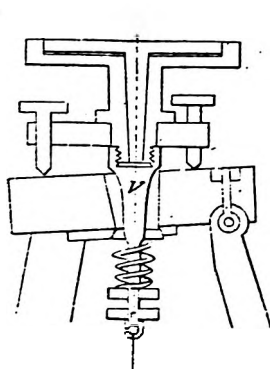


Fig. 55.

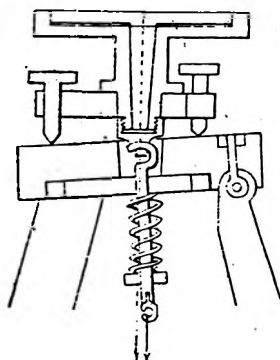


Fig. 56.

la ventaja que la plomada está en prolongación del eje principal sobre el otro sistema de unión también muy común (fig. 56) en que esto no sucede.

Estos teodolitos suelen construirse con las siguientes características:

Diámetro del círculo	Abertura del objetivo	Ampliación del antejo	División del limbo	Aprox. de los nonios
12 cm	20 mm	18 veces	30'	1'
15 >	27 >	22 >	20'	30"
18 >	34 >	27 >	20'	30"

**57. Teodolito repetidor con nivel a caballete.**— La unión del instrumento con el pie está hecha en la forma descripta para el teodolito anterior. En la figura se observa el tornillo de presión P que desinmoviliza al círculo del limbo y el nivel a caballete N montado sobre el eje del antejo, (figura 57).

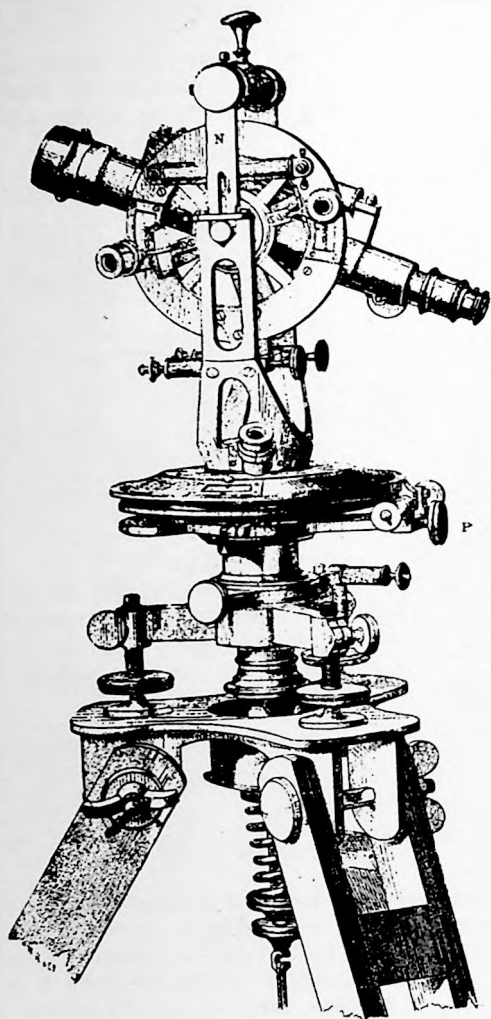


Fig. 57.

Las características con que suelen construirse son las siguientes:

Diámetro del círculo horizontal	Abertura del objetivo	Diámetro del círculo vertical	Amplificación de antejo
12 cm.	20 mm.	10 cm.	18 veces
15 »	27 »	12 »	22 »
18 »	34 »	14 »	30 »
21 »	36 »	18 »	34 »
25 »	40 »	18 »	40 »

Los teodolitos con diámetros de 20 a 25 cm. se emplean en triangulaciones de 2.º y 3.º orden.

**58. Teodolito reiterador con nivel móvil y microscopios micrométricos en el círculo horizontal.**—Las lecturas en el círculo horizontal se hacen por medio de microscopios micrométricos A que reemplazan con ventaja a los nonios. El soporte del antejo sostiene los microscopios; el limbo está cubierto, habiendo dos aberturas para hacer las lecturas. Está provisto de nivel a caballete y de un nivel N montado sobre los nonios del círculo vertical para poder poner la línea de los ceros de los nonios horizontalmente, mediante el tornillo de aproximación T (fig. 58).

Según el tamaño se emplean estos teodolitos en triangulaciones de 1.º a 5.º orden.

Las características de los diversos modelos son las siguientes:

Círculo horizontal diámetro. . . . .	15 — 17.5 — 21 — 25 — 30 — cm
Valor de una división del limbo. . . . .	10' — 10' — 5' — 5' — 5'
Número de vueltas del tornillo micrométrico que corresponde a una división. . . . .	2 — 2 — 1 — 2.5 — 2.5
Número de divisiones del tambor. . . . .	30 — 60 — 150 — 120 — 120
Valor de una división del tambor. . . . .	10" — 5" — 2" — 1" — 1"
Círculo vertical, diámetro. . . . .	12 — 14 — 17 — 18 — 18 cm.
Abertura del objetivo del antejo. . . . .	27 — 34 — 36 — 40 — 47 mm.
Aumento del antejo. . . . .	21 — 30 — 36 — 40 — 55.

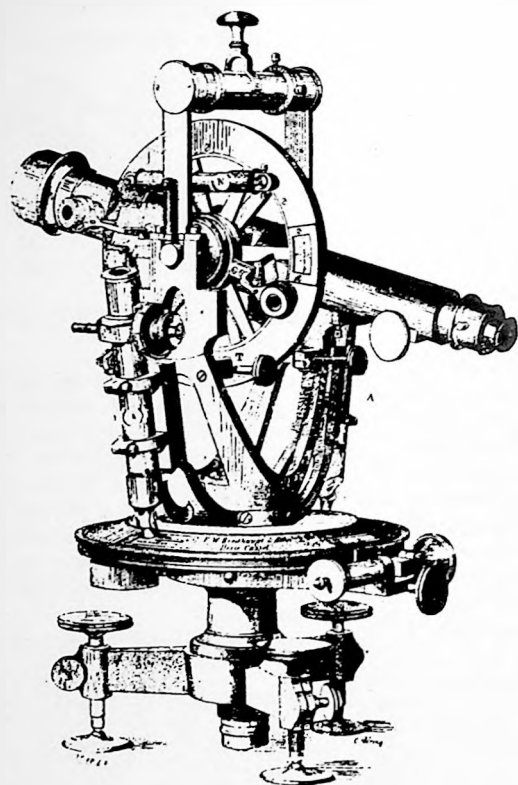


Fig. 58.

59. Teodolito excéntrico (figuras 59 y 60). — Los círculos alidades  $H'$  y  $V'$ , están instalados concéntricamente a los círculos graduados  $H$  y  $V$ ; sobre el círculo  $H'$  se eleva un pilar  $O$ , que en su extremidad superior lleva la caja circular  $D$ , la que tiene una sección donde se une a charnela una plancha metálica que en su parte superior soporta al

eje EE, al cual van asegurados el círculo V y la alidada V' con su anteojo A, cuyo eje óptico es paralelo al plano del

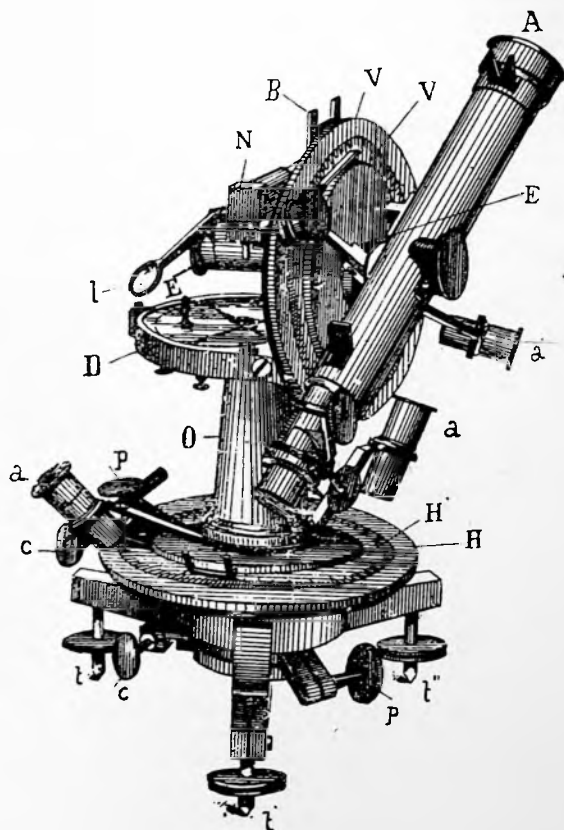


Fig. 59.

círculo V; el nivel a caballete N a (figura 60) es el que sirve para rectificar el instrumento. El nivel N montado sobre el

circulo vertical, que sirve para control de la rectificación mientras se observa, en que no se puede tener montado el  $N a$ , se llama *nivel de espia*.

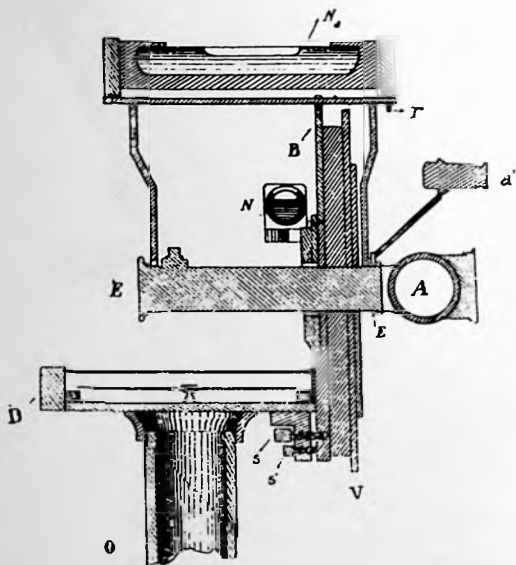


Fig. 60.

En el interior de la caja D, se ha instalado una pequeña brújula que permite determinar el azimut magnético de una dirección cualquiera. Los teodolitos de precisión no llevan esta declinatoria.

## CAPITULO VI.

### Rectificación del teodolito

**60. Condiciones que debe llenar un teodolito.**—El ángulo necesario en las medidas topográficas es el ángulo plano horizontal  $a m b$ . (fig. 61) medida del ángulo diedro formado por los planos verticales  $Z A Z'$  y  $Z B Z'$  que pasan respectivamente por los puntos A y B.  $Z Z'$  vertical del observador, es la arista del ángulo y debe coincidir con el eje principal del teodolito; y para que el anteojo en cualquier posición, cuando se le hace girar alrededor de su eje, se mantenga en uno de los planos verticales, es necesario que se llenen las siguientes condiciones:

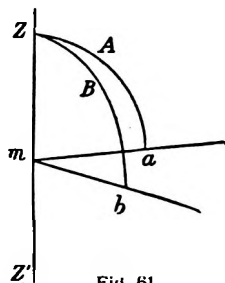


Fig. 61.

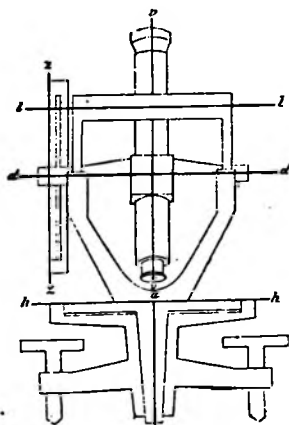


Fig. 62.

Los ejes geométricos de la columna vertical de la alidada  $a a$  y el eje  $d d$  del anteojo (fig. 62) deben cortarse en un punto. Lo mismo debe suceder entre  $d d$  y el eje óptico  $v v$ .

Los ejes geométricos de los círculos horizontal y vertical deben coincidir con los ejes de las alidadas  $aa$  y  $dd$ ; los planos  $hh$  y  $zz$  deben ser perpendiculares respectivamente a esos ejes.

El eje del nivel  $ll$  debe ser perpendicular a  $aa$  y paralelo a  $dd$ .

Dividimos los teodolitos en dos clases con objeto de estudiar su rectificación. A) los que no disponen de nivel a caballete. B) los que tienen nivel a caballete. Algunas operaciones son comunes y en otras se modifica el orden en que deben hacerse. Es recomendable el uso del nivel a caballete y todos los instrumentos buenos lo tienen.

**61. Rectificación con nivel fijo.**—En general el nivel está fijo en el círculo horizontal o vertical; la característica es que el nivel no puede cambiar de posición con respecto a los demás órganos del instrumento, es completamente fijo sin otro movimiento que el que permite hacer la rectificación del tubo nivel en su alojamiento.

Las operaciones se hacen en el orden siguiente:

- 1) Poner el eje principal vertical.
- 2) Poner el eje óptico perpendicular al secundario.
- 3) Poner el eje secundario perpendicular al principal.
- 4) Poner un hilo del retículo vertical.

1) Poner el eje principal vertical. Esta operación se efectúa con el nivel N (fig. 53), de acuerdo con lo expuesto al tratar la nivelación de una plataforma (nº 13). Se repite hasta tener la seguridad que en dos direcciones perpendiculares entre sí la burbuja queda centrada.

Se procede después a rectificar  $a$ ). La perpendicularidad del eje al círculo alidada  $H'$  (fig. 53).  $b$ ). La perpendicularidad del eje al círculo inferior  $H$  (fig. 53).

$a$ ) Se aprieta el tornillo de presión  $P'$  y afloja el tornillo  $p$  (fig. 53) del movimiento general, se coloca el nivel que ya está rectificado, según dos tornillos nivelantes, y se centra la burbuja; se lleva el nivel a la dirección perpendicular del tercer tornillo, y moviendo éste se centra la burbuja; se aprieta el tornillo  $p$  y afloja el  $P'$  del movimiento particular del círculo alidada  $H'$ , se le hace girar lentamente debiendo mantenerse





rectificado es paralelo a  $H' H'$  y está colocado en la dirección de dos tornillos de la plataforma  $V V'$ , la burbuja centrada.

Apretando  $p$  y aflojando  $P$ , al hacer girar  $180^\circ$  a  $H' H'$  el nivel tomará la inclinación  $H' H''$ ; el desplazamiento de la burbuja es igual al doble del ángulo que forma la línea  $H' H'$  con la perpendicular al eje de rotación  $Z Z'$ .

La (fig. 64) representa el caso en que el círculo alidada  $H' H'$

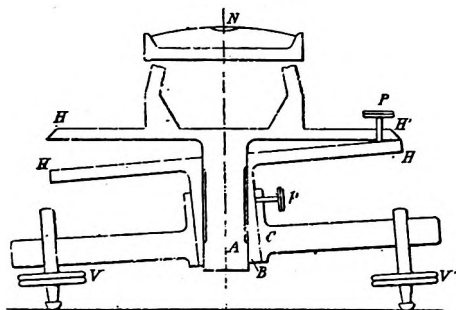


Fig. 64.

es perpendicular a su eje, pero el eje de rotación  $B$  del círculo inferior  $H H$  no es paralelo al eje  $A$ . Con el tornillo  $p$  apretado y el  $P$  flojo, después de centrar la burbuja, si hacemos girar el círculo  $H' H'$ , la burbuja no se desplazará, lo que nos comprueba la perpendicularidad del plano de  $H' H'$  y su eje de rotación. Pero si apretamos  $P$  y aflojamos  $p$  haciendo girar el conjunto con el movimiento general sobre el eje  $B$ , después de girar  $180^\circ$ , tendremos el nivel en la posición de la (fig. 65), la burbuja se habrá desplazado, lo que nos prueba que  $A$  y  $B$  no son ejes concéntricos. En la (fig. 66) se tienen ambos ejes concéntricos y que los planos de los círculos  $H'$  y  $H$  le son perpendiculares, centrada la burbuja, sea que movamos el círculo alidada  $H' H'$  solamente o el conjunto  $H' H'$  y  $H H$ , la burbuja se mantiene centrada; no tiene importancia que el eje  $B$  no sea perpendicular a la plataforma de los tornillos.

2) Poner el eje óptico perpendicular al secundario.

Cuando el eje óptico del anteojo no es perpendicular a su eje de rotación, al girar describe un cono en vez de un plano.

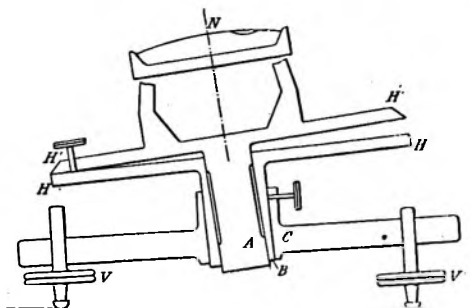


Fig. 65.

Para corregir este error llamado de *ecimación*, se visa un objeto bien nítido y lejano, haciendo con exactitud la corres-

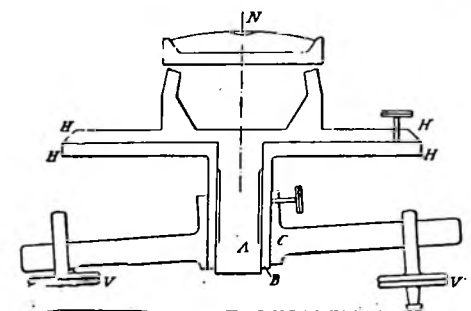


Fig. 66.

pondiente lectura azimutal  $a_1$ . Gírese el instrumento  $180^\circ$  (fig. 67) alrededor de su eje principal y luego alrededor de su eje secundario, hasta que el anteojo quede apuntado nuevamente en la dirección del punto elegido A, B. Si el centro del re-

tículo cubre exactamente ese punto como en la primera visual, el eje óptico será perpendicular al secundario; en caso

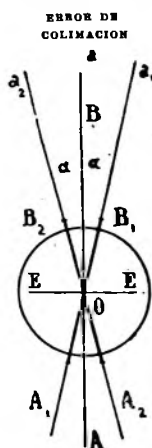


Fig. 67.

que esto no suceda, el ángulo azimutal que sería necesario desplazar el anteojo para llevarlo a la exacta colimación, mide el doble del error  $\alpha$ , que se anulará corrigiendo la mitad de ese ángulo por el tornillo de coincidencia y la otra mitad por los tornillos del retículo.

En los teodolitos que puede invertirse la posición de los muñones del eje secundario, se obtiene la inversión del anteojo levantándolo y haciendo que el muñón E (fig. 53) que apoya sobre P pase a apoyarse sobre P'; se evita el giro de  $180^\circ$  del círculo horizontal.

En los teodolitos excéntricos esta corrección puede hacerse como para los teodolitos centrales, siempre que se disponga de un punto muy lejano como referencia; en los instrumentos cuya excentricidad del anteojo es 10 cm., el error de paralaje es de  $1''$  para un punto situado a 22 km. y por lo tanto para que después del giro las dos lecturas no difieran en más de  $1''$ , es necesario que el punto visado esté a mas de 44 km.

En general no se dispone de puntos en estas condiciones que se puedan visar con exactitud y se procede como sigue:

Establézcase a distancia conveniente, 20 a 30 ms., (fig. 68) un tablero donde se han marcado dos líneas verticales a una distancia igual al doble de la excentricidad del anteojo; visese la línea  $m$  con el anteojo a la derecha y sea  $a$  la lectura correspondiente en el nonio I, coloquese el anteojo a la izquierda y de modo que la lectura en el mismo nonio sea  $a + 180$  si no existe error de colimación, el centro del retículo cubrirá exactamente la línea de la izquierda  $m_1$ . En caso contrario se es-

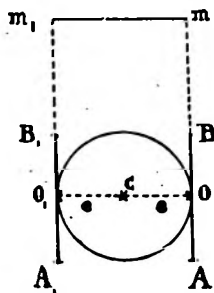


Fig. 68.

tablece la coincidencia corrigiendo la mitad de la divergencia con el tornillo de aproximación y la otra mitad con los tornillos del retículo.

3) Poner el eje secundario perpendicular al principal. Hasta ahora hemos puesto el eje principal vertical y el eje óptico perpendicular al secundario, si éste no está horizontal, perpendicular al eje principal, el plano descrito por el anteojo que es perpendicular a su eje de rotación, tendrá la misma inclinación que este último respecto a la vertical.

Para que un plano sea vertical, basta que contenga una recta que cumpla esa condición. Esta recta puede ser la arista de un edificio o una plomada larga resguardada del viento y cuyo peso esté inmerso en el agua para eliminar las oscilaciones. Se fija el anteojo de manera que el punto más alto de la arista quede cubierto por el cruce del retículo; fijado el instrumento de manera que no pueda girar el círculo horizontal, se mueve el anteojo de arriba hacia abajo hasta llegar a un punto inferior de la arista vertical; si queda exactamente cubierto por el centro del retículo, el plano descrito por el eje óptico será vertical y si eso no sucede se mueve el tornillo  $s'$  (fig. 53) y  $s$  que modifica la posición del eje secundario con respecto al principal, hasta que el plano descrito por el eje óptico en su rotación alrededor del eje secundario contenga siempre la vertical elegida.

El sistema de cojinete móvil indicado en la (fig. 53) es el de rueda de cabilla; existen otros (fig. 69), donde apretando uno de los tornillos  $u$  y aflojando el otro se desplaza la posición del eje del anteojo, igualmente (fig. 70) aflojando uno de los tornillos  $e$  y apretando el correspondiente  $e'$ .

4) Poner el hilo del retículo vertical. Es útil poder bisectar una señal con un punto cualquiera del hilo vertical del retículo, para esto es necesario verificar que este hilo también sea perpendicular al eje de rotación, es suficiente para llenar esta condición, llevar un punto de hilo sobre una señal bien nítida y mover el anteojo lentamente, el punto elegido debe mantenerse siempre sobre el hilo sin desplazarse a los costados, si esto no sucede se hace girar el retículo hasta que se verifique. Utilizando una plomada o arista vertical, se lleva directamente el

hilo vertical del retículo a coincidir con ella. El otro hilo debe quedar horizontal por construcción.

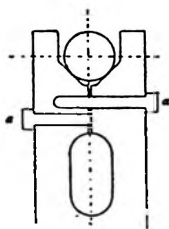


Fig. 69.

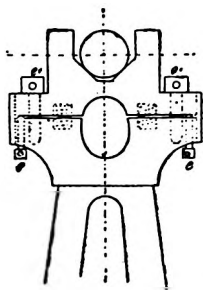


Fig. 70.

**62. Rectificación del teodolito con nivel a caballete.**—El orden de las operaciones es el siguiente:

1) Rectificación del nivel haciendo que su eje sea paralelo al eje secundario.

2) Poner el eje secundario perpendicular al principal.

3) Poner el eje principal vertical.

4) Poner el eje óptico perpendicular al secundario.

5) Poner un hilo del retículo vertical.

1) Colocado el nivel a caballete sobre el eje secundario se procede a verificar que la sección meridiana del primero contenga al eje secundario como antes se ha indicado (N.º 14), se pone en dirección de dos tornillos nivelantes y se centra la burbuja, se invierte el nivel en sus apoyos, si la burbuja queda centrada la tangente a ella en su centro es paralela al eje secundario y el nivel está rectificado, en caso contrario que la burbuja se desplace se corrige mitad del desplazamiento con el tornillo del nivel y la otra mitad con los tornillos nivelantes de la plataforma.

2) Se gi.  $\pm 180^\circ$  el círculo azimutal y por lo tanto el nivel, si la burbuja queda estacionada, el eje secundario es perpendicular al principal, en caso contrario que se desplace se corrige la mitad con el tornillo del cojinete móvil del soporte del anteojo.

3) Se corrige la otra mitad con los tornillos de la plataforma, con lo que se lleva la burbuja al centro y a la horizontal al eje secundario y como antes lo hemos colocado perpendicular al eje principal, éste estará en un plano vertical normal al eje secundario; para ultimar la nivelación del eje principal no queda más que girar el eje secundario con el nivel  $90^\circ$ , disponiéndolo según la dirección del tercer tornillo nivelante y maniobrar éste hasta centrar la burbuja.

4) Como tenemos comprobado que el eje secundario es horizontal, para el eje óptico le sea perpendicular bastará cerciorarse que describe un plano vertical al girar alrededor de aquél, lo cual se hace apuntando el cruce de los hilos del retículo a lo alto de una arista vertical; fijado azimutalmente se observa si en el movimiento vertical del anteojo de arriba hacia abajo dicho cruce se mantiene siempre sobre la arista, lo cual no sucederá si existe error de perpendicularidad, en este caso se mueven los tornillos del retículo que lo desplaza lateralmente hasta conseguirlo.

5) Para poner un hilo del retículo vertical, se procede como se ha dicho para los otros teodolitos. Después de rectificado el teodolito y tener el eje principal vertical se mueven los tornillos de corrección del nivel de espia hasta tener centrada la burbuja; mientras se trabaja con el instrumento es necesario sacar el nivel a caballete y el nivel de espia sirve para indicarnos si durante la observación se desnivela el instrumento.

Las siguientes figuras ilustran cuanto se ha dicho sobre la rectificación de la perpendicularidad de los ejes.

En la fig. 71, los apoyos del nivel  $AB$  no son iguales, por lo tanto su eje no es paralelo al eje secundario  $SS'$ ; los soportes  $MP$  del eje secundario no son iguales. Maniobrando los tornillos  $V$  y  $V'$  se ha llevado la burbuja al centro; al invertir el nivel sobre sus apoyos,

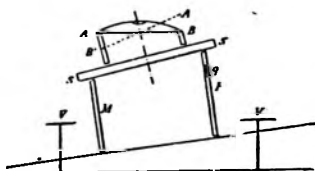


Fig. 71.

ocupará la posición paralela a  $A'B'$ , formando un ángulo doble de la inclinación, reduciendo el desplazamiento a la mitad con

el tornillo del nivel, se rectifica este, es decir, se pone  $NN$  paralelo a  $SS'$  (fig. 72).

Corrigiendo la otra mitad con los tornillos  $V$  y  $V'$  se lleva la burbuja al centro (fig. 73).

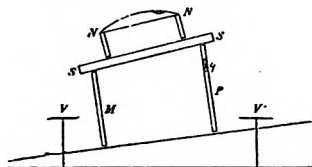


Fig. 72.

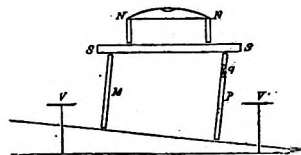


Fig. 73.

Haciendo girar  $180^\circ$  el eje secundario (fig. 74)  $S'S$  en la posición simétrica con  $SS'$  forma un ángulo doble de su inclinación respecto a sus soportes  $M$  y  $P$ ; corrigiendo la mitad del desplazamiento de la burbuja con el tornillo del cojinete móvil  $q$  (fig. 75), se pone  $S'S$  perpendicular a  $P$  y  $M$ , no queda

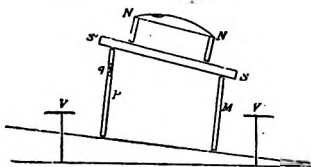


Fig. 74.

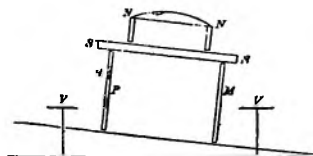


Fig. 75.

sinó maniobrar  $V$  y  $V'$  para corregir la otra mitad del desplazamiento.

**63. Errores instrumentales residuos.**—No es posible en la práctica rectificar el teodolito de modo que se consiga la perfecta perpendicularidad de los ejes y la línea de mira. Vamos a estudiar la influencia de esto y el modo de eliminarlo.

1) Sea  $OZ$  la vertical del observador (fig. 76),  $OZ'$  el eje principal cuya inclinación es

$$ZZ' = i$$

$A$  es el objeto visado.





desplaza a la *derecha*, la lectura será  $l_2$  y la corrección a *restar*.

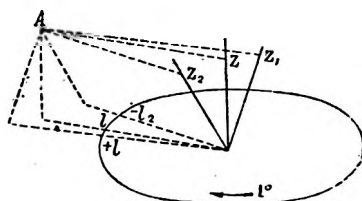


Fig. 77.

Cuando la distancia zenital del objeto es  $90^\circ$ , es decir que está en el horizonte del observador,  $\cotg Z = 0$  y  $\epsilon_1 = 0$ ; por consiguiente, cuando las señales están cerca del horizonte, el error por inclinación del eje principal es casi nulo; al contrario, cuando el objeto está muy alto hay que prestar mucha atención a la verticalidad del eje principal.

Si consideramos otro punto B cuya distancia zenital es  $Z$  el error  $\epsilon_2$  en la lectura, será llamando  $i_2$  la inclinación correspondiente.

$$\epsilon_2 = i_2 \cotg Z'.$$

El error en el ángulo  $\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1 = i_2 \cotg Z' - i_1 \cotg Z$ .

Siendo  $i_1 = i \sin Z' A$  y  $i_2 = i \sin Z' B$

la diferencia de valores de  $i_1$  y  $i_2$  nos indica que no es suficiente que ambas señales tengan la misma altura para que quede eliminado el error por verticalidad del eje principal.

Analizando el caso que hagamos una lectura con anteojo a la derecha y otra con anteojo a la izquierda (fig. 78), no se elimina en el promedio el error por verticalidad del eje principal.

La distancia zenital que debíamos haber medido en la exacta verticalidad del eje principal del instrumento para el punto A visado, es  $A Z$ , la medida es  $A Z'$ ; admitiendo dado el pequeño valor de  $i$ , que el error es igual a  $A Z' - A Z = A Z' - A Z'' = Z'' Z'$ , vemos que el error en la distancia zenital medida es

igual a la inclinación del eje en el plano de mira, la que está medida por el nivel del instrumento paralelo a ese plano.

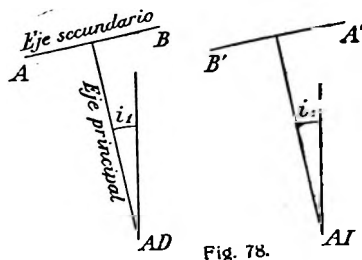


Fig. 78.

2) Error por la no perpendicularidad entre el eje principal y secundario.

Suponiendo el eje principal vertical, es evidente que un error  $\alpha$  en la perpendicularidad del eje secundario se traduce en una igual inclinación del plano de mira con respecto al plano vertical. Es fácil imaginarse que si el eje secundario fuese perpendicular al principal y que este último tuviese la inclinación  $\alpha$ , el plano de mira estaría en las mismas condiciones, por lo tanto el error en una lectura sobre el círculo azimutal es

$$e = \alpha \cotg Z$$

siendo  $Z$  la distancia zenital del objeto colimado y  $\alpha$  la inclinación del eje secundario medida con el nivel a caballete colocado sobre él.

La (fig. 79) muestra como mediante un método de observa-

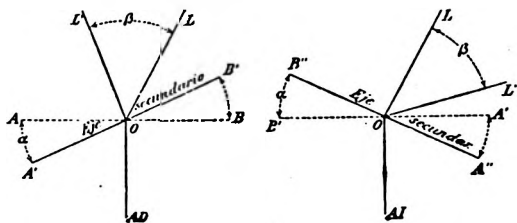


Fig. 79.

ción se puede anular el error de que tratamos.

Sea  $AB$  la posición perpendicular del eje secundario al principal;  $OL$  la línea de mira en estas condiciones, si el eje secundario tiene una inclinación  $\alpha$ , la línea de mira será  $OL'$  y tendremos un error  $\beta$ , invirtiendo el anteojo a la izquierda  $AI$ , el eje secundario ocupa la posición simétrica en  $B''A''$  y la nueva línea de mira  $OL''$  formará el mismo ángulo  $\beta$  en la recta  $OL$ , también simétrico; luego el promedio de las dos posiciones nos dá la lectura sin error de los círculos horizontales.

3) *Error de colimación.* — Sea  $AB$  el eje secundario, el eje óptico en su exacta posición perpendicular al primero ocupa la posición  $OL$  (fig. 80) pero si forma un ángulo  $L'OL = \gamma$ , el eje óptico al girar alrededor de  $AB$  no describirá un plano perpendicular a  $AB$  y vertical, sinó que cada punto girando

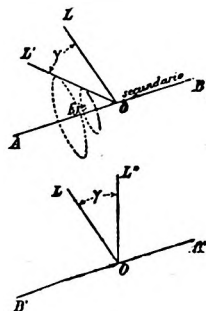


Fig. 80.

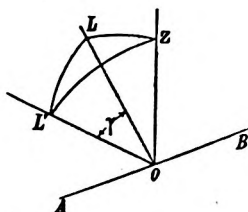


Fig. 81.

alrededor de  $AB$  describe una circunferencia y el eje óptico engendrará una superficie cónica.

Si invertimos el anteojo y colimamos la misma señal, el eje óptico ocupa la posición simétrica  $OL''$ , luego el promedio de las observaciones elimina el error de colimación.

Siendo  $Z$  el zenit,  $L'L$  el arco del círculo, perpendicular al plano vertical  $ZOL$  que es la medida del error de colimación y  $ZL'$  la distancia angular del objeto (fig. 81); la medida del error en el ángulo horizontal está dada por el ángulo diedro  $L'ZL$  formado por los planos  $ZOL$  y  $ZOL'$ .

En el triángulo  $L' L Z$  se tiene

$$\text{sen } \gamma = \text{sen } Z \text{ sen } L' Z L$$

y llamando  $\Delta A$ , el error en el ángulo horizontal y teniendo en cuenta que  $\gamma$  es muy pequeño.

$$\text{sen } \Delta A = \pm \gamma \text{ cosec } Z$$

**64. Regla operatoria de Bessel.**—En las medidas de los ángulos azimutales no se hacen correcciones numéricas, teniendo en cuenta en que forma se eliminan los errores debidos a la no perpendicularidad de los ejes y de colimación, las correcciones se hacen instrumentalmente, haciendo una observación con el anteojo a la derecha y otra con el anteojo a la izquierda, tomando la media como valor definitivo.

Cuando se hace estación para medir un ángulo, la corrección completa del teodolito tal como se ha indicado en los números (61 y 62) debe hacerse al principio de la observación y en el curso de esta no se rectificará mas que la verticalidad del eje principal, pues como hemos visto los errores que introduce esa falta de verticalidad no se anulan con la inversión del anteojo y son tanto más grandes cuanto la distancia zenital del objeto visado sea más pequeña.

La observación en las dos posiciones del anteojo fué indicada por primera vez por Bessel en sus instrucciones sobre la triangulación (1838).

Hay que tener en cuenta que este método se ha establecido para muy pequeños errores en la posición de los ejes del instrumento y que por lo tanto, nunca debiera dejarse de poner la máxima atención en su rectificación.

---

## CAPITULO VII

### MEDIDA DE ANGULOS

**65. Angulos horizontales.**—Si apuntamos con el anteojo a una señal A y hacemos las lecturas de los nonios  $I_1$  y  $II_1$ , el promedio de ellas corresponde al punto A' del círculo graduado.

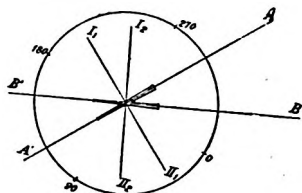


Fig. 82.

$$A' = \frac{I_1 + II_1}{2}$$

Apuntando después a la señal B, el promedio de las lecturas  $I_2$  y  $II_2$  corresponde el punto B'

$$B' = \frac{I_2 + II_2}{2}$$

El arco que mide el ángulo  $A O B = A' O B'$  es

$$B' - A' = \frac{I_2 + II_2}{2} - \frac{I_1 + II_1}{2}$$

Los errores que pueden cometerse en la medida de este ángulo, son:

- 1) Error de lectura.
- 2) Error por incompleta rectificación del instrumento.
- 3) Error de puntería.
- 4) Error de situación.

El error de lectura depende: del error de excentricidad, que se anula con la colocación de dos nonios; del error de colocación de los índices, éste es constante en signo y valor para todas las lecturas y como la medida de un ángulo es la diferencia de dos de éstas, también se anula; de la defectuosa graduación del limbo y el nonio, este error es variable en valor y signo y por lo tanto no se anula; para



$\Sigma c = Bb$  el error de situación de la señal o desplazamiento del punto bisectado de la misma, los puntos  $a$  y  $b$  podrán tener cualquier posición sobre las circunferencias trazadas con  $Aa$  y  $Bb$  como radio. El error máximo se producirá en  $a_1$  y  $b_1$  respectivamente; tomando  $b_1, b_2 = Aa$  el error total siendo el ángulo muy pequeño, es

$$\Sigma s = \frac{B b_1 + b_1 b_2}{A B \sin 1''} = \frac{\Sigma e + \Sigma c}{D \sin 1''}$$

denominando  $D$  la distancia  $A B$ .

Suponiendo:

$$\Sigma e = 0^m 02 \text{ y } \Sigma c = 0^m 05 \text{ y } D = 10.000$$

$$\Sigma s = 0'' 1.$$

Si se mide el ángulo  $BAC$  se tendrá un error resultante  $s$  que será constante para todas las medidas que se hagan sin cambiar el instrumento de la estación en  $A$ .

Agrupando todos los errores que influyen en la determinación de una visual  $A$  y llamándolo  $\Sigma_1$ ;  $\pm l_1$  el error de lectura,  $\pm p_1$ , el error de puntería y  $\pm s_1$ , el error de dirección

$$\Sigma_1 = \pm l_1 \pm p_1 \pm s_1.$$

Cuando se mide un ángulo  $\alpha$ , entre dos señales  $A$  y  $B$ , llamando para la visual  $B$ ;  $l'_1, p'_1$  y  $s'_1$ , los errores parciales

$$\Sigma_2 = \pm l'_1 \pm p'_1 \pm s'_1.$$

Siendo  $\alpha_1$  el ángulo medido y  $\alpha$  el ángulo exacto

$$\alpha - \alpha_1 = \Sigma \alpha = \pm l_1 \pm l'_1 \pm p_1 \pm p'_1 + s$$

$s$  es el error en situación resultante de  $s_1$  y  $s'_1$ , que es constante para todas las medidas del mismo ángulo.

Con el objeto de tener varias medidas del ángulo en cuyo promedio se eliminen los errores que hayan en cada medida parcial se usa el método de *repetición y reiteración*.

**66. Error medio de una medida angular.**—Si  $\mu_1$  es el error medio de la lectura con un solo nonio, el error medio del promedio de las lecturas con los dos nonios, supuestas ambas hechas con la misma exactitud es



$$\frac{\mu_1 \sqrt{2}}{2} = \pm \frac{\mu_1}{\sqrt{2}}$$

Siendo  $\mu_p$  el error de puntería, para una dirección el error medio será

$$\mu_d = \sqrt{\mu_p^2 + \frac{\mu_1^2}{2}}$$

Para la medida de un ángulo  $\alpha$  que es la diferencia de dos direcciones, el error medio es

$$\mu_\alpha = \sqrt{2 \left( \mu_p^2 + \frac{\mu_1^2}{2} \right)} = \sqrt{2 \mu_p^2 + \mu_1^2}.$$

Midiendo el ángulo según la regla de Bessel para anular los errores residuos se tendrán dos medidas y el error medio del promedio de éstas será

$$\mu'_\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} (2 \mu_p^2 + \mu_1^2)} = \sqrt{\mu_p^2 + \frac{\mu_1^2}{2}}.$$

En el caso de una medida simple con un solo nonio

$$\mu_\alpha = \sqrt{2 (\mu_p^2 + \mu_1^2)}.$$

Para una doble medida con un solo nonio.

$$\mu'_\alpha = \sqrt{\mu_p^2 + \mu_1^2}$$

Ejemplo: Para un teodolito cuyo anteojo tenga un aumento  $A = 30$  y el valor de una división del tambor del microscopio  $5''$  se tiene de acuerdo con las tablas (44) para los valores de  $\mu_p$  y  $\mu_1$ , el siguiente error medio para una medida.

Lectura con dos microscopios.

Una medida simple

$$\mu_\alpha = \sqrt{0.98 + 6.25} = \sqrt{7.23} = \pm 2''68.$$

Una medida con anteojo derecha e izquierda

$$\mu'_\alpha = \sqrt{0.49 + 3.17} = \sqrt{3.66} = \pm 1''9.$$

Con lecturas en un solo microscopio

$$\mu_\alpha = \sqrt{0.98 + 12.50} = \sqrt{13.48} = \pm 3''6$$

$$\mu'_\alpha = \sqrt{0.49 + 6.25} = \sqrt{6.74} = \pm 2''6.$$

**67. Método de repetición.** — Consiste en trasportar tantas veces sobre el círculo azimutal el ángulo que se quiere medir de modo que añadiéndose continuamente cada uno de los arcos, el origen de cada medida es la posición final de la anterior, por lo que solo es necesario efectuar dos lecturas de la graduación, una al iniciarse y otra al finalizarse la operación, la diferencia entre ambas se divide por el número de trasportes que se haya efectuado.

Queriendo medir el ángulo A O B, apretamos el tornillo de movimiento general y aflojando el de la alidada, apuntamos a A, hacemos la lectura  $l_0$ , luego moviendo la alidada apuntamos a B y bien apretado el tornillo de alidada aflojamos el de movimiento general llevando círculo y alidada hasta colimar el punto A, hacemos la coincidencia con el tornillo de aproximación del movimiento general y volvemos a repetir la operación apretando el tornillo de movimiento general, llevando la alidada a bisectar a B se habrá agregado al círculo azimutal otro arco igual al valor del ángulo A O B, repitiendo la operación  $n$  veces y haciendo la última lectura  $l_n$ .

$$\angle A O B = \frac{l_n - l_0}{n}$$

La base de este método es que cada lectura sea rigurosamente la división final de la lectura precedente, lo que no se realiza en la práctica debido al juego de los ejes del instrumento.

Para analizar este método, consideremos que:

$$\alpha = \alpha_1 \pm l_1 \pm l'_1 \pm p_1 \pm p'_1 + s$$

siendo  $\alpha$  el ángulo exacto y  $\alpha_1$  la primera medida.

Para la segunda medida, sino se hubiese cometido ningún error, tendríamos el valor de  $2\alpha$ ; pero debemos tener en cuenta el error de la primera puntería y además, al hacer nuevamente la puntería sobre A un error  $p_2$ , al hacer la puntería sobre B, un error  $p'_2$  y si hacemos la lectura final  $l'_n$  tendremos el error  $l'_2$ .

$$2\alpha = \alpha_2 \pm l_1 + (\pm p_1 \pm p'_1 \pm p'_2) \pm l'_2 + 2s.$$

Se ha eliminado el error  $l'_1$  del valor de  $\alpha$ , porque al repetir

el ángulo otra vez no hacemos la lectura que corresponde a la puntería a B, y también se ha eliminado el error  $l_2$  porque no hacemos la lectura correspondiente a la puntería A en la segunda medida. Sucesivamente:

$$3 \alpha = \alpha_3 \pm l_1 + (\pm p_1 \pm p'_1 \dots \pm p'_3) \pm l'_3 + 3 s$$

$$n \alpha = \alpha_n \pm l_1 + (\pm p_1 \pm p'_1 \pm \dots \pm p'_n) \pm l'_n + n s$$

$$\alpha = \frac{\alpha_n}{n} \pm \left[ \frac{l_1 \pm l'_n}{n} + \frac{p_1 \pm p'_1 \dots \pm p'_n}{n} \right] + s$$

Examinando el segundo miembro vemos que el error en situación  $s$  no disminuye con el número de repeticiones.

Los errores de puntería  $p_1 \dots p'_n$ , siendo unos en exceso y otros en efecto, cuanto mayor sea su número más probable será la compensación en su suma.

Los errores de lectura:  $l_1$ , el de la primera, y  $l'_n$  el de la última, cuanto mayor sea el número de repeticiones menor será el cociente de la suma o resta de esos errores por  $n$ .

Si llamamos  $l m$  el error máximo que se puede suponer en una lectura, y  $p m$  el que puede admitirse en una puntería, suponiendo el caso menos ventajoso para una observación, de que todos estos errores estén dirigidos en el mismo sentido, por exceso o defecto.

$$\alpha = \frac{\alpha_n}{n} + \frac{2 l m}{n} + 2 p m + s$$

**68. Error medio en el método de repetición.**— En la primer medida del ángulo  $\alpha$  se comete 2 veces el error de puntería  $\mu_p$  y en la lectura inicial una vez el error de lectura  $\mu_l$ , leyendo los dos nonios.

El error total en la primer medida es

$$\sqrt{2 \mu_p^2 + \frac{\mu_l^2}{2}}$$

para la segunda medida y cada una de las subsiguientes se repite solamente el error de puntetía

$$\sqrt{2 \mu_p^2}$$

y para la última en que se vuelve a hacer una lectura el error será

$$\sqrt{2 \mu_p^2 + \frac{\mu_1^2}{2}}$$

Si  $n$  es el número total de medidas el error total será

$$\sqrt{2 n \mu_p^2 + 2 \frac{\mu_1^2}{2}}$$

y el error del promedio de  $n$  medidas.

$$\mu \alpha = \frac{1}{n} \sqrt{2 n \mu_p^2 + \mu_1^2} = \sqrt{\frac{2}{n} \left( \mu_p^2 + \frac{\mu_1^2}{2} \right)}$$

Ejemplo: Con un teodolito de  $10''$  se mide con tres repeticiones un ángulo, considerando  $\mu_1 = 5''$  y  $\mu_p = 1''$ ; el error medio del promedio será

$$\mu \alpha = \sqrt{\frac{2}{3} \left( 1 + \frac{5^2}{2 \times 3} \right)} = \sqrt{3.44} = \pm 1'' 85$$

**69. Método de reiteración.**—Consiste en medir directamente el ángulo un cierto número de veces cambiando cada vez el origen sobre el círculo, de manera de distribuir sobre el limbo las varias lecturas uniformemente o lo que es lo mismo que cada nonio recorra toda la circunsferencia.

Si se quiere reiterar 3 veces un ángulo, en cada medida es necesario desplazar el círculo  $\frac{360}{3} = 120^\circ$ , pero como la observación se hace en dos posiciones, con anteojo a la derecha e izquierda, bastará dar a cada índice un desplazamiento de  $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ . Si la lectura inicial de la primera puntería es  $10^\circ$ , en la 2.ª medida será  $70^\circ$  y en la 3.ª,  $130^\circ$ .

Llamando  $V_1$  la lectura de la primera visual,  $l_1$  y  $p_1$  los errores correspondientes de lectura y puntería;  $V_2$  la segunda visual,  $l_2$  y  $p_2$  los errores de lectura y puntería,  $\alpha$  el valor exacto del ángulo medido por diferencia de las dos visuales  $V_2 - V_1$ .

$$\alpha = (V'_1 - V_1) + (\pm l_1 \pm l'_1) + (\pm p_1 \pm p'_1) + s$$

$$\alpha = (V'_2 - V_2) + (\pm l_2 \pm l'_2) + (\pm p_2 \pm p'_2) + s$$

$$\alpha = (V'_n - V_n) + (\pm l_n \pm l'_n) + (\pm p_n \pm p'_n) + s$$

$$\alpha = \frac{\Sigma (V' - V)}{n} + \left( \frac{\pm l_1 \pm l'_1 \pm \dots \pm l'_n}{n} \right) +$$

$$+ \left( \frac{\pm p_1 \pm p'_1 \pm \dots \pm p'_n}{n} \right) + s$$

Examinando el segundo miembro vemos que el error en situación no se elimina con el número de observaciones, la suma de los errores de puntería y de lectura están divididos por el número de observaciones.

Si llamamos  $l m$  y  $p m$  el error máximo que se puede suponer en las lecturas y punterías, admitiendo el caso menos ventajoso que para cada observación estos errores estén dirigidos en el mismo sentido, en exceso o en defecto

$$\alpha = \frac{\Sigma (V' - V)}{n} + 2 l m + 2 p m + s$$

**70. Error medio en el método de reiteración.** — Considerando que el error de puntería  $\mu_p$  tiene lugar para cada visual, en 1 medida de un ángulo será  $2 \mu_p$ ; el error medio del promedio de las lecturas de los dos nonios  $\frac{\mu_l}{2}$  tiene lugar al principio y fin de cada medida del ángulo luego el error total de una medida es

$$(1) \quad \sqrt{2 \mu_p^2 + 2 \frac{\mu_l^2}{2}}$$

En cada medida se presenta este error, si  $n$  es el número de medidas, el error será

$$\sqrt{2 n \mu_p^2 + 2 n \frac{\mu_l^2}{2}}$$

El error medio del promedio de las  $n$  medidas.

$$(2) \quad \mu \alpha = \frac{1}{n} \sqrt{2 n \mu_p^2 + 2 n \frac{\mu_l^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{n} \left( \mu_p^2 + \frac{\mu_l^2}{2} \right)}$$

Efectuándose las medidas con el método Bessel, el número de ellas se duplica y la precisión será la anterior por  $\sqrt{2}$ .

$$(3) \quad \mu' \alpha = \sqrt{\frac{1}{n} \mu_p^2 + \frac{\mu_1^2}{2}}$$

*Ejemplo:* Cual es el error medio de un ángulo medido con 3 reiteraciones con un anteojo de 30 aumentos y tambor de 5" de división.

$$\mu_p = 0''7 \quad , \quad \mu_1 = 2''5$$

$$\mu \alpha = \sqrt{\frac{2}{3} (0.49 + 3.12)} = \sqrt{2.406} = \pm 1''.55$$

$$\mu' \alpha = \sqrt{\frac{1}{3} (0.49 + 3.12)} = \sqrt{1.203} = \pm 1''.09$$

**71. Comparación de ambos métodos.**—Empleando cualquiera de ellos, el error de situación no se elimina, el error de puntería se mantiene el mismo para las dos fórmulas y el de lectura, en el de repetición es  $\frac{2 l m}{n}$  y en el de reiteración  $2 l m$ , de aquí se deriva la ventaja teórica del método de repetición cuando se trata de la medida de un solo ángulo, pero prácticamente no se obtiene esa mayor exactitud por la dificultad que hay para conseguir una completa independencia entre el movimiento del círculo y la alidada.

Mucho se ha discutido sobre cual de estos métodos es superior, y aunque teóricamente se acepta que lo es el de repetición, en la práctica se usa indistintamente uno u otro, o métodos de observación donde ambos están combinados. Para la exactitud requerida en los trabajos hidrográficos y topográficos es este un asunto que en realidad no tiene importancia.

**72. Apreciación práctica definitiva en la medida de los ángulos.**—Si a todos los errores cometidos al determinar una dirección los suponemos del mismo signo y además admitimos que al determinar la otra dirección para medir un ángulo, los errores que le pertenecen se suman a los primeros, tendremos el error máximo que se puede esperar en la medida del mismo.

Con estas consideraciones se ha hecho la siguiente tabla, llamando  $f''$  el valor de la aproximación del limbo (43).

ANGULOS MEDIDOS SEGUN LA REGLA DE BESSEL

	$f''$	APRECIACION			Error medio
		Angular	Lineal		
1 medida	30"	40"	0.000194	$\frac{1}{5000}$	10"6
	15"	20"	0.000097	$\frac{1}{10600}$	5"4
2 medidas	10"	6"7	0.000031	$\frac{1}{32000}$	2"6
	5"	3"3	0.000015	$\frac{1}{66000}$	1"2
3 medidas	20"	15"3	0.000021	$\frac{1}{47000}$	4"1

En los trabajos topográficos más que el error angular interesa conocer el error lineal producido por el primero, el que depende de la distancia.

Sea A B una de las visuales, sobre la que se apoya A C para determinar el ángulo B A C; si en la medida de éste se comete un error  $\Sigma$ , el punto C resulta trasladado sobre la circunferencia a C', el error lineal es igual a la cuerda C C'.

$C C' = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \Sigma'' A C$   
análogamente para D

$$D D' = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \Sigma'' A D$$

El error por unidad de distancia, es

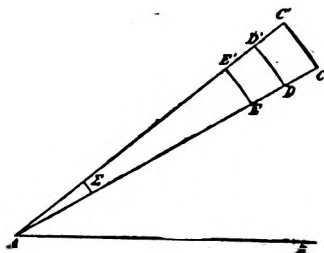


Fig. 84.

$$\Sigma d = \frac{CC'}{AC} = \frac{DD'}{AD} = \frac{EE'}{AE} = \text{etc.}$$

Es el valor dado en el cuadro anterior como apreciación lineal.

En la última columna del cuadro se dan los valores del error medio para el mismo número de medidas y la misma aproximación en los nonios, deducida con la fórmula (3) § (70), supuesto un aumento igual a 15 en el anteojo o sea un error de puntería igual a 1".

**73. Medida de varios ángulos con vértice común con vuelta al horizonte.** — Este método consiste en batir sucesivamente y en sentido creciente de las graduaciones del limbo las señales A, B, C y D y después otra vez A con el anteojo a la derecha; poner el anteojo a la izquierda y volverlas a batir en el siguiente orden A, D, C, B y A, los promedios de la primera y segunda batida nos dá las lecturas de las colimaciones de cada una de las señales, por diferencia de lecturas obtenemos la medida de cada ángulo.

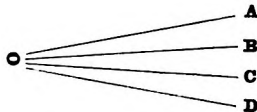


Fig. 85.

Si queremos reiterar 3 veces, y la lectura de la primera colimación de A fué 25°. empezaremos la 2.ª serie por  $25 + \frac{180}{3} = 85^\circ$  y la tercera por  $145^\circ$ .

Como valor para cada ángulo entre dos direcciones consecutivas se toma el promedio de cada medida.

El error medio de una observación, si  $n$  es el número de ángulos que forman la vuelta al horizonte y  $w$  el error de cierre es:  $\pm \frac{w}{\sqrt{n}}$ , en el caso del ejemplo siguiente:  $\frac{5''}{\sqrt{3}} = \pm 2.88$

La planilla siguiente nos muestra un formulario y los cálculos que deben hacerse.



Día 16 de Abril de 1916.

Instrumento Breithaupt 10".

Observador.

Núm. de serie	HORA	OBJETO	LECTURA		Círculo vertical derecha				Círculo vertical izquierda				Promedio de las observaciones			ANGULO	VALOR	OBSERVACIONES
			Grados	Minutos	I		II		I		II		Grados	Minutos	Segund.			
					Minutos	Segund.	Minutos	Segund.	Minutos	Segund.	Minutos	Segund.						
Estación <i>P</i> en Faro <i>r</i> = central mts.																		
		Vértice A	25	20	01	10	01	00	01	50	01	40	25	21	25.0			Imágenes nítidas
8	h.	» B	57	50	05	00	05	10	05	20	05	40	57	55	22.5	APB	32° 33' 57" 5	Poca refracción
I		» C	96	00	06	40	06	30	07	10	07	00	96	06	50.0	BPC	38° 11' 27" 5	Angulos medidos desde el pie de la pirámide.
		» A	25	20	01	10	01	20	01	40	01	50	25	21	50.0	CPA	289° 14' 40" 0	
8.20	h.																	
															Σ	=	360° 00' 05" 0	
															α	=	05" 0	

CROQUIS



**74. Medida de varios ángulos con vértice común sin vuelta al horizonte.**—Si no se vuelve a colimar el primer punto A con lo que se tiene medido el ángulo suplementario que completa la vuelta al horizonte y determinado el error de cierre y error medio sobre una medida angular, habrá que hacer la compensación sobre las lecturas promedios antejo D e I de cada serie.

Sean  $1', 2', 3', 4', \dots$  las lecturas promedio de la primera serie;  $1'', 2'', 3'', 4'' \dots$  de la 2.<sup>a</sup> y  $1''', 2''', 3''', 4''' \dots$  de la 3.<sup>a</sup>, etc.

Si para cada reiteración se ha observado siempre las mismas direcciones, sin excluir ninguna, se demuestra, que los valores compensados de esas direcciones son la media de los valores correspondientes a cada dirección reducida al mismo origen.

Consideremos el caso de 4 puntos y 3 reiteraciones y adoptemos la notación siguiente

	DIRECCIONES	CORRECCIÓN DE LAS DIRECCIONES
	1, 2, 3, 4, ....	
1. <sup>a</sup> Reiteración	$1', 2', 3', 4'$	$\Sigma 1', \Sigma 2', \Sigma 3', \Sigma 4'$
2. <sup>a</sup>	$1'', 2'', 3'', 4''$	$\Sigma 1'', \Sigma 2'', \Sigma 3'', \Sigma 4''$
3. <sup>a</sup>	$1''', 2''', 3''', 4'''$	$\Sigma 1''', \Sigma 2''', \Sigma 3''', \Sigma 4'''$

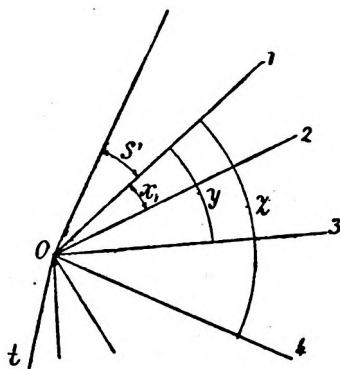


Fig. 86.

Sean  $s', s'', s'''$  los valores exactos correspondientes a las lecturas  $1', 1'', 1'''$  y sean  $x, y, z$ , los valores exactos de los

ángulos 102, 103, 104 con los que quedan determinadas todas las direcciones.

Para la primera reiteración se tendrá

$$\begin{aligned}1' + \epsilon 1' &= s' \\2' + \epsilon 2' &= s' + x \\3' + \epsilon 3' &= s' + y \\4' + \epsilon 4' &= s' + z\end{aligned}$$

Con las cuales y con las análogas para las demás reiteraciones se establecerá.

1ª	2ª	3ª
$s' - 1' = \epsilon 1'$	$s'' - 1'' = \epsilon 1''$	$s''' - 1''' = \epsilon 1'''$
$s' + x - 2' = \epsilon 2'$	$s'' + x - 2'' = \epsilon 2''$	$s''' + x - 2''' = \epsilon 2'''$
$s' + y - 3' = \epsilon 3'$	$s'' + y - 3'' = \epsilon 3''$	$s''' + y - 3''' = \epsilon 3'''$
$s' + z - 4' = \epsilon 4'$	$s'' + z - 4'' = \epsilon 4''$	$s''' + z - 4''' = \epsilon 4'''$

(1)

Estas ecuaciones resueltas de acuerdo con la teoría de los mínimos cuadrados dan los valores siguientes.

$$\begin{aligned}x &= \frac{(2' + 2'' + 2''') - (1' + 1'' + 1''')}{3} = \frac{(2) - (1)}{n} \\y &= \frac{(3' + 3'' + 3''') - (1' + 1'' + 1''')}{3} = \frac{(3) - (1)}{n} \\z &= \frac{(4' + 4'' + 4''') - (1' + 1'' + 1''')}{3} = \frac{(4) - (1)}{n}\end{aligned} \quad (2)$$

siendo  $n$  el número de reiteraciones.

Estos valores reemplazados en las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}4 s' + x + y + z - (1' + 2' + 3' + 4') &= 0 \\4 s'' + x + y + z - (1'' + 2'' + 3'' + 4'') &= 0 \\4 s''' + x + y + z - (1''' + 2''' + 3''' + 4''') &= 0\end{aligned}$$

dan el valor de  $s'$ ,  $s''$  y  $s'''$

Si el número de reiteraciones es  $n$  y el de puntos a visar las ecuaciones serán

$$\begin{aligned}(3) \quad t s' + x + y - \dots - (1' + 2' \dots t') &= 0 \\t s'' + x + y - \dots - (1'' + 2'' \dots t'') &= 0\end{aligned}$$

El valor de  $s$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  reemplazado en la (1) da los errores de cada dirección y el error medio de una observación es

$$\mu = \sqrt{\frac{[\epsilon \epsilon]}{(l-1)(n-1)}}$$

Si en algunas de las reiteraciones se omite la colimación de uno o más puntos por razones de visibilidad de las señales, es necesario asignar pesos a las observaciones en el cálculo de las ecuaciones.

*Ejemplo :*

1.ª Reiteración.	2.ª Reiteración.	3.ª Reiteración.
1' = 77° 03' 35" 0	1" = 136° 58' 42" 5	1''' = 190° 55' 52" 5
2' = 136° 38' 10" 0	2" = 196° 33' 12" 5	2''' = 250° 30' 35" 0
3' = 147° 17' 00" 0	3" = 207° 11' 57" 5	3''' = 261° 09' 30" 0
4' = 163° 03' 42" 5	4" = 222° 59' 00" 0	4''' = 276° 56' 22" 5

Reducidas las lecturas al mismo origen 0° 00' 00"

1' = 00° 00' 00" 0	1" = 00° 00' 00" 0	1''' = 00° 00' 00" 0
2' = 59° 34' 35" 0	2" = 59° 34' 30" 0	2''' = 59° 34' 42" 5
3' = 70° 13' 25" 0	3" = 70° 13' 15" 0	3''' = 70° 13' 37" 5
4' = 86° 00' 07" 5	4" = 86° 00' 17" 5	4''' = 86° 00' 30" 0

En el cálculo es suficiente tener en cuenta los segundos y fracción

$$x = \frac{(2) - (1)}{n} = \frac{35" 0 + 30" 0 + 42" 5}{3} = 59^{\circ} 34' 35" 83$$

$$y = \frac{(3) - (1)}{n} = \frac{25" 0 + 15" 0 + 37" 5}{3} = 70^{\circ} 13' 25" 83$$

$$z = \frac{(4) - (1)}{n} = \frac{07" 5 + 17" 5 + 30" 0}{3} = 86^{\circ} 00' 18" 33$$

$$1' + 2' + 3' + 4' = 67" 3$$

$$1'' + 2'' + 3'' + 4'' = 62" 5$$

$$1''' + 2''' + 3''' + 4''' = 110" 0$$

$$x + y + z = 79" 90$$

$$4 s' = (1' + 2' + 3' + 4') - (x + y + z) = - 12" 70$$

$$4 s'' = (1'' + 2'' + 3'' + 4'') - (x + y + z) = - 17" 49$$

$$4 s''' = (1''' + 2''' + 3''' + 4''') - (x + y + z) = + 30" 01$$

$$s' = - 3'' 12$$

$$s'' = - 4'' 37$$

$$s''' = + 7'' 53$$

con lo que se deduce

$$\epsilon 1' = - 3'' 12$$

$$\epsilon 2' = - 2'' 29$$

$$\epsilon 3' = - 2'' 29$$

$$\epsilon 4' = + 7'' 71$$

$$\epsilon 1'' = - 4'' 37$$

$$\epsilon 2'' = - 1'' 46$$

$$\epsilon 3'' = + 6'' 46$$

$$\epsilon 4'' = - 3'' 54$$

$$\epsilon 1''' = + 7'' 53$$

$$\epsilon 2''' = + 0'' 86$$

$$\epsilon 3''' = - 4'' 14$$

$$\epsilon 4''' = - 4'' 14$$

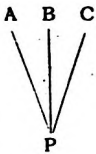
y el error medio de una observación

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\frac{[\epsilon \epsilon]}{(n-1)(t-1)}} = \sqrt{\frac{[\epsilon \epsilon]}{(4-1)(3-1)}} = \sqrt{\frac{[\Sigma \epsilon]}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{246.27}{6}} = \pm 6'' 41 \end{aligned}$$

NOTA.—En el caso del ejemplo del § 73 para que la suma de los ángulos medidos sean 360°, hay que repartir el error de cierre por vuelta al horizonte, lo que se hace en el siguiente formulario.

# TRIANGULACION PRINCIPAL

COMPENSACIÓN DE LOS ÁNGULOS POR CIERRE AL HORIZONTE

CROQUIS						
						
Estación	VÉRTICES		Página de referencia	Ángulos medidos	Corrección	Ángulos corregidos
	Izquierdo	Derecho				
P. Faro	A	B	95	32° 33' 57"5	-1"66	32° 33' 55"8
	E	C		38° 11' 27"5	»	38° 11' 25"8
	C	A		289° 14' 40"0	»	289° 14' 38"4
	Suma			360° 00' 05"0		360° 00' 00"0
	Error de cierre			- 5"0		

**75. Coordinación de los ángulos medidos independientemente.**—El colimar las señales sucesivamente como se efectúa cuando se miden los ángulos alrededor de un punto con o sin vuelta al horizonte, (73) y (74) responde a la circunstancia teórica de que durante todo el intervalo de la serie, las condiciones de observación sean idénticas e invariables y lo que así puede considerarse cuando los puntos están próximos entre sí.

Esto puede en algunos casos no suceder, sea porque el instrumento esté montado sobre una pirámide en cuyo caso la dilatación por la temperatura produce la torsión de la misma, que hace girar la base sobre la cual está asentado el instru-

mento o porque la señal sea una pirámide de hierro en que cambia el centro de señal; por otra parte durante el día no todas las señales en vuelta al horizonte están satisfactoriamente iluminadas, por lo cual algunas están en malas condiciones para ser visadas.

Para salvar los inconvenientes que de estas circunstancias se derivan, se mide independientemente cada uno de los ángulos concurrentes en un mismo punto. La medida de cada ángulo se hace de manera que todas ellas tengan el mismo grado de exactitud. Cada ángulo puede medirse con igual número de reiteraciones con o sin vuelta al horizonte o con igual número de repeticiones simples o empleando el método Gauss para la medida independiente de ángulos.

Dos son las formas principales de combinar estas medidas para obtener los valores compensados de los ángulos: el *método de direcciones* y el de *combinaciones binarias*.

**76. Método de direcciones.**—En este método se mide con el mismo número de reiteraciones el ángulo que cada dirección concurrente a la misma estación forma con una distancia fija individualizada por una señal bien definida que no forma parte de los puntos entre los cuales se medirán los ángulos de esa estación. Este punto puede establecerse provisoriamente con una señal provisoria.

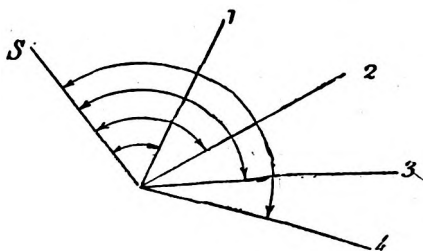


Fig. 87.

Si O es el centro de estación: 1, 2, 3, 4 los puntos de triangulación; con la señal auxiliar S, se medirán independiente-

mente, cuando se presentan las mejores condiciones de iluminación, los ángulos (S.1) (S.2) (S.3) (S.4).

La medida aritmética de un mismo número de determinaciones de cada ángulo es el valor más probable del mismo y por diferencia se deducen los demás ángulos.

El objeto de tomar como origen una señal ajena al sistema es el que cada una de las direcciones a determinar entre el mismo número de veces. En efecto, con 3 reiteraciones de cada ángulo, empleando la regla de Bessel, las direcciones 1, 2, 3, 4 son colimadas 6 veces cada una y  $S, 6 \times 4 = 24$  veces. Si se hubiese tomado como origen un punto del sistema, el 1, midiendo los ángulos (1.2) (1.3) (1.4) con 3 reiteraciones cada uno, el punto 1 se colima 18 veces y 2, 3, 4 solo 6 veces.

**77. Método de combinaciones binarias.**—Este método, llamado también de Schreiber consiste en medir en cada estación todos los ángulos posibles entre dos direcciones.

Si  $t$  es el número de puntos a visar,  $\frac{t(t-1)}{2}$  es el número de combinaciones binarias con  $t$  puntos y el número de ángulos que se medirán es:

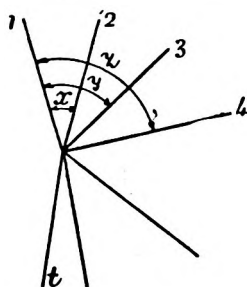


Fig. 88.

$$\begin{array}{rcl}
 (1.2) (1.3) (1.4) \dots\dots\dots & (1.t) \\
 (2.3) (2.4) \dots\dots\dots & (2.t) \\
 (3.4) \dots\dots\dots & (3.t) \\
 & \hline
 & (t-1.t)
 \end{array}$$

Para fijar las  $t$  direcciones son suficientes los  $(t-1)$  ángulos

$$\begin{array}{l}
 (1.2) = x, \quad (1.3) = y, \\
 (1.4) = z \dots\dots\dots (1.t).
 \end{array}$$

Estos son los ángulos llamados fundamentales y todos los demás se deducen por diferencia entre ellos.

De acuerdo con la teoría de los mínimos cuadrados se demuestra que los valores compensados de cada uno de los ángulos fundamentales es igual al promedio aritmético de los  $(t-1)$  valores del mismo que se pueden calcular mediante las



observaciones, con tal que se le atribuya peso doble al valor directamente observado y de que todas las medidas hayan sido hechas en iguales condiciones.

Con los valores compensados de  $x, y, z \dots$

Se deducen los valores compensados de los demás ángulos.

$$[1.2] = x, \quad [1.3] = y, \quad [1.4] = z \dots \dots \dots$$

$$[2.3] = y - x, \quad [2.4] = z - x \dots \dots \dots$$

$$[3.4] = z - y \dots \dots \dots$$

El error de cada observación es

$$\epsilon_{1,2} = [1.2] - (1.2), \quad \epsilon_{1,3} = [1.3] - (1.3), \quad \epsilon_{1,4} = [1.4] - (1.4) \dots$$

$$\epsilon_{2,3} = [2.3] - (2.3), \quad \epsilon_{2,4} = [2.4] - (2.4), \dots \dots \dots$$

$$\epsilon_{3,4} = [3.4] - (3.4), \dots \dots \dots$$

El error medio de un ángulo observado es

$$m = \sqrt{\frac{2 (\epsilon \epsilon)}{(t-1)(t-2)}}$$

y el error medio de un ángulo compensado

$$m' = m \sqrt{\frac{2}{t}}$$

Apliquemos lo dicho al caso de 4 direcciones  $t = 4$ .

Los ángulos que se miden son:

$$\begin{array}{ccc} (1.2) & (1.3) & (1.4) \\ & (2.3) & (2.4) \\ & & (3.4) \end{array}$$

Para (1.2) se tienen los valores siguientes:

$$(1.2)$$

$$(1.3) - (2.3)$$

$$(1.4) - (2.4)$$

El valor compensado, será

$$x = \frac{2(1.2) + (1.3) - (2.3) + (1.4) - (2.4)}{4} = [1.2]$$

Análogamente tenemos para  $y$

$$\begin{aligned}(1.3) \\ (1.2) + (2.3) \\ (1.4) - (3.4)\end{aligned}$$

luego

$$y = \frac{2(1.3) + (1.2) + (2.3) + (1.4) - (3.4)}{4} = [1.3]$$

y para  $z$ ,

$$z = \frac{2(1.4) + (1.2) + (2.4) + (1.3) + (3.4)}{4} = [1.4].$$

Los errores correspondientes a los ángulos fundamentales son:

$$\epsilon_{1.2} = x - (1.2)$$

$$\epsilon_{1.3} = y - (1.3)$$

$$\epsilon_{1.4} = z - (1.4)$$

debiéndose tener

$$\epsilon_{1.2} + \epsilon_{1.3} + \epsilon_{1.4} = 0.$$

Deduiremos los ángulos

$$[2.3] = y - x, [2.4] = z - x, [3.4] = z - y$$

y los errores

*Ejemplo.*

$$\begin{array}{ll}(1.2) = 98^{\circ} 30' 23'' 8 & (2.3) = 18^{\circ} 52' 12'' 5 \\ (1.3) = 117^{\circ} 22' 32'' 5 & (2.4) = 92^{\circ} 34' 05'' 0 \\ (1.4) = 191^{\circ} 04' 35'' 0 & (3.4) = 73^{\circ} 42' 02'' 5\end{array}$$

Aplicando las fórmulas ya sentadas para 4 direcciones.

$$\begin{aligned}x = [1.2] &= 98^{\circ} 30' 24'' 4, & [2.3] &= y - x = 18^{\circ} 52' 09'' 0 \\ y = [1.3] &= 117^{\circ} 22' 33'' 4, & [2.4] &= z - x = 92^{\circ} 33' 09'' 0 \\ z = [1.4] &= 191^{\circ} 04' 33'' 4, & [3.4] &= z - y = 73^{\circ} 42' 00'' 0\end{aligned}$$

Los errores de cada observación

$$\begin{array}{llll}\epsilon_{1.2} &= [1.2] - (1.2) &= \dots + 0'' 6 &\dots 0.36 \\ \epsilon_{1.3} &= [1.3] - (1.3) &= \dots + 0'' 9 &\dots 0.81 \\ \epsilon_{1.4} &= [1.4] - (1.4) &= \dots - 1'' 6 &\dots 2.56 \\ \epsilon_{2.3} &= [2.3] - (2.3) &= \dots - 3'' 5 &\dots 12.25 \\ \epsilon_{2.4} &= [2.4] - (2.4) &= \dots + 4'' 0 &\dots 16.00 \\ \epsilon_{3.4} &= [3.4] - (3.4) &= \dots - 2'' 5 &\dots 7.25 \\ &&&(\epsilon \epsilon) 39.23\end{array}$$

$$\epsilon_{1.2} + \epsilon_{1.3} + \epsilon_{1.4} = - 0'' 1$$

El error medio de un ángulo observado es

$$m = \sqrt{\frac{2(\epsilon\epsilon)}{(t-2)(t-1)}} = \sqrt{\frac{2(39.23)}{(4-2)(4-1)}} = \pm 3''6$$

El error medio de un ángulo compensado

$$m' = m \sqrt{\frac{2}{t}} = 3''6 \sqrt{\frac{2}{4}} = \pm 2''52$$

El error medio de una dirección

$$m'' = m \sqrt{\frac{1}{t}} = 3''6 \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm 1''62$$

### 78. Medida independiente de ángulos. — Método Gauss. —

Para medir el ángulo X O Y, el observador colocado en O visará el punto X y hará la lectura correspondiente  $l_1$ , apuntando a Y se repetirá 4 veces el ángulo  $\alpha$ , se hará la lectura correspondiente a Y que llamamos  $l_2$ ; se invierte el anteojo y se repetirá 4 veces el ángulo  $\beta$  al final hacemos la lectura  $l_3$  de la última puntería sobre X.



Fig. 89

Las lecturas  $l_1$  y  $l_3$  debieran ser iguales si no hubiesen errores instrumentales residuos que hace aparecer la inversión del anteojo (Regla Bessel) y si no hubiese el error de arrastre propio del método de repetición, en general no serán iguales y la pequeña diferencia que haya se supone debe atribuirse por igual a cada repetición, como éstas son en total 8, la corrección de la medida de un ángulo será

$$\frac{l_1 - l_3}{8}$$

$$y \quad \alpha = \frac{l_2 - l_1}{4} + \frac{l_1 - l_3}{8} = \frac{l_2 - \frac{l_1 + l_3}{2}}{4}$$

Las lecturas se registran en el siguiente formulario arreglado para la observación con instrumentos provistos de microscopios micrométricos, lo que implica una media parcial y una final de las lecturas a agregarse a la del limbo.

Si el instrumento tuviera nonios se anotará los grados, minutos y segundos de los nonios en A y B y su promedio será el definitivo. El formulario está dispuesto para tres series de medidas.

# TRIANGULACION PRINCIPAL.—MEDIDA DE LOS ANGULOS—MÉTODO DE GAUSS.

Estación *Ituzaingo*

Vértice izquierdo *Lázaro Primo*

Vértice derecho *Club Mar del Plata.*

SERIE	FECHA Y HORA	LECTURAS						CÁLCULO DE LA SERIE				OBSERVACIONES	
		Orden	Microscopio	Límbo	De los Microscopios				Orden	u	v		w
					1. <sup>a</sup>	2. <sup>a</sup>	Media parcial	Media final					
I	Año 1914	1. <sup>a</sup>	A	559°50'	09'52"	09'54"	53"	52"5	(1) 1. <sup>a</sup> Lectura	359°	59'	52"5	Día de sol. Refracción nula. Luz clara. Imágenes nítidas. Viento 1. Ángulos tomados desde el pie de la pirámide. Colimación: A la plataforma de la pirámide de Lázaro Primo y el extremo del Trípode del Club.
	B		179°50'	09'54"	09'50"	52"	52"5	(2) 3. <sup>a</sup> Lectura	359°	59'	37"		
	Definitiva 559° 59' 52" 5					«Diferencia alg. [(1)–(2)]	—	—	+15"0				
	Mes	2. <sup>a</sup>	A	264°40'	05'20"	05'18"	19"	23"	(3) 1/3 Diferencia	—	—	+07"5	
	Marzo		B	84°40'	05'29"	05'25"	27"	23"	(4) 2. <sup>a</sup> Lectura	264°	45'	23"	
	Día 25		Definitiva 264° 45' 23"					(5) Suma alg. [(5)+(4)]	264°	45'	30"5		
	De		A	359°50'	09'37"	09'37"	37"	37"5	(6) 1. <sup>a</sup> Lectura	359°	59'	52"5	
	7 50 h.		B	179°50'	09'36"	09'40"	38"		4 X Angulo [(5)–(6)]	264°	45'	38"	
	a		Definitiva 359° 59' 37" 5						Angulo	66°	11'	24"5	
	8.15 h.												
Los valores del ángulo obtenidos con otras 2 series de observaciones son										II = 66° 11' 22"8			Firma:
										III = 66° 11' 21"6			
Suma de los valores parciales de las otras 3 series										198°	34'	08"9	
Valor promedio del ángulo										64°	11'	23"0	
Diferencias de las series										1. <sup>a</sup> – 2. <sup>a</sup> = +01"7	2. <sup>a</sup> – 3. <sup>a</sup> = –01"2	3. <sup>a</sup> – 1. <sup>a</sup> = –02"9	
Diferencias con la media										1. <sup>a</sup> – m = +01"5	2. <sup>a</sup> – m = –00"2	3. <sup>a</sup> – m = –01"4	

Para la medida de ángulos en la triangulación secundaria, usando teodolitos de 20", en principio, se sigue el método de Gauss pero simplificado.

Siendo A el vértice estación, B y C las señales a colimar, llamemos B y C las lecturas correspondientes a su primera colimación y B' la lectura correspondiente a B después de hecha la vuelta al horizonte.

Cada colimación dá la 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> lectura de cada serie, los respectivos promedios se anotan en la columna correspondiente, de la cual se saca el valor de

$$l_2 = \frac{l_1 + l_3}{2}$$

Cada ángulo interno B A C y externo C A B' puede medirse con o sin repetición.

El ejemplo puesto en el formulario siguiente ilustra la aplicación de esta forma simplificada de usar el método de Gauss, que no es otra cosa que la medida de un solo ángulo por el método de vuelta al horizonte.

# TRIANGULACIÓN SECUNDARIA.—MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

Fecha.

Instrumento.

Observador.

N.º de la serie	Posición Círculo vertical	Objeto observado	LECTURAS								Promedio de las lecturas	$\frac{1+3}{2}$	Valores del Ángulo B A C $2 - \frac{1+3}{2}$	Promedio de cada serie	Discusión de la serie	OBSERVACIONES		
			Grados	SERIE I		SERIE II		Grados	SERIE I								SERIE II	
				Minutos	Segundos	Minutos	Segundos		Minutos	Segundos							Minutos	Segundos
I	D	B 1. <sup>a</sup>	359	50	09	50	09	40	359 59 45	359 59 27.5	66 10 22.5	66 10 20.0	I - II = + 2"5					
	D	C 2. <sup>a</sup>	126	00	10	00	09	40	126 09 50				II - III = + 2"5					
	I	A' 5. <sup>a</sup>	359	50	09	00	09	20	359 59 10				III - I = - 5"0					
													I - m = + 2"5					
II											66 10 20.0	66 10 20.0	II - m = 0"0					
III											66 10 17.5	66 10 20.0	III - m = - 2"5					

### 79. Anulación de la paralaje en los teodolitos excéntricos.

—Sea O el centro de estación, si el teodolito fuese central, el anteojo estaría dirigido en la dirección OM y uno de los nonios colocado perpendicularmente nos daría la lectura A; si el anteojo es excéntrico para bisectar la señal M, estando a la derecha deberá ocupar la posición D, tal que DM sea tangente a la [circunferencia descrita por el anteojo, la lectura correspondiente será B y el ángulo AOB = OMD es el error debido a la excentricidad OD = e del anteojo, llamando D la distancia OM

$$r'' = \frac{e}{D \sin 1''}$$

Esta fórmula nos permitiría calcular la corrección, pero prácticamente se procede como sigue: considerando el teodolito central, si invertimos el anteojo y apuntamos nuevamente a M, la lectura del nonio será A' haciendo lo mismo en el caso que el anteojo sea excéntrico, la nueva posición a la izquierda es I y la lectura B':

$$A'OB' = IMO = OMD$$

y el punto medio del arco AA' coincide con el punto medio del BB'.

Por lo tanto, el error por paralaje del anteojo se elimina en el promedio de las direcciones determinadas con anteojo a la derecha e izquierda; como siempre se emplea el método Bessel en la medida de los ángulos, se deduce que no exige más observaciones el trabajar con un teodolito excéntrico que el hacerlo con uno central.

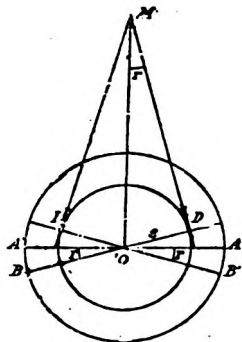


Fig. 90

### 80. Empleo del teodolito en la observación de los astros.

— *Ángulos horizontales.* — Después de rectificado prolijamente el teodolito se dirige el anteojo a una mira simple o luminosa y se hacen las lecturas correspondientes a la posición anteojo a la derecha e izquierda; el promedio de éstas es la lectura de referencia: apuntando el anteojo al astro, obtenemos una

nueva lectura, la diferencia con la primera nos dá la medida del ángulo formado por las visuales al astro y la mira; en general se hace una serie de observaciones del astro, debiéndose al final de cada serie repetir la lectura a la mira para asegurar de que el instrumento no ha sufrido ningún desplazamiento.

Para las observaciones de sol, no siendo posible hacer coincidir el cruce de los hilos del retículo con el centro del astro se hará una primera observación con el anteojo a la derecha, tangenteando el borde derecho del sol con el hilo vertical, se hacen las lecturas  $l_1$  y  $l'_1$  de los nonios cuyo promedio  $L_1$  corresponde al top  $T_1$  de la observación; inmediatamente se invierte el anteojo y se gira  $180^\circ$  el círculo horizontal para repetir la observación con anteojo a la izquierda, siendo  $l_2$  y  $l'_2$  las lecturas de los nonios,  $L_2$  su promedio y  $T_2$  el top correspondiente del cronómetro, la media  $\frac{L_1 + L_2}{2}$  corresponde al promedio de los tiempos  $\frac{T_1 + T_2}{2}$ .

En la práctica es suficiente hacer las lecturas con un solo nonio, se tendrá cuidado hacerlas siempre con el mismo; las lecturas de una misma serie de observaciones difieren muy poco una de otra, al invertir el anteojo el nonio I ocupa la posición próxima a la ocupada por el nonio II en la primera observación, por lo tanto, haciendo la lectura nuevamente con el nonio I tendremos eliminado en el promedio el error de excentricidad.

Si se quiere hacer la observación de un solo borde, para reducirla al centro, si  $Q$  es el semidiámetro del sol y  $h$  la altura aparente, se deberá corregir la lectura instrumental o el resultado de la observación por la cantidad.

$$\pm Q \sec h$$

correspondiendo el signo  $+$  o  $-$  según el borde observado y el sentido creciente de la graduación del instrumento.

Esta corrección es evidentemente lo que correspondería a un error de colimación y igual al valor del semidiámetro que llamamos  $Q$ , siendo  $h$  la altura aparente correspondiente a la distancia cenital  $Z$ . (63).



En las observaciones de estrellas puede hacerse la coincidencia del hilo vertical exactamente con la misma, eliminándose la corrección por reducción al centro.

Es oportuno recordar que teniendo gran influencia el error debido a la verticalidad del eje principal, cuando la altura del objeto observado es grande, deberá ponerse especial cuidado en su rectificación cuando se observen astros.

---

## CAPITULO VIII

### MEDIDAS DE ÁNGULOS

**81. Angulos verticales.**—Estos ángulos pueden medirse por simple puntería, para lo que es necesario conocer la graduación del círculo vertical que corresponde a la horizontal o vertical o que la línea de los ceros de los nonios del mismo círculo ocupen esa posición. Cuando se emplea el método de doble puntería, esta condición no es necesaria.

**82. Medida por simple puntería.**— Se procede a hacer que el eje óptico del anteojo sea horizontal, cuando la alidada del círculo vertical está en cero.

Préviamente fijados los ceros de los nonios de la alidada en coincidencia con los ceros del círculo vertical V, se apunta el anteojo sobre una mira parlante.

Supongamos (fig. 91), que el eje óptico  $A_1B_1$  del anteojo

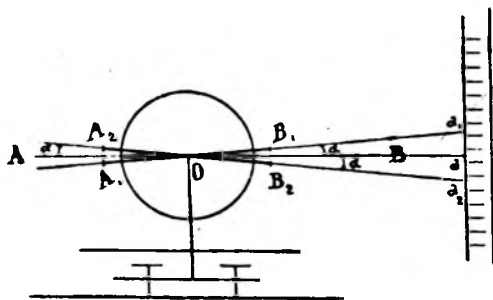


Fig. 91

esté inclinado sobre la horizontal en un pequeño ángulo  $\alpha$ , y que sea hacia arriba; en la mira aparecerá en coincidencia con el centro del retículo una cierta graduación  $a_1$ , mayor que  $a$

que correspondería a la posición horizontal A B del anteojo; hagamos girar éste  $180^\circ$  alrededor del eje secundario, el eje óptico tendrá la misma inclinación  $\alpha$  con respecto a la horizontal y el anteojo tendrá la misma posición:  $A_1 B_1$  apuntando hacia el lado contrario a la mira; girando el instrumento  $180^\circ$  alrededor del eje principal, el eje óptico estará dirigido según  $A_2 B_2$ , la lectura de su coincidencia con la mira será  $a_2$ , menor que  $a$ . Como las posiciones  $A_1 B_1$  y  $A_2 B_2$  son simétricas respecto a A B, la rectificación consiste en maniobrar los tornillos  $r r$  (fig. 53) hasta llevar la línea de mira en coincidencia con la graduación  $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$ .

En los instrumentos que no poseen los tornillos de rectificación  $r r$ , y por lo tanto a los índices de referencia no puede imprimirseles movimiento alguno, esta corrección que será pequeña, por tratar los constructores de llenar esta condición en sus instrumentos, se efectuará desplazando verticalmente el retículo, hasta que el hilo horizontal coincida con la graduación  $a$ . Se procede después a centrar la burbuja del nivel  $N_2$  por medio de sus tornillos de corrección (fig. 53). Lo mismo se hará con los niveles que algunos teodolitos llevan en la placa de los nonios o sobre el círculo vertical (fig. 57 y 59). Rectificado el nivel del anteojo, cuando queramos tener la visual horizontal, no hay sino que centrar la burbuja y el teodolito nos servirá de nivel.

Hecha la corrección de la línea de los ceros de los nonios del círculo vertical, una vez puesto en estación el teodolito y nivelado, las lecturas de las punterías sobre el círculo vertical nos dan directamente el valor de la altura o distancia zenital del objeto apuntado según que el origen de las graduaciones del limbo esté en la horizontal o en la vertical.

**83. Medida por doble puntería.**—Supongamos que el eje principal no esté vertical y que forme con esta dirección un ángulo  $\beta$ , (fig. 92). Estando el anteojo a la izquierda colimeemos el punto A', cuya distancia zenital  $z$  buscamos y sea  $z'$  la lectura correspondiente del círculo vertical graduado en el sentido de la flecha.

Girando  $180^\circ$  el instrumento alrededor del eje principal, tendremos el anteojo dirigido según  $O A$  (fig. 95), posición simé-

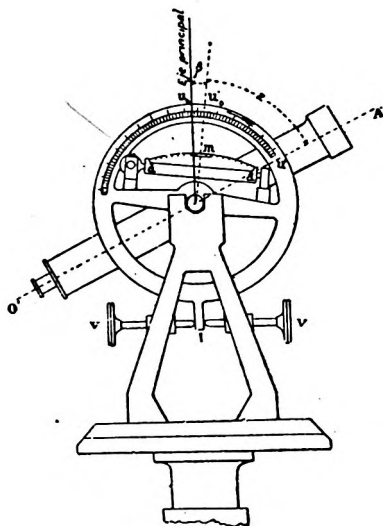


Fig. 92

trica de  $O' A'$  respecto al eje principal, es decir, que formará con él el ángulo  $(z + \beta)$  (fig. 93).

Girando el anteojo alrededor del eje secundario lo llevamos a la dirección  $O'' A''$  (anteojo a la derecha) para establecer nuevamente la colimación y obtenemos la lectura  $u''$ ; el eje óptico ha descrito el ángulo  $2(z + \beta)$  y como las graduaciones sucesivas son crecientes,  $u'' - u' = 2(z + \beta)$ .

El valor del ángulo zenital es:

$$z = \frac{u'' - u'}{2} - \beta$$

por lo tanto, para tener el valor exacto de  $z$  es necesario conocer la inclinación  $\beta$  del eje principal.

La posición del eje principal está dado por la lectura

$$u_0 = \frac{u'' + u'}{2}$$

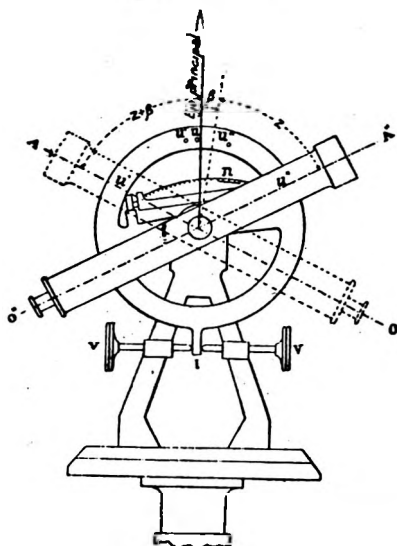


Fig. 95

La posición del zenit instrumental o lectura que corresponde a la vertical en el círculo, es:

$$u''_0 = u_0 + \beta = \frac{u'' + u'}{2} + \beta.$$

Si el instrumento está bien nivelado

$$\beta = 0 \text{ y } z = \frac{u'' - u'}{2}; \quad u''_0 = \frac{u'' + u'}{2}.$$

A veces no es posible anular, en absoluto, la inclinación  $\beta$ , y se hace necesario en las operaciones de precisión tenerlo en cuenta; su valor, según las fórmulas de la teoría del nivel es:

$\beta = \frac{m+n}{2} K$ , donde  $m$  y  $n$  expresan la división del centro de la burbuja del nivel  $dd$  y  $K$  el valor angular de cada división.

La lectura que corresponde al centro de la burbuja para llevar el eje principal a la vertical es  $\frac{m-n}{2}$ , luego moviendo el tornillo nivelante de la plataforma que dá al instrumento el movimiento de inclinación en el plano de mira, llevamos la burbuja a la graduación  $\frac{m-n}{2}$ , después centrándola con los tornillos  $v v$  (fig. 92), tendremos que siempre que esté el nivel  $dd$  con la burbuja centrada las lecturas hechas sobre el círculo vertical corresponderán a las distancias zenitales de los puntos colimados; si el eje principal se aleja de su posición vertical durante las observaciones, el desplazamiento de la burbuja, expresadas sus divisiones por su medida angular, nos dará la corrección que debe aplicarse a las lecturas para obtener las distancias zenitales.

**84. Graduación de los círculos verticales.**—Es necesario antes de trabajar con un instrumento examinar el limbo del círculo vertical y la posición relativa de los ceros del mismo y de los nonios con respecto a la vertical, así como el sentido de la graduación, lo que varía de un instrumento a otro.

En general pueden dividirse en dos clases, unos que tienen la línea de los ceros según la horizontal, destinados a dar el valor de los ángulos alturas; y otros que los tienen según la vertical y que dan los ángulos zenitales.

Analizaremos algunos casos, los que servirán de guía para resolver otros en los que el sistema de graduación sea diferente.

*Círculos graduados de 0 a 360°, medida de ángulos zenitales.*—Sea  $V V'$  la vertical del instrumento;  $o$  la posición del cero del limbo que debiera estar sobre  $V V'$ , pero que forma con ella un ángulo  $\alpha$ ;  $A$ , la dirección del anteojo apuntado al objeto cuya distancia zenital se quiere hallar,  $I_1$  y  $II_1$  la posición de los ceros del nonio solidarios al anteojo.

Las lecturas hechas en los nonios, nos dan: (fig. 94).

$$I_1 = 90 - z + \alpha.$$

$$II_1 = 90 - z + \alpha + 180^\circ.$$

$$\frac{I_1 + II_1}{2} = 180^\circ - z + \alpha. \quad (1)$$

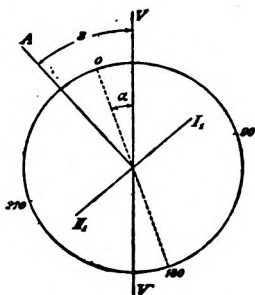


Fig. 94.

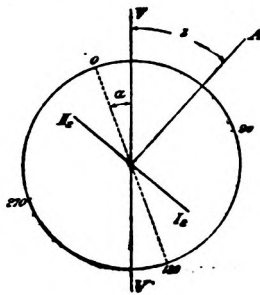


Fig. 95.

Haciendo la inversión del anteojo ya explicada, el anteojo y los nonios han girado un ángulo igual a  $2(z + \alpha)$ , las lecturas son: (fig. 95).

$$I_2 = 90 + z + \alpha$$

$$II_2 = 90 + z + \alpha + 180^\circ$$

$$\frac{I_2 + II_2}{2} = 180 + z + \alpha \quad (2)$$

De la (1) y (2)

$$z = \frac{\frac{I_2 + II_2}{2} - \frac{I_1 + II_1}{2}}{2}$$

$$\alpha + 180 = \frac{\frac{I_2 + II_2}{2} + \frac{I_1 + II_1}{2}}{2}$$

Para llevar los ceros del limbo a la posición  $V V'$ , a la que corresponde las lecturas  $\alpha$  y  $\alpha + 180^\circ$  en la posición no corregida, se fijan los ceros del nonio en esa graduación, luego

con el tornillo de coincidencia del limbo, se llevan los ceros del nonio en esa graduación, luego con el tornillo de coincidencia del limbo, se llevan los ceros de éste a hacerla coincidir con los ceros del nonio, que por la primera operación están sobre la vertical, quedando por lo tanto también ellos con la misma posición.

En muchas medidas de ángulos verticales no es necesario obtener una gran precisión y es suficiente hacer las lecturas con un mismo nonio, supongamos sea el marcado I.

$$\begin{array}{ll} \text{En la primera puntería (fig. 94)} & I_1 = 90 - z + \alpha \\ \text{segunda } > \text{ (fig. 95)} & I_2 = 90 + z + \alpha \end{array}$$

$$\text{luego } z = \frac{I_2 - I_1}{2}, \quad 90 + \alpha = \frac{I_2 + I_1}{2}$$

Si la posición de los ceros del limbo estuviese rectificada, es decir, que su línea estuviese en la vertical, sería suficiente hacer una sola puntería.

$$\begin{aligned} I_1 &= 90 - z \\ II_1 &= 90 - z + 180 \\ Z &= 180 - \frac{II_1 + I_1}{2} \end{aligned}$$

Haciendo la lectura de un solo nonio  $z = 90 - I_1$

*Círculos graduados de 0 a 180°, medida de ángulos sobre el horizonte.*—La línea de los ceros rectificada, su posición debe ser horizontal.

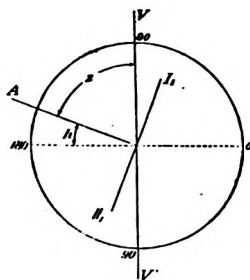


Fig. 96.

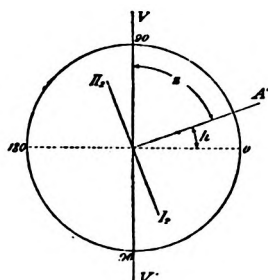


Fig. 97.



Primera puntería, (fig. 96).

$$\begin{aligned} I_1 &= z \\ II_1 &= 180 - z \\ \frac{II_1 - I_1}{2} &= 90 - z = h \quad (1) \end{aligned}$$

Segunda puntería (fig. 97).

$$\begin{aligned} I_2 &= z \\ II_2 &= 180 - z \\ \frac{II_2 - I_2}{2} &= 90 - z = h \quad (2) \end{aligned}$$

Con (1) y (2)

$$h = \frac{\frac{II_1 - I_1}{2} + \frac{II_2 - I_2}{2}}{2}$$

Haciendo las lecturas con un solo nonio I

$$h = 90 - \frac{I_1 + I_2}{2}$$

Haciendo una puntería simple

$$h = \frac{II_1 - I_1}{2}$$

*Círculos graduados de 0 a 360° con cuatro nonios.*—*Medida de ángulos zenitales.* La figura 98 muestra los nonios solidarios al anteojo y la línea de los ceros formando un ángulo de 45° con el eje óptico del anteojo, disposición que facilita la lectura, otros instrumentos por construcción tienen una de las líneas de nonios paralelas al anteojo; el caso se analiza en forma semejante al primero que es el que vamos a estudiar.

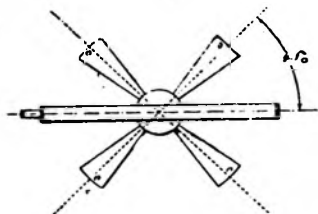


Fig. 98.

$$\begin{aligned} I_1 &= 45^\circ - z + \alpha \\ II_1 &= 45^\circ - z + \alpha + 90^\circ \\ III_1 &= 45^\circ - z + \alpha + 180^\circ \\ IV_1 &= 45^\circ - z + \alpha + 270^\circ \\ \hline \frac{\Sigma I_1}{4} &= 180^\circ + \alpha - z \quad (1) \end{aligned}$$

(fig. 99).

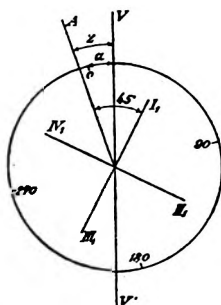


Fig. 99.

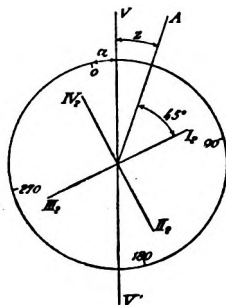


Fig. 100.

*Segunda puntería*

(fig. 100)

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 45 + z + \alpha, \\
 II_2 &= 45 + z + \alpha + 90 \\
 III_2 &= 45 + z + \alpha + 180 \\
 IV_2 &= 45 + z + \alpha + 270^\circ \\
 \hline
 \frac{\Sigma_2}{4} &= 180 + \alpha + z. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Con (1) y (2).

$$z = 180 + \frac{\frac{I_1 + III_1}{2} + \frac{II_1 + IV_1}{2} + \frac{I_2 + III_2}{2} + \frac{II_2 + IV_2}{2}}{4}$$

$$z = \frac{\frac{I_2 + III_2}{2} + \frac{II_2 + IV_2}{2} - \left( \frac{I_1 + III_1}{2} + \frac{II_1 + IV_1}{2} \right)}{4}$$

**85. Determinación del valor angular de una división del nivel.** — En el teodolito (figura 55), en que el nivel  $N$   $\alpha$  está montado sobre el antejo, se lleva la burbuja a una extremidad del nivel, se hace la lectura  $m$  del centro de la burbuja y la que le corresponde  $M$  en el círculo vertical a esa posición del antejo, luego se lleva la burbuja al otro extremo del nivel y se hace la lectura  $n$  de su centro y la correspondiente  $N$  del círculo vertical.  $M - N$  es el arco que corresponde a  $m \pm n$

divisiones del nivel, según que el cero de su graduación esté en el centro o en un extremo y el valor angular de una división del mismo es

$$K = \frac{M' - N}{m \pm n}$$

Si queremos el valor de una división del nivel de plataforma N' (fig. 53), paralelo al anteojo, disponemos éste según el tornillo de plataforma P', apuntamos a un objeto que permita una bisección exacta con el hilo horizontal, hacemos la lectura *m* de la burbuja de N' y la M del círculo vertical, luego manipulamos P' hasta que la burbuja se desplace unas cuantas divisiones, la coincidencia del hilo horizontal del retículo habrá desaparecido, movemos el anteojo hasta restablecerla, hechas las nuevas lecturas *n* del nivel y N del círculo vertical, podemos como en el caso anterior deducir el valor de K.

Si el nivel está fijo al círculo vertical o a la placa de los nonios aplicaremos el método que convenga de los dos anteriores indicados, según que el nivel pueda girar solidario con el anteojo o no. Este método es aproximado y es necesario elegir un punto lejano.

En las fábricas e institutos hidrográficos o geodésicos usan un aparato llamado examinador de nivel, que sirve para apreciar el valor de una división del mismo con toda exactitud.

**86. Empleo del teodolito en la medida de las distancias zenitales de los astros.** — Después de colocar en estación el teodolito se rectifica prolijamente y haciendo uso de una mira simple o luminosa se determina la lectura correspondiente al zenit instrumental y la inclinación del eje principal, se hacen las correcciones indicadas en el N.º 83; después de cada colimación del astro se hacen las lecturas de los nonios del círculo vertical y de los extremos de la burbuja del nivel del mismo para aplicar la corrección por la variación de la verticalidad del eje principal que se manifiesta por la descentración de la burbuja.

Para las observaciones de Sol, se hace uso de un modificador que se coloca en el ocular del anteojo y a algunos ins-

trumentos para facilitar las observaciones, sobre todo cuando el astro tiene una alrura grande se adapta al ocular un prisma de reflexión que permite hacerlas con mucha comodidad.

No pudiéndose centrar el retículo sobre la imagen del Sol, se hace de manera que el hilo horizontal sea tangente al borde inferior o superior y que el hilo vertical lo corte en dos mitades, (figs. 101 y 102).



Fig. 101.



Fig. 102.

La distancia zenital instrumental, será:  $z' = z \pm \beta$ , siendo  $\beta$  la corrección instrumental obtenida con el nivel paralelo al anteojo. La altura aparente es  $h = 90 - z'$ .

Para obtener la altura verdadera hay que aplicarle la corrección por refracción atmosférica  $R$ , por semidiámetro  $Q$  y paralaje  $p$ , se hace uso de las tablas conocidas en el curso de Astronomía.

$$h_v = h_a - R \pm Q + p.$$

Cuando las observaciones están ligadas con el tiempo, se sigue el siguiente procedimiento con el que se elimina la corrección por semidiámetro.

Hecha la primera observación tangenteando el borde inferior del Sol, se hacen las lecturas de los nonios cuyo promedio llamamos  $L_1$ , sea  $T_1$  el top correspondiente y  $m_1$  la lectura del nivel.

Para la segunda observación, se gira el instrumento  $180^\circ$  alrededor del eje principal, se invierte el anteojo girándolo sobre el eje secundario y se apunta nuevamente al Sol, la colimación se hace tangenteándolo en su borde superior; hechas las lecturas de los nonios, cuyo promedio llamaremos  $L_2$ , el top correspondiente  $T_2$  y la lectura del nivel  $m_2$  tenemos

$$z = \frac{L_2 - L_1}{2} \pm \beta.$$

$$\beta = \frac{m_1 + m_2}{2} - K.$$

La distancia zenital  $z$ , considerando que el movimiento en altura del astro es uniforme, puede considerarse que corresponde al instante  $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$ .

La corrección por semidiámetro queda eliminada, pues en la primera observación sería  $+Q$  y en la segunda  $-Q$ .

$$h_a = 90 - z$$

$$h_v = h_a - R + p.$$

Cuando las observaciones están ligadas con los ángulos azimutales se sigue el siguiente procedimiento: se hace la primera observación tangenteando los bordes del Sol con el horizontal y vertical (figura 103), se hacen las lecturas  $L_1$  del círculo vertical,  $m_1$  del nivel y  $A_1$  del círculo azimutal; inmediatamente se hace la inversión del anteojo y se gira  $180^\circ$  el instrumento y apuntando nuevamente al astro se tangentea como lo indica la (fig. 104), en el ángulo



Fig. 103.

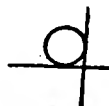


Fig. 104.

opuesto del cruce de los hilos del retículo con respecto a la primera observación. Siendo análogamente  $L_2$ ,  $m_2$  y  $A_2$  los promedios de las lecturas hechas.

$$z = \frac{L_2 - L_1}{2} \pm \beta$$

$$\beta = \frac{m_1 \pm m_2}{2} K$$

Suponiendo que el movimiento en azimut del astro es uniforme y proporcional a la variación en altura, el valor  $z$  corresponde a la lectura azimutal

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

Para observar estrellas se procede lo mismo que en el caso del Sol respecto al instrumento, haciendo uso de una mira luminosa.

En todos los casos se lleva el hilo horizontal del retículo a coincidir con la estrella y se hace el contacto cerca del hilo vertical. La observación puede hacerse por simple puntería para lo cual debe prepararse el instrumento haciendo las correcciones indicadas en (Nº 82).

Cuando se emplea el método de doble puntería se procede análogamente a las observaciones de sol, la distancia zenital obtenida corresponde al promedio de los top si está ligada con el tiempo o al promedio de las lecturas del círculo horizontal si está ligada con los azimutes.

Para iluminar el retículo, algunos anteojos tienen uno de sus ejes hueco, por donde se envía un haz de rayos luminosos que es recibido por una superficie de reflexión y desviado hacia el retículo. En otros anteojos, sobre el aro del

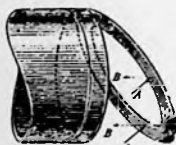


Fig. 105.

objetivo se coloca una pieza de forma indicada en la (figura 105), la luz que se envía en la dirección A es reflejada al interior del anteojo según B e ilumina el retículo.

Es necesario graduar la cantidad de luz que recibe el retículo de manera que estando suficientemente iluminado no se pierda la imagen de la estrella.

**87. Ángulos zenitales con anteojos excéntricos.**— El error de paralaje producido por la excentricidad del anteojo en la medida de los ángulos verticales, es prácticamente despreciable; con un teodolito de 100 m/m de excentricidad, su valor alcanza a 0'45 para una distancia zenital de 45° de un punto situado a 100 ms. de distancia, y este error disminuye con el aumento de la última.

## CAPITULO IX

### SEÑALES

**88. Generalidades.** — Las señales tienen por objeto materializar puntos sobre el terreno, proporcionando una línea de colimación vertical y una línea de colimación horizontal.

**89. Piquetes.** — Se llaman así unas estacas de madera o hincero de 30 a 50 cms. de largo, se usan para fijar puntos del terreno provisionalmente o de una manera estable, se les marca un número de orden para distinguirlos entre sí.

**90. Jalones.** — Son astas de madera de dos o cuatros metros de largo, pintadas a fajas rojas y blancas para hacerlas más visibles.

**91. Banderolas.** — Son jalones que se les coloca en la parte superior una bandera para hacerlos visible a mayor distancia.

Plantar en el terreno un jalón o una banderola es colocarla verticalmente, lo que se efectúa haciendo que quede cubierta por el cordón de una plomada, en dos posiciones que determinan juntamente con el pie del jalón dos planos verticales y perpendiculares entre sí. Al estar el jalón cubierto por el cordón de la plomada, se encontrará verticalmente establecido, puesto que estará en la intersección de ambos planos que es la vertical.

**92. Señales geodésicas.** — Para distancias grandes deben sustituirse las señales que hemos estudiado por otras de mayor importancia, que pueden ser naturales o artificiales. Las señales naturales están constituidas por las construcciones que se encuentren en el terreno que pueden servir para ello, faros, torre de iglesias, miradores, etc.

Las señales artificiales son las que se construyen con expreso propósito de servir para ello. Pueden dividirse en dos clases; unas en las que se harán observaciones y otras cuyo objeto es solo colimarlas.

Las primeras necesitan mucha estabilidad de plataforma para poder mantener sobre ella el instrumento sin que sufra ningún movimiento, las segundas es suficiente que ten-

gan estabilidad suficiente para no caerse cualquiera que sea el estado del tiempo.

Las señales que más se usan en trabajos de hidrografía, son pirámides de hierro de 15 a 30 ms, de altura, con plataforma superior cuando de ellas se va a observar y sin ella en caso contrario; son fácilmente armables y desarmables y por lo tanto no hay inconveniente para su transporte cualquiera que sea la naturaleza del terreno o para desembarcarla en la playa con botes.

Las (figs. 106) muestran algunos tipos de señales fáciles de construir con los elementos de abordo o los que se pueden conseguir en tierra.

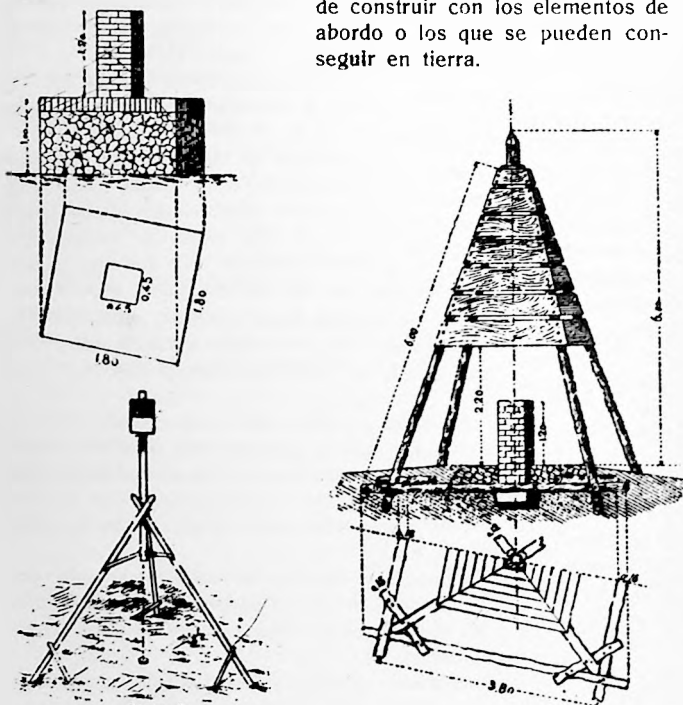


Fig. 106.



93. Efecto de la esfericidad de la tierra y de la refracción en la visibilidad entre las señales. — No teniendo en cuenta la refracción, la altura  $h$  de un punto A (fig. 107) puede expresarse en función de la distancia  $K = AH$  del pie de la vertical al punto de tangencia del rayo visual  $A'B$  por la fórmula

$$h = A'C - R = \frac{R}{\cos\left(\frac{K}{R}\right)} - R$$

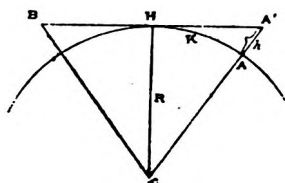


Fig 107.

designando por  $R$  el radio medio de la tierra o también

$$h = R \left( \frac{1 - \cos \frac{K}{R}}{\cos \frac{K}{R}} \right) = R \frac{2 \sin^2 \frac{K}{2R}}{\cos \frac{K}{R}}$$

teniendo en cuenta que  $\frac{K}{R}$  es muy pequeño  $h = \frac{K^2}{2R}$ .

La refracción elevando el horizonte real, desvía el rayo visual un ángulo igual a  $\frac{nK}{R}$ , la altura a que es necesario elevarse para limitar el horizonte al mismo punto debe ser disminuida en la cantidad  $K \frac{nK}{R}$ . la altura  $h$  será entonces

$$h' = \frac{K^2}{2R} (1 - 2n)$$

$n$  es el coeficiente de refracción igual a 0.08.

La tablilla siguiente da el valor de  $h'$ , correspondiente a la distancia  $K$ .

Distancia en kilómetros.	Altura en metros	Distancia en kilómetros.	Altura en metros	Distancia en kilómetros.	Altura en metros
1	0.07	10	6.52	19	25.81
2	0.28	11	7.90	20	26.58
3	0.60	12	9.49	21	29.09
4	1.05	13	11.14	22	31.92
5	1.65	14	12.95	23	34.89
6	2.37	15	14.84	24	38.00
7	3.23	16	16.88	25	41.30
8	4.22	17	19.06		
9	5.34	18	21.37		

Para la determinación de la altura que se debe dar a las señales, hay que tener en cuenta que las visuales no convienen que sean rasantes a la superficie de la tierra debido a la refracción lateral y vertical y que como mínimo deben pasar a una altura de 1<sup>m</sup>80 del suelo. Como ejemplo, supongamos que las estaciones A y B estén a 26 kms. y que el instrumento puede instalarse en A a 8 mts. de altura. La visual dirigida desde A será tangente a la tierra a 11 kilómetros y faltarán 15 kms.; para que dicha visual incida en la cúspide de la señal en B será necesario darle a ésta una altura de 14<sup>m</sup>84 y para que la visual no sea rasante a la tierra se elevará a 17 mts.

**94. Dimensiones y colores de las señales.** — Cualquiera que sea la forma de la señal que haya que establecerse, es necesario determinar las dimensiones que debe tener para ser vista a la distancia deseada.

Teniendo en cuenta que la potencia o agudeza de la vista es igual 1', la dimensión mínima que debe darse a la señal es:  $d = D \tan 1' = 0.0003 D$ .

Con un anteojó de amplificación A, las dimensiones del objeto será  $d = 0.0003 \frac{D}{A}$ . En la práctica se aconseja las dimensiones deducidas por la fórmula  $d' = \frac{1}{8000} D$ , con lo cual la señal es visible aún para un anteojó de débil aumento.

El cuadro siguiente dá los valores de  $d$  para un anteojó de  $A = 30$  y los valores de  $d'$ .

D	d	d'
100	m 0.001	m 0.012
500	0.002	0.063
1000	0.010	0.125
5000	0.050	0.625
10000	0.100	1.250
20000	0.200	2.500

La altura dependerá de la elevación que hay que darle sobre el terreno y el diámetro de las señales no debe exceder las dimensiones necesarias para una buena visibilidad, pues la di-

ficultad de visarla crece con su dimensión; las mismas consideraciones hechas para su altura, son aplicables, para su ancho.

Las señales se distinguen mejor cuando se destacan sobre el cielo que proyectadas sobre la tierra; los colores blanco y rojo son los que más se destacan en este caso y el negro en caso contrario. En general las señales se pintan a fajas negras y blancas para que sean visible en cualquier condición de iluminación.

**95. Error de faz.** — Si la señal que hay que visar tiene

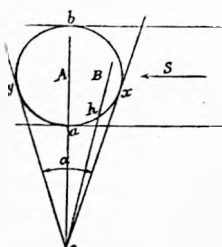


Fig. 108.

forma cilíndrica o rectangular cuyo centro es A (figura 108); siendo  $s-s$  los rayos solares, la parte iluminada será  $a-x-b$ , un observador en O debiera ver la señal bajo el ángulo  $\alpha$  y visando el centro de  $y-a-x$  su visual pasaría por A.

Por efecto de luz, el observador solo verá la parte iluminada  $a-x$  y visará en el punto medio de esta  $h$ , por lo tanto el ángulo medido será erróneo

en A O B. Este error es muy difícil de calcular para corregirlo y hay que eliminarlo adoptando una forma conveniente para las señales.

Las miras cilíndricas y macizas han sido dejadas y un sistema conveniente es el indicado por la (figura 109). Las señales luminosas diurnas y nocturnas también eliminan este inconveniente.

**96. Señales luminosas.** — Cuando la distancia entre los puntos de observación es muy grande se usan señales constituidas por instrumentos sencillos que se utilizan con la luz solar o artificial



Fig. 109.

Sea A B (fig. 110) un espejo puesto en el punto requerido e instalado de modo que un observador colocado en O reciba los rayos solares por aquel reflejados; y que pertenecen a un

cono cuya base es la imagen  $S'$  del astro y cuya abertura en  $O$  es  $32'$ , diámetro solar.

Si la distancia que separa las dos estaciones es de 30 kilómetros, para los  $32'$  de diámetro de la base del cono, el

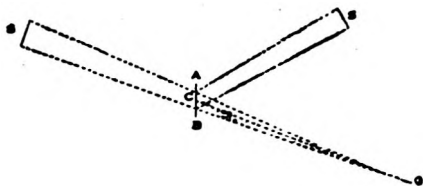


Fig. 110.

ancho que la superficie del espejo debe tener para que sea visible todo el disco del sol es de  $2 \tan 16' \times 30000 = 279^m$ .

Como el espejo tiene, en general, sólo  $0^m10$  de ancho, la imagen del sol puede considerarse como un punto luminoso.

Por otra parte, cada punto del espejo, consideremos uno  $A$ , (fig. 111), recibe un conjunto de rayos luminosos de  $S$ , los que al reflejarse formando ángulos iguales con la normal  $AP$ , constituyen un cono luminoso de  $32'$  de abertura, cualquiera que sea la posición del observador en el plano  $B$ , recibe los rayos luminosos, el diámetro de  $B$  para 30 kms. es 279 mts.; es decir, que no es indispensable apuntar el haz luminoso con la exactitud de un anteojo, puesto que un desplazamiento de 140 mts. del observador de la posición exacta que sería sobre el eje  $OX$  del cono, no impediría que viese la señal luminosa.

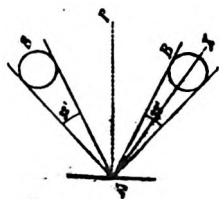


Fig. 111.

**97. Heliótopos Gauss.**—Existen diversos modelos de heliótopo, entre ellos el más usado es el de Gauss, modificado.

Este se compone de un poderoso anteojo terrestre  $A$  montado sobre un círculo azimutal  $H$  (fig. 112). El anteojo lleva montado un pequeño espejo  $E$  que puede moverse según dos

ejes ortogonales y dos discos D y D', estos discos están perforados en su centro y, determinan una línea que debe ser paralela al eje óptico del anteojo.

Para utilizar el aparato se dirige el anteojo al punto donde está el observador que lo va a colimar, hecho esto se gira el

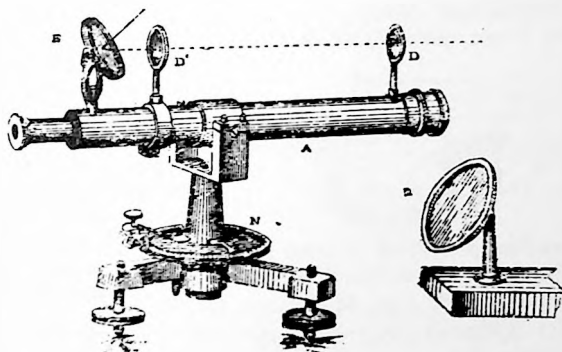


Fig. 112.

espejo hasta que el haz luminoso reflejado pase por los agujeros de D y D', en estas condiciones será paralelo al eje del anteojo y estará dirigido hacia el observador. Cuando la estación a que se envía la luz está a más de  $90^\circ$  con el Sol, se utiliza un espejo auxiliar E'.

Estas señales solares son visibles a simple vista hasta una distancia de 30 kms. siempre que se haya colocado a la altura que le corresponde.

**58. Observaciones nocturnas.—Colimadores ópticos.** — Todos los instantes del día no son favorables para la observación, a medio día en particular, aún con cielo cubierto las imágenes son ondulantes y no permiten hacer buenas punterías.

Los períodos buenos para la observación son aquellos en que las capas atmosféricas están en calma, que se presentan dos veces al día, a la mañana inmediatamente después de salir el Sol y a la tarde 2 o 3 horas antes de la puesta.

Lo dicho es con respecto a la medida de ángulos horizontales, veremos después que por ser en esas horas muy variable la refracción, las horas más convenientes para la medida de los ángulos verticales son desde 12 m. a 2 p. m.

Durante la noche las imágenes presentan una estabilidad notable sobre todo 2 o 3 horas después de la puesta del Sol, para aprovechar esta circunstancia se usan señales nocturnas llamadas *colimadores ópticos*, cuyo principio es el siguiente:

Sea S una lámpara, el haz luminoso es concentrado en F por una lente  $m n$ , F es un agujero de  $\frac{1}{2}$  centímetro de diámetro que está en el foco de la lente M N, de manera que los rayos luminosos salen paralelos según F O, este haz es orientado hacia

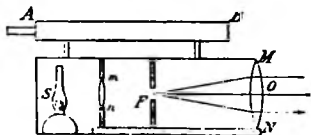


Fig. 113.

la estación que recibe la señal por medio del anteojo A B, cuyo eje óptico es paralelo a F O. Con lentes M N de 20 cms. de diámetro y 60 cms. de distancia focal puede tenerse buenas señales luminosas que pueden observarse hasta 60 kms. de distancia.

**99. Marcación de los puntos de estación.**— Cada uno de los puntos donde se hace estación con el instrumento para medir ángulos o donde se colocan señales para bisectar, se dejan marcados para poder después volver a repetir las operaciones o apoyar nuevos trabajos sobre ellos. La División de Hidrografía, tiene reglamentada las marcas que deben ponerse, según la importancia del punto.

Debe tenerse especial atención que no varíe la posición del centro de estación, sea cuando se levanten las señales, se reemplazan los piquetes, etc.

Supongamos que en un punto P donde hay un piquete queremos poner un jalón o hacer un pozo para colocar una señal subterránea, como debemos sacar el piquete deberá asegurarse que el procedimiento de trabajo permita centrar la señal o la marca en el mismo sitio que estaba P; para esto puede arriarse la extremidad de un jalón al piquete, asegurándolo con unas estaquitas de madera y poniendo una en su extremidad B,

sacando el jalón siempre que lo volvamos a calzar entre las estacas la extremidad A ocupará la misma posición, sacando el piquete también podemos hacer el pozo que se necesita si vamos a colocar una marca subterránea, hecho el pozo se coloca el jalón horizontal y se pone en la vertical de su extremidad A la señal sirviéndose de una plomada.

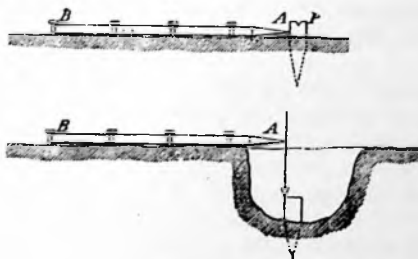


Fig. 114.

También puede procederse de la siguiente manera, se fijan cuatro estaquitas *a*, extremos de dos líneas perpendiculares entre sí que se cortan sobre el centro de la señal, uniéndolas con hilos como lo indica la (figura 115), hecho esto puede sacarse el piquete P, hacer el pozo y para instalar la señal volver a colocar los hilos cuyo cruce determinará la posición del centro de estación.

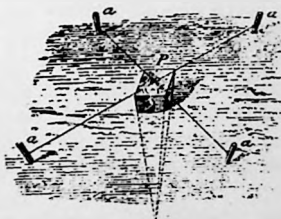


Fig. 115.

\* La situación de los vértices o identificación de las marcas colocadas en ellos está reglamentada por la División de Hidrografía.

## CAPITULO X

### MEDIDA DIRECTA DE LONGITUDES

**100. Alineaciones.**—Se llama alineación al plano que determina las verticales de dos puntos. La longitud de la línea de intersección de ese plano con la superficie del terreno es la *distancia natural* entre los dos puntos; la recta que los une es la *distancia geométrica* y la proyección de ésta sobre un plano horizontal es la *distancia horizontal*.

Las alineaciones se trazan con ayuda de alidadas, siempre se emplea un anteojo. Para ello se coloca el instrumento en estación en uno de los extremos de la alineación, se dirige la visual al otro extremo donde se habrá colocado un jalón, luego haciendo las señales convenidas a un ayudante se intercala el número de jalones que sea necesario entre las estaciones extremas, todos ellos deben quedar cubiertos entre sí y cubiertos por el hilo vertical del retículo del anteojo.

**101. Cadena.**— Se compone de eslabones F (fig. 116) de alambre de hierro no muy grueso (4 mm. de diámetro), unidos por anillas. La longitud de cada eslabón es de dos decímetros, comprendidos entre los centros de las anillas que lo unen, cada cinco eslabones lleva una marca que señala los metros; cada cinco metros lleva una medalla en las que se marca el número de metros que hay a partir del extremo de la cadena.

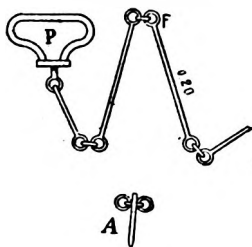


Fig. 116.

Terminan las cadenas en ambos extremos por agarraderas P dispuestas de manera que la distancia de un extremo al centro de la primera anilla sea dos decímetros.

La longitud total de la cadena es ordinariamente 10 o 20



metros. Acompaña a la cadena un juego de 10 agujas o fichas. Con el uso, la cadena varía su longitud, aumentándola por alargue de las anillas o disminuyéndola cuando sus eslabones se tuercen. Para comprobar su exactitud, se marca sobre un terreno llano la longitud exacta que debe tener la cadena, y se compara ésta de cuando en cuando con el patrón establecido. Para corregirla, si ha aumentado su longitud, se torcerán ligeramente uno o dos eslabones. Si ha disminuido se recorrerán los eslabones para rectificar los que hayan podido torcerse.

**102. Cinta metálica.**—La constituye una cinta de acero empavonado de diversas longitudes, 10, 25 o 50 mts.; siendo su ancho variable de 1 m/m. a 3 m/m. y su espesor y temple tales que se la puede arrollar con facilidad para el transporte, no presentando inflexiones ni dobleces cuando haya que extenderla para hacer uso de ella. Se hallan señalados los metros con discos de metal amarillo fijos en la cinta, siendo sus centros, que se hallan bien marcados, los puntos de división, los dobles decímetros van marcados por otro disco y los decímetros se marcan por medio de unos agujeros pequeños taladrados en la cinta.

Las agarraderas en que termina por cada uno de sus extremos, que son semejantes a las de la cadena, forman parte de los últimos doble decímetros. Las caras externas de estas agarraderas llevan dos canales semi-cilíndricos perpendiculares entre sí, y cuyo diámetro es igual al de las agujas o fichas que acompañan la cinta. Las longitudes de los dobles decímetros extremos se hacen variables por medio de un tornillo que une la agarradera a la cinta; este tornillo puede fijarse invariablemente por medio de una tuerca.

**103. Uso de la cadena y de la cinta.**—Para medir una línea que supondremos en un terreno llano y próximamente horizontal, son necesarios un operador y un ayudante. Rectificada la cadena o cinta y contadas las fichas, la toman ambos por sus manijas, colocándose en todo lo posible en la alineación, para lo cual el operador, que marchará detrás dirigiendo la medida, después de haber entregado al ayudante 10 fichas, coloca el extremo de la cadena o cinta

en el punto de origen y hace señas al ayudante para que entre en línea; bien tendida la cadena horizontalmente, el ayudante clava verticalmente en el terreno una aguja que enrrase con el extremo de la manija.

Hecho esto y levantando ambos la cadena con el objeto de no tropezar con la aguja, dan un paso a la derecha o izquierda de la línea, y siguen marchando en dirección de aquella hasta que el operador llega a la aguja clavada, se repite lo hecho para la primera medida, el ayudante clava la 2ª ficha y el operador levanta la 1ª, continuando la operación en igual forma el ayudante se quedará sin fichas, las cuales se encontrarán en poder del operador, si las agujas eran 10 y la cadena o cinta tiene 50 ms. el punto en que se clavó la 10ª ficha estará a 500 ms. del origen. El operador apunta en una libreta cada vez que esto suceda.

En la última medida se contará el número de metros y decímetros y si hay fracción de éstos se medirán con un doble decímetro.

Debe tenerse cuidado que la cadena o cinta esté bien tirante, perfectamente en la alineación y que se lleve muy bien la cuenta de las fichas.

#### 104. Aproximación que se obtiene con la cadena y la cinta.

—Es muy variable y depende del cuidado con que se ha hecho la medida.

Cuando se emplea para medir una base, en que se limpia el terreno, se apisona y jalonea la alineación y se hacen todas las operaciones con sumo cuidado, la mayor aproximación que puede esperarse es de  $\frac{1}{1800}$  con la cinta y  $\frac{1}{800}$  con la cadena.

En terreno quebrado que no ha sido preparado para la medida, como es en el caso de hacer poligonales, la mayor aproximación es  $\frac{1}{600}$  para la cinta y  $\frac{1}{400}$  para la cadena.

También se puede emplear las siguientes relaciones para determinar el error temible con una medida hecha con cinta o cadena; siendo D la distancia, el error será

$$\begin{aligned} \mu &= 0.015 \sqrt{D} && \text{para terreno plano} \\ \mu &= 0.020 \sqrt{D} && \text{, , , ondulado} \\ \mu &= 0.025 \sqrt{D} && \text{, , , desfavorable.} \end{aligned}$$

**105. Generalidades sobre el empleo del alambre metálico.**  
—Para las medidas, bases geodésicas o topográficas, en las que la exactitud debe ser por lo menos  $\frac{1}{100,000}$  se emplean

aparatos especiales que aseguran la exacta correspondencia entre los orígenes de cada medida, con la marca final de la medida anterior y la exacta reducción de las distancias a la horizontal. El aparato consta (fig. 117).

1. El alambre invar  $a' a'$ .
2. El tripode tensor  $L L'$ .
3. El tripode director con los índices móviles I. II.
4. El anteojo nivel y su mira, A y M.

El alambre invar  $a' a'$ , (acero con 36 ‰ de nickel, tiene longitud diferente, el más usado es de 24 y 96 mts. con un diámetro de 1.6 mm.; cuando no se usa es arrollado en un tambor especial, y para trabajar con él, se coloca sobre las roldanas de los tripodes tensores  $L$  y  $L'$  y se somete a la tracción de los pesos para los cuales han sido calculadas las constantes de corrección por longitud. El alambre lleva dos reglitas graduadas  $m m$ , esas graduaciones son las que se hacen coincidir con los índices móviles de los tripodes directores I y II, la diferencia de lecturas de esas reglitas cualquiera que sea la graduación que coincide con el índice móvil es constante o igual a la longitud del alambre.

El tripode director lleva una plataforma móvil con un índice T, moviendo esta plataforma se hace que la plomada coincida con el piquete  $p$  que ha sido la referencia de la medida anterior; el tripode II se coloca de manera que la reglita del alambre caiga sobre el índice móvil correspondiente, después por medio de la plomada se coloca el piquete de referencia.

El anteojo nivel A y su mira M sirven para determinar la pendiente del alambre, sobre un soporte del tripode director puede montarse el anteojo o la mira.

El anteojo se utiliza también para llevar la medida exactamente en la alineación.

El equipo de cintas Invar en uso en nuestra Hidrografía para la medida de bases y poligonales de precisión no tiene tripodes ni caballetes. El alambre se fija por uno de sus extremos  $a'$

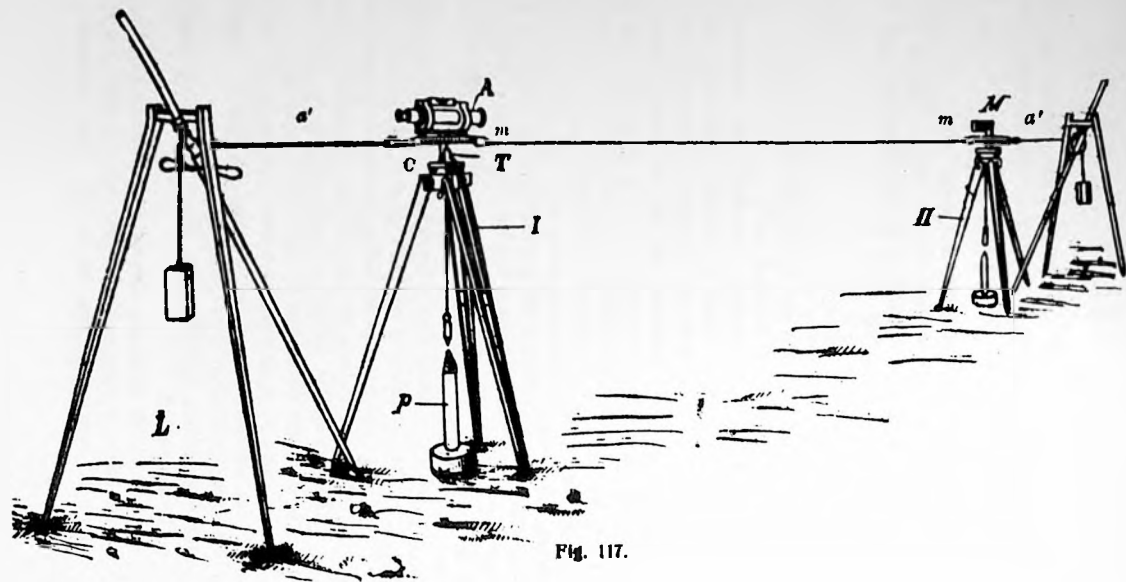


Fig. 117.

una palanca A directamente (fig. 118 a) y el otro extremo a una palanca B con una balanza a resorte C intermedia (fig. 118 b).

Los trozos de alambre son de 50 metros de longitud y para hacer una medida se clavan estacas, cuyo canto superior están

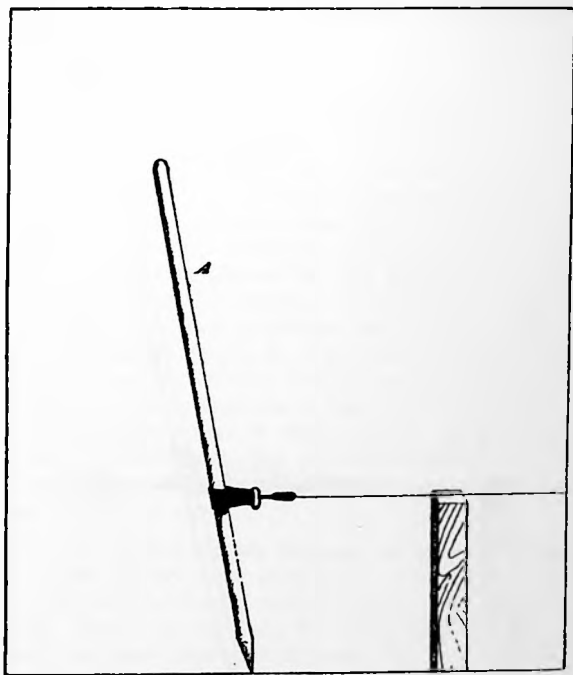


Fig. 118 a).

a la misma aliura, cada 50 ms. y sobre la alineación; el alambre se extiende entre dos estacas de manera que envase la parte superior de éstas y con las palancas se le dá la tensión de control. Una de las líneas de fé del alambre se hace coincidir con un trazo marcado en una planchita de cobre colocada sobre la estaca de atrás y sobre la planchia de la estaca de

adelante se hará una incisión en coincidencia con la línea de fé de adelante del alambre y así se repite las operaciones, to-

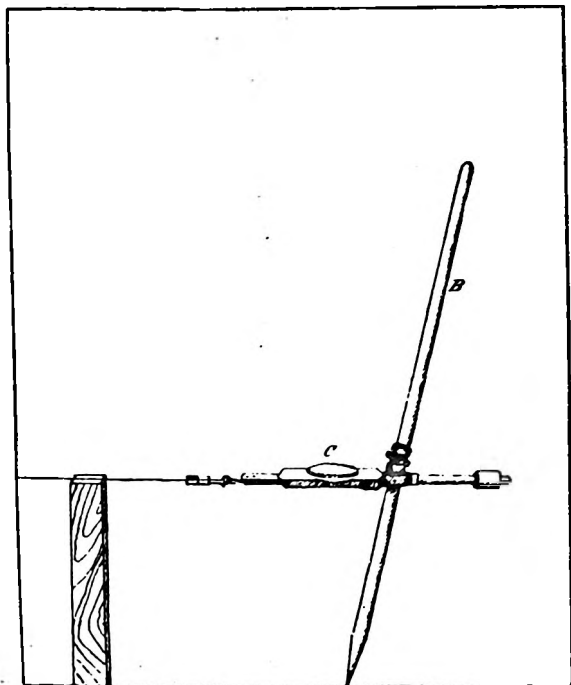


Fig. 118 h).

mando como origen la incisión hecha hasta medir toda la longitud.

Se hace una nivelación entre las estacas para corregir la medida por inclinación.

En general, el control de estos alambres se hace suspendiéndolos por la mitad, entonces se necesita colocar una estaca

intermedia con un clavo horizontal en una de las caras laterales y sobre el que se apoya el alambre por su centro, también se puede suspender con una tira o gancho.

El empleo del alambre Invar con los métodos de medida que le son propios permite obtener una precisión mayor de 1:100000.

**106. Empleo del alambre.** — El equipo para la medida se compone de dos operadores y los ayudantes. Colocado el tripode director I sobre el piquete de salida, se monta en éste el anteojo, se visa el jalón que debe haber en el otro extremo de la longitud a medir y se coloca otro piquete a 24 o 96 m. y en la enfilación; sobre éste se coloca el tripode director II con la mira, se determina la pendiente y después se saca el anteojo y la mira, los ayudantes unen el alambre a los pesos cuyas cuerdas están pasadas por los tensores, los operadores hacen después 5 o 10 lecturas simultáneas de la reglita para lo cual uno de ellos hace un silbato; en cada lectura se desplaza un poco longitudinalmente la regla; la diferencia de lecturas no debe ser mayor de  $0^{\text{mm}}3$  o  $0^{\text{mm}}4$ . Después de la primera medida se coloca el anteojo en el tripode II y se lleva adelante el I en el que se coloca la mira, repitiéndose la operación como para el primer tramo. En el último tramo si la longitud no es exactamente un múltiplo de 24 o 96 habrá que emplear un alambre de 8 o 4 mts.

**107. Uso de la cinta en medidas de bases.** — Cuando no se dispone del alambre invar para medir una longitud que se necesita sea lo más exacta posible, puede aplicarse el método anterior usando una cinta de 25 mts. o 50 mts. Según el caso, después de haber jaloneado la alineación, se clavan piquetes a 25 o 50 ms. uno de otro y al hacer la nivelación entre ellos; los piquetes deben sobresalir de la tierra la misma longitud.

Sobre dos caballetes de madera de la misma altura se coloca una roldana en cada uno de ellos, por donde se pasa la cuerda asegurada a las manijas de la cinta por un extremo y en el otro se colocan pesos en total iguales a la tracción a que ha sido sometida la cinta al rectificarla, se hace coincidir mediante una plomada un extremo de la cinta con el piquete origen de la medida y simultáneamente el otro operador marca

sobre el piquete que debe estar debajo del otro extremo de la cinta un punto de referencia que servirá para hacer la coincidencia cuando se mida el segundo tramo.

El método ligeramente descrito es susceptible de muchas variantes según los elementos de que se dispone para la medida.

Cuando el terreno es horizontal o tiene una pendiente constante, puede hacerse la medida apoyando la cinta en el suelo, en este caso se le da la tensión amarrándole un dinamómetro en una de sus manijas, un operador hace coincidir una de ellas con la marca origen o de referencia de la medida anterior y el otro operador, obrando sobre el dinamómetro ejerce tracción hasta que indique la tensión a la que ha sido comprobada la cinta, entonces coloca la marca sobre el piquete o ficha en ese extremo de la cinta.

**108. Generalidades sobre el empleo de las reglas.**— Suele usarse también unidades rígidas en la medición de longitudes como son las reglas de madera o metálicas, las que se disponen en la alineación sea sobre caballetes o sobre el terreno.

Los reglones de madera tienen en general 2 a 4 ms.; para medir una longitud, después de limpiar bien el terreno sobre el cual pasa la alineación que ha sido piqueteada previamente, se unen los piquetes con un hilo y a lo largo de este se colocan sucesivamente los reglones, haciendo coincidir el extremo del primero con el piquete origen de la medida, el segundo se hace coincidir con el extremo del primero y así sucesivamente.

Debe tenerse mucho cuidado al llevar el segundo renglón a coincidir con el primero que éste no se desplace por chocar al aproximarlos.

La medida así obtenida será la distancia horizontal si el terreno tiene esa condición, sinó habrá que hallar la proyección de la medida directa teniendo en cuenta la pendiente.

Si el terreno tiene pendiente suave y uniforme entre los extremos de la medida, será suficiente tener en cuenta la pendiente entre ellos solamente, en otro caso conviene hacer una nivelación a lo largo de la alineación para aplicar parcialmente la pendiente que corresponde a cada tramo.



En los aparatos especiales para el uso de las reglas, con objeto de hacer medidas precisas, éstas van montadas sobre caballetes y se apoyan en una plataforma que permite ponerlas horizontal, las reglas son bimetálicas y no se llevan a contacto, al ponerlas una a continuación de la otra, para evitar desplazamientos por choque, se mide la separación entre ellas por medio de una cuña de vidrio graduada.

**109. Aproximación que se obtiene con los reglones.—**  
Cuando se hace la medida tomando todas las precauciones al preparar el terreno, limpiándolo bien de malezas y piedras y afirmándolo hasta dejarlo llano y unido y haciendo los contactos de los reglones con todo cuidado, mirando si al trasluz se vé claridad entre ellos; puede esperarse la siguiente exactitud, empleando renglones de 2 ms.  $\frac{1}{4000}$ ; y con los de 3 ms.  $\frac{1}{6000}$ .

---

## CAPITULO XI.

### MEDIDA INDIRECTA DE DISTANCIAS

110. Cuando el terreno es muy quebrado se hace muy difícil medir las distancias directamente con la cinta o la cadena extendiéndola sobre el suelo, con el objeto de subsanar este inconveniente se han construido aparatos, llamados *diastimométricos* con los cuales se consigue medir la recta que une dos puntos del terreno sin necesidad de recorrerlas. Con su uso no solo se consigue economía de tiempo, sino también de operadores, pues estando ligada toda medida de distancia con la orientación de la misma, se requieren dos operadores si se hacen las dos medidas simultáneamente; empleando aparatos diastimométricos ambas medidas las hace un sólo operador.

111. Estadía. — El principio de la estadimetría es el siguiente: la relación entre la longitud real  $H$  de un objeto a la distancia  $O H = D$  y la longitud aparente  $h$  a la distancia  $O h = d$ , con la única condición que  $H$  sea paralela a  $h$ , es constante.

De la semejanza de los triángulos con vértice común en  $O$  se deduce

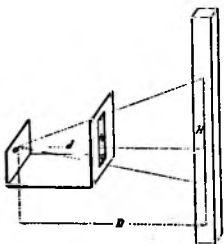


Fig. 119.

$$D = \frac{d}{h} H.$$

El valor de  $\frac{d}{h}$  que depende de la construcción del instrumento es constante y se hace igual a 200, 50, 10.

Si  $H$  es una regla graduada y el valor de  $H = 1$  metro,  $D$  será igual a 200, 50 o 10 ms. según el valor de  $\frac{d}{h}$ .

Este aparato se emplea muy poco en topografía y se aplica el mismo principio a los anteojos.

**112. Anteosjos estadimétricos.**—Dos hilos  $a a'$  (figura 120) puestos en el retículo y paralelos al hilo horizontal hacen la misma función que la ventanilla que da la longitud aparente en la estadía.

Sean  $a b$ , (fig. 121), los hilos del retículo y T una mira; para hacer una observación variarnos la distancia del retículo al objetivo hasta que la imagen del objeto que visamos se forme exactamente en el plano del retículo; luego la imagen de cualquier punto de la regla T, estando el anteojo enfocado, se formará en el plano del retículo. Sea L la lente objetiva y F el foco anterior; los puntos visados de la regla serán A y B.

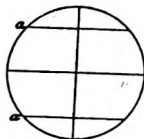


Fig. 120.

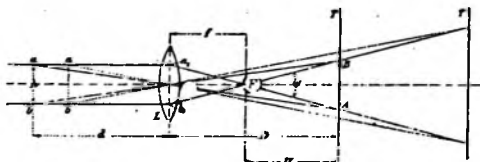


Fig. 121.

Estando el anteojo dirigido normalmente a la regla,  $a b$  es paralela a A B y

$$D = \frac{d}{h} H$$

la relación  $\frac{d}{h}$  no es constante, para un desplazamiento T a T',

para enfocar el anteojo habrá que variar la distancia, del objetivo al retículo, la nueva posición de este será  $a' b'$  hay que eliminar por lo tanto el valor  $d$  en la relación anterior, llamando  $D' = D - f$ , distancia de la regla al foco anterior F de la lente objetiva, de los triángulos F B A y F  $a_1 b_1$  se obtiene

$$D' = \frac{f}{h} H$$

$f$  y  $h$  son constantes, luego la medida de la longitud H sobre la mira, interceptada por los hilos del retículo, permite medir la distancia  $D'$ , es decir, la distancia al foco anterior

del objetivo, este punto al partir del cual la longitud  $H$  es proporcional a  $D'$ , es llamado *centro de analactismo*, (invariable) y el ángulo  $A F B$  que es proporcional, a  $D'$  es el *ángulo estadimétrico*.

En el triángulo  $a_1 b_1 F$ ;  $\frac{1}{2} h = f \tan \frac{1}{2} \omega$  y como  $\omega$  es muy pequeño  $h = f \omega$ , reemplazando el valor de  $\frac{f}{h}$  en el de  $D'$ .

$$D' = \frac{H}{\omega}$$

**113. Reducción al centro del instrumento.** — Lo que interesa es conocer la distancia del centro de estación del instrumento a la mira, es decir de la vertical del eje principal a la mira, hay que aplicar por lo tanto una corrección a la distancia que nos da el anteojo para obtener la distancia  $L$  que nos interesa.

Sea  $c$  la distancia del objetivo al eje principal.

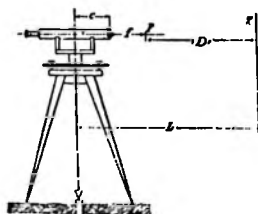


Fig. 122.

$$L = c + f + D$$

El valor  $c + f$  es la constante que se da para corregir la distancia que se obtiene con los anteojos estadimétricos. En estos anteojos el objetivo debe ser fijo y para enfojar el retículo, es este el que se debe desplazar moviendo el tubo porta-retículo.

**114. Analactismo central.** — Con el objeto de evitar la corrección anterior, por medio de un dispositivo ideado por el Coronel Porro se ha conseguido llevar el punto analactico sobre el eje principal del instrumento, de manera que, las distancias se obtienen directamente medidas desde el centro de estación.

Para conseguirlo se interpone entre el objetivo  $L$  y su foco  $F'$ , del lado del ocular, otra lente  $V$  cuyo foco  $F$  cae entre  $V$  y  $L$ , sea  $F$  su distancia focal (fig. 123).

Cualquiera que sea la posición del retículo enfocado ( $a_1 b_1$ ) ( $a_2 b_2$ ) ( $a_3 b_3$ ), correspondientes a las posiciones ( $A_1 B_1$ ) ( $A_2 B_2$ )

( $A_3 B_3$ ) de la mira, las visuales que pasan por  $a_1 a_2 a_3$  y  $b_1 b_2 b_3$  convergiendo en F inciden con el mismo ángulo en la lente L en A y B'; la refracción que sufren será la misma  $\lambda$  subtienden sobre las miras las longitudes  $H_1 H_2$  y  $H_3$ ; los rayos  $B_1, B_2, B_3$  y  $A_1, A_2, A_3$  prolongados como sinó hubiesen sido desviados, coinciden en el punto C.

Consideremos la posición de la mira en  $T_1$ , llamando  $d$  la

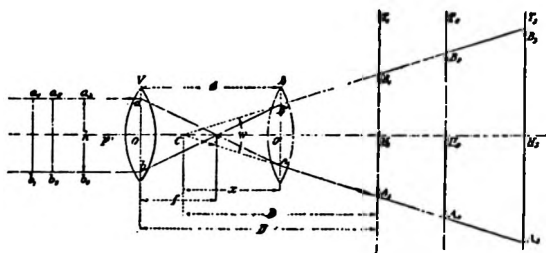


Fig. 125.

distancia entre las lentes,  $x$  la distancia entre el punto C y la lente objetiva L,  $\omega$  el ángulo estadimétrico constante, se tiene en el triángulo C  $A_1 B_1$ .

$$\frac{1}{2} H_1 = D \tan \frac{1}{2} \omega$$

En el triángulo C B' A       $\tan \frac{1}{2} \omega = \frac{\frac{1}{2} B' A}{x}$

»   »   »      F B' O       $\frac{1}{2} B' A = (d - f) \tan \angle B' F O$ .

»   »   »      a F O       $\tan \angle a F O = \frac{\frac{1}{2} h}{f}$

reemplazando en las anteriores

$$\tan \frac{1}{2} \omega = \frac{(d - f) \frac{1}{2} \frac{h}{f}}{x}$$

como  $\omega$  es muy pequeño

$$\omega = \frac{(d - f) \frac{h}{f}}{x}$$

La distancia  $x$  del centro de analactismo se toma igual a la distancia del eje principal a la lente objetiva del anteojo, quedan  $d$ ,  $f$  y  $h$  para hacer variar convenientemente para obtener el ángulo estadímetro  $\omega$  que deseamos;  $h$  queda limitado por el diámetro del tubo porta retículo,  $d$  por la longitud del anteojo y  $f$  por las condiciones (claridad, aumento, etc.) que debe llenar la lente.

**115. Rectificación del anteojo estadimétrico.**—Tenemos para estos  $D' = \frac{f}{h} H$ ,  $D' = D - f$ .

1) Si se conoce la distancia focal  $f$  de la lente objetiva, medimos a partir de la vertical del objetivo la distancia  $OK = 100 + f$ , hacemos la lectura  $H$  de la mira y tendremos.

$$D = D' - f = 100 \text{ ms.} = \frac{H}{\omega} \text{ y } \omega = \frac{H}{100}$$

El valor de  $\omega$  así obtenido, debe ser igual al dado para el instrumento; si no lo es y los hilos estadimétricos pueden desplazarse, se mueven convenientemente hasta conseguir que el valor de  $\omega$  lo iguale; si los hilos estadimétricos están grabados sobre cristal, es necesario trabajar con el nuevo valor de  $\omega$  o modificar las graduaciones de la mira pintándola nuevamente.

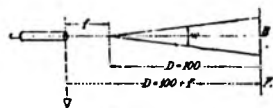


Fig. 124.

Sea  $\omega = 0.02$  o  $\frac{1}{\omega} = 50$  la constante; para la distancia 100 mts. debe tenerse  $100 = 50 H$ , si el ángulo estadimétrico no ha variado,  $H = 2$  mts.; si nos encontramos que  $H = 1.50$

$$100 = \frac{1.5}{\omega} \text{ y } \frac{1}{\omega} = 66.6$$

por lo tanto, para cualquier distancia, tendremos:

$$D' = 66.6 H'$$

Si dividimos la graduación 1.5 mts. en 100 partes y llamamos  $p$  a cada una de éstas:

$$100 = \frac{1.5}{\omega} = \frac{100 p}{\omega} y \frac{p}{\omega} = 1 m.$$

Si al medir otra distancia  $D_1$ , la longitud de mira es  $H_1$  que comprende  $n$  divisiones de la mira,  $H_1 = n p y$

$$D_1 = \frac{H_1}{\omega} = n \left( \frac{p}{\omega} \right) = n mts.$$

Lo que nos dice que si la escala está dividida en forma que cada división valga  $\frac{1}{\omega} = \frac{f}{h}$  no habrá sino que contar el número de ellas interceptadas por los hilos del retículo para tener el valor de la distancia en metros.

2. Si no conocemos la distancia focal  $f$ , sobre el terreno y a partir de la vertical del objetivo se determinan los puntos A y B a 100 y 200 metros exactamente, se coloca la mira y se leen las longitudes  $H_1$  y  $H_2$  interceptadas por los hilos del retículo.

Las longitudes  $H_1$  y  $H_2$  corresponden respectivamente a las distancias.

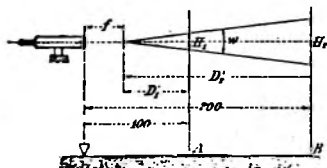


Fig. 125.

$$D'_1 = 100 - f y D'_2 = 200 - f,$$

luego

$$100 - f = H_1 \frac{f}{h} = \frac{H_1}{\omega}$$

$$200 - f = H_2 \frac{f}{h} = \frac{H_2}{\omega}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$f = 100 \left( 1 - \frac{H_1}{H_2 - H_1} \right) = 100 \left( 2 - \frac{H_2}{H_2 - H_1} \right)$$

$$h = H_2 - 2 H_1$$

$$\frac{f}{h} = \frac{1}{\omega} = \frac{100}{H_2 - H_1}$$

Con estas relaciones obtenemos el valor de todas las constantes del anteojo.

**116. Rectificación del analactismo central.** — Es necesario que el centro de analactismo coincida con la vertical del eje principal y que el valor de  $\frac{1}{\omega}$  sea el dado para el antejo.

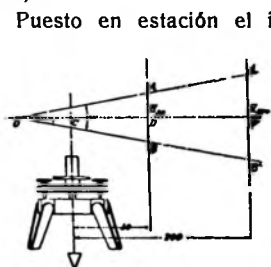


Fig. 126.

Puesto en estación el instrumento sobre un terreno horizontal medimos la distancia 50 y 200 mts. con una cinta a partir del centro de estación, donde colocamos la mira y hacemos las lecturas correspondientes H<sub>50</sub> y H<sub>200</sub> interceptada por los hilos del retículo, si el centro de analactismo O coincide con la vertical del eje principal y desde donde se han medido las distan-

cias 50 y 200 mts. debe tenerse  $\frac{200}{50} = \frac{H_{200}}{H_{50}}$

Si esto no se verifica es porque  $c$  no es el vértice común de los triángulos y por lo tanto no coincide con  $c$  el centro O de analactismo, se mueve convenientemente la lente analáctica hasta conseguir quede satisfecha la condición anterior.

Se halla después el valor  $\frac{1}{\omega} = \frac{D}{H}$  que debe ser igual al dado como constante del instrumento, esta operación es la verificación del ángulo diastimométrico. Si esto no se verifica recordemos el valor de

$$\omega = \frac{(d - f) \frac{h}{f}}{x}$$

Con la primera operación de llevar el centro de analactismo sobre el eje principal del instrumento, fijamos el valor de  $x$ , como la lente está dada, el valor de  $f$  es determinado,  $d$  no podemos variarlo, solo nos queda variar la distancia de los hilos del retículo  $h$ , para llevar a  $\omega$  a su valor dado o sinó graduar la mira nuevamente.



**117. Determinación de la distancia por diferencia de pendiente.** — En los instrumentos preparados para este objeto, el anteojo puede moverse en un plano vertical y el retículo tiene un solo hilo horizontal; la distancia se deduce de dos maneras.

1. *Con ángulo estadimétrico constante y lectura de mira variable.* — Se apunta a una graduación de la mira, luego se desliza el anteojo verticalmente con cierto número de divisiones sobre una regla graduada o con un tornillo micrométrico con tambor graduado; se hace una segunda lectura de la mira, la diferencia de las dos lecturas de acuerdo con el coeficiente correspondiente al desplazamiento vertical del anteojo, nos da la distancia horizontal.

Si  $OA$ ,  $OA'$  es la distancia horizontal de la mira, fig. (127);  $B B'$  las lecturas correspondientes a la primera visual y  $b$  la de

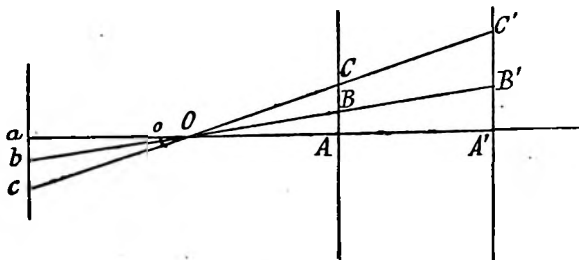


Fig. 127.

la escala de desplazamiento;  $C$ ,  $C'$  y  $c$  las lecturas correspondientes a la segunda colimación de la mira.

$$\frac{C' B'}{c b} = \frac{O B'}{O b} = \frac{O A'}{O a} ; \quad \frac{C B}{c b} = \frac{O B}{O b} = \frac{O A}{O a}$$

luego

$$O A' = C' B' \frac{O a}{c b} = \frac{C' B'}{\omega} ; \quad O A = C B \frac{O a}{c b} = \frac{C B}{\omega}$$

La relación  $\frac{c b}{O A} = \omega$ , se toma de manera que cada división o cierto número de divisiones de la escala  $c b = 0.01 O a$ , es decir  $\omega = 0.01$  y la distancia horizontal  $D = 100 H$ , llamando  $H$  la diferencia de lectura de la mira.

2. *Con ángulo estadimétrico variable y lectura constante.* — La mira no necesita graduación, tiene dos índices fijos a la distancia H.

Siendo  $\omega$  el ángulo que necesita girar el anteojo para visar ambos índices de la mira y D la distancia;  $D = \frac{H}{\omega}$

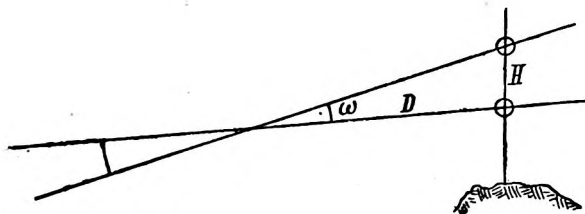


Fig. 128.

Siendo  $n$  el número de vueltas y fracción de vueltas que ha tenido que hacer el tornillo micrométrico para girar al anteojo el ángulo  $\omega$  se puede poner

$$\omega = n \alpha$$

donde  $\alpha$  es una constante a determinar

$$D = \frac{H}{n \alpha}$$

$$\alpha = \frac{H}{n D}$$

Para determinar  $\alpha$  se mide directamente con una cinta sobre el terreno, varias longitudes D y con las lecturas de las graduaciones del tambor del tornillo micrométrico se hallan los valores correspondientes de  $n$ ; con D, H y  $n$  se tendrá varios valores de  $\alpha$ , se toma el promedio.

**118. Miras y retículo.** — Anteriormente se dijo que siendo  $p$  el valor de una división de la mira, correspondiente a la centésima parte de la longitud H de la misma, que subtiene los hilos del anteojo estadimétrico cuando se coloca la mira a 100 ms. de distancia; era suficiente leer el número de divisiones comprendidas entre los hilos del retículo para hallar la distan-

cia de la mira en cualquier otra situación de esta; en estas condiciones  $p = \omega \times 1$  metro y  $D = \frac{n p}{\omega}$ , siendo  $n$  el número de divisiones subtenidas por los hilos estadimétricos.

Con las miras comunes de 4 metros a lo sumo, siendo  $\omega$  el ángulo diastimométrico,  $\frac{4}{\omega}$  es la máxima distancia que puede medirse; para  $\omega = 0.01$ , esta distancia será 400 metros, a esta distancia los hilos del retículo abarcan toda la longitud de la mira, si alejamos ésta se hará imposible su lectura; conviene por lo tanto disponer en el mismo anteojo otro par de hilos en el retículo que nos dé un ángulo diastimométrico conveniente para cuando hay que medir distancias mayores de 400 mts., supongamos que el nuevo valor sea  $\omega = 0.005$ , cuando la mira está a 100 mts. los hilos subtienden  $0^m50$  de la misma y para su longitud de 4 metros, podrá llevarse ésta hasta la distancia  $\frac{4}{0.005} = 800$  metros, mas allá los hilos no subtienden la longitud de la mira.

Si la mira la ponemos a 350 mts. las lecturas que hacemos con cada par de hilos correspondientes a 0.01 y 0.005, serán respectivamente:  $H = 3.50$  mts. y  $H = 1.75$  mts., como comprobación puede hacerse las dos lecturas con objeto de tener más seguridad en no haberse equivocado en la operación, pero más exactitud se obtiene leyendo con el ángulo diastimométrico 0.01, es decir con la lectura que abarca más divisiones de la mira, pues si hemos cometido un error de lectura de  $0^m002$ , el error en distancia para  $\omega = 0.01$  es  $0^m2$  y para  $\omega = 0.005$  es  $0^m4$ .

Se acostumbra subdividir el campo del retículo con cinco hilos horizontales; en algunos instrumentos se establecen equidistantes (fig. 129) y en otros equidistantes dos a dos del hilo central (fig. 130).

A cada par de hilos corresponde los siguientes valores de  $\omega$ .

Instrumentos, retículo fig. 129.

$$\left. \begin{array}{l} a - b \\ b - c \\ c - d \\ d - e \end{array} \right\} \omega = 0.005 \quad \left. \begin{array}{l} a - c \\ c - e \\ b - d \end{array} \right\} \omega = 0.001$$

Instrumentos, retículo fig. 130.

$$\left. \begin{array}{l} a - d \\ b - e \end{array} \right\} \omega = 0.01 \quad \left. \begin{array}{l} a - b \\ d - e \end{array} \right\} \omega = 0.008 \quad b - d \left\} \omega = 0.004$$

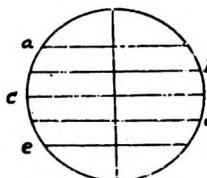


Fig. 129.

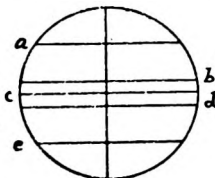


Fig. 130.

El hilo central  $c$  en muchos instrumentos no está referido a  
segundo retículo, su objeto es,  
hacer la lectura en la mira  
corresponde a la altura del  
anteojo, el observador; la lectura de la  
anteojo es la diferencia de nivel en-  
tre los

Para la mira se emplean diferentes siste-  
mas, su espesor es 2 cm., 1 cm. o  $1\frac{1}{2}$  cm. Algunas tienen  
graduaciones especiales, como las Porro en las que teniendo  
en cuenta la relación entre los espesores de las rayas y los  
intervalos, se hace la aproximación de la lectura; en todas las  
miras Porro esa relación es de 1 a 5.

Siempre que se deba hacer observaciones estadimétricas,  
al rectificar el instrumento o para conocer el valor de los án-  
gulos diastimométricos y las graduaciones de la mira; se mide  
100 mts. con una cinta y se hace la lectura correspondiente  
de la mira con cada par de hilos, el observador se dará cuenta  
así de las reglas que debe aplicar para no equivocarse en el  
resultado.

119. A continuación se describen las miras Porro:

1) Unidad de 4 cms. dividida en dos partes. (*Graduación N.º 1*). El último intervalo de mira es dos centímetros, que en la unidad de mira es igual a 0,50; espesor de las rayas  $\frac{1}{5}$  de 2 cm. es decir 4 mm. El espesor de las rayas es por consiguiente 0,10 de la unidad de la mira, el medio espesor es 0,05. Para unidad de estima se toma aquí el espesor de la raya. Por lo tanto si un hilo se ve en la posición *a* se debe leer 40,50 y medio espesor de raya es decir 40,55. En la posición *b* se lee 40,50 y un espesor de raya es decir 40,60; en la posición *c* se leerá 41 menos un espesor y medio es decir menos un décimo y medio, por consecuencia 40,85.

2) Unidad de 4 cm. dividida en cinco partes. (*Graduación N.º 2*). El último intervalo de mira es pues de 8 mm. y en la unidad de mira es = 0,20. Espesor de raya  $\frac{1}{5}$  de 8 mm. es decir mm. 1,6. El espesor de raya en unidades de mira es  $\frac{1}{5}$  de 0,20 =  $\frac{4}{100}$ ; medio espesor  $\frac{2}{100} = 0,02$ . Por consiguiente en la posición *a* se leerá 40,60 y un medio espesor de raya es decir dos céntimos o sea 40,62; en la posición *b* 40,60 y un espesor medio de raya es decir  $40,60 \times 0,06 = 40,66$ ; en la posición *c* se leerá 40,80 menos dos medios espesores de raya, es decir menos 4 céntimos o sea 40,76. Como se ve se toma aquí por unidad de estima el medio espesor de raya y entonces no se hace más que doblar.

3) Unidad de 4 cm. dividida en diez partes (*Graduación N. 3*). El último intervalo de mira es por consiguiente de 4 mm. es decir 0,10 de unidad de mira. Espesor de raya  $\frac{1}{5}$  de 4 mm. es decir, 0,8 mm.; 0,20 de la unidad de mira. Si se ve un hilo en la posición *a* se debe leer 40,40 y un espesor de raya, es decir, 0,02 más y por consiguiente 40,42; en la posición *b* tendremos 40,50 y un espesor y medio de raya, es decir tres céntimos más, o sea 40,53.

GRADUACIÓN N.º 1

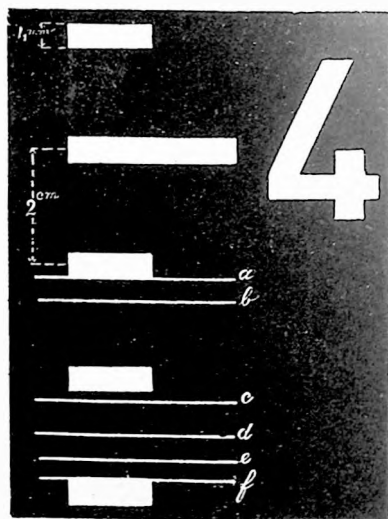
Lectura  $a = 40.55$   
 »  $b = 40.60$   
 »  $c = 40.85$   
 »  $d = 41.15$   
 »  $e = 41.45$   
 »  $f = 41.45$

GRADUACIÓN N.º 2

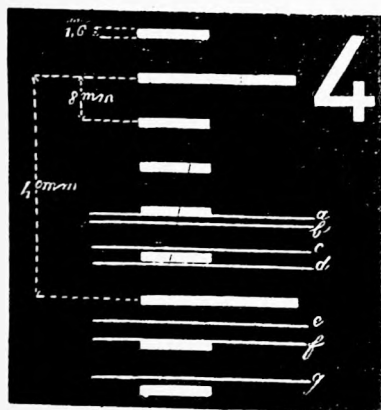
Lectura  $a = 40.62$   
 »  $b = 40.66$   
 »  $c = 40.76$   
 »  $d = 40.84$   
 »  $e = 41.10$   
 »  $f = 41.18$   
 »  $g = 41.34$

GRADUACIÓN N.º 3

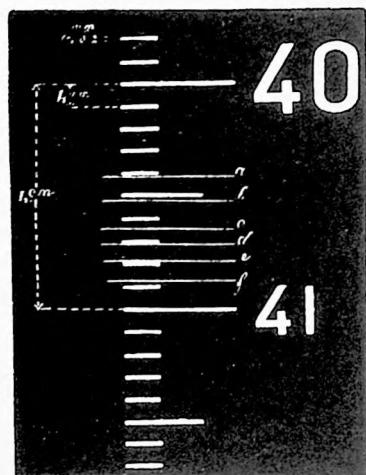
Lectura  $a = 40.42$   
 »  $b = 40.55$   
 »  $c = 40.65$   
 »  $d = 40.71$   
 »  $e = 40.79$   
 »  $f = 40.87$



Graduación N.º 1.



Graduación N.º 2.



Graduación N.º 3.

120. Alcance de los aparatos estadimétricos. — Usando miras de 4 mts. de longitud, y valores del ángulo estadimétrico:

$$\omega = 0.02, 0.01, 0.005, 0.004$$

las distancias máximas a que se podría poner la mira sin que los hilos del retículo del anteojo dejen de abarcarla, serán respectivamente:

$$200, 400, 800 \text{ y } 1000 \text{ mts.}$$

La ampliación del anteojo y la condición de que siempre pueda apreciarse en la lectura de la mira el valor de media división de ella, modifica los alcances anteriores.

Una división de la mira  $d$ , a la distancia  $D$ , es vista bajo un ángulo  $\varphi$ , que por ser pequeño, se tendrá:

$$d = D \varphi \text{ sen } 1''.$$

De acuerdo con lo dicho al tratar la potencia de la vista  $\varphi = \frac{\Sigma}{A}$ , siendo  $\Sigma = 60''$  y  $A$  el aumento del anteojo

$$D = \frac{d}{60 \text{ sen } 1''} A.$$

Queriendo apreciar  $\frac{1}{2} d$  para miras graduadas en 0.005, 0.01, 0.02; la fórmula anterior dá:

$$D = 8.5 A, 17 A, 34 A.$$

En el cuadro siguiente se han puesto los alcances calculados con estas relaciones para valores de la ampliación del anteojo de 10, 20, 40 y 70 diámetros.

<i>Graduación de la mira</i>	0.005	0.01	0.02
D	8.5 A	17 A	34 A
A = 10 diam.	85	170	340
= 20 "	170	340	680
= 30 "	340	650	1560
= 70 "	595	1390	2580

Debido a la desigual claridad con que se vé la imagen

de las divisiones de la mira, la que sabemos que es inversa de la amplificación del anteojo y depende de las condiciones atmosféricas, experimentalmente se ha determinado los siguientes alcances prácticos en las condiciones medias de visibilidad, entendido siempre que se quiere apreciar con seguridad la mitad del valor de la mínima división de la mira.

<i>Graduación de la mira</i>	0.005	0.01	0.02
A = 10	50	80	125
= 20	100	125	175
= 40	200	250	300
= 70	250	325	400

**121. Aproximación en las distancias.**—Hemos establecido la distancia teórica y práctica que para un aumento  $A$  del anteojo y una graduación  $d$  de la mira; ésta se puede alejar, obteniendo la lectura con exactitud de media división; con estas condiciones podemos apreciar la lectura con una aproximación de  $\frac{1}{4}$  de división. Si el error de  $\frac{1}{4}$  de división se comete en el mismo sentido con cada uno de los hilos, como las lecturas correspondientes a ellos se restan el error se anulará; pero en el caso más desfavorable, que es el que consideraremos, en que estos errores tengan sentido contrario se sumarán y su suma será igual a media división de la mira.

Como la lectura de la mira la multiplicamos por  $\frac{1}{\omega}$  para obtener la distancia, el error máximo que podemos cometer en la medida es:  $\frac{\frac{1}{2} d}{\omega}$ , cuando empleamos las miras a la distancia teórica o práctica dada anteriormente.

Para  $\omega = 0.02$  y  $d = 0.02$ ;  $\frac{\frac{1}{2} d}{\omega} = 0.50$ , es esta la aproximación en la distancia que corresponde al alcance máximo teórico de 340 mts. o práctico de 125 mts. cuando se tiene la seguridad de apreciar  $\frac{1}{2} d$ .

Por unidad de distancia la aproximación es

$$\frac{0.50}{340} = \frac{1}{680} \text{ y } \frac{0.50}{125} = \frac{1}{250}$$



En el cuadro siguiente se han puesto las aproximaciones teniendo en cuenta los alcances prácticos para ampliaciones del anteojo iguales a 10, 20, 40 y 70.

		$d = 0.005$	$d = 0.01$	$d = 0.02$
A		$\frac{1}{w} d = 0.125$	$\frac{1}{w} d = 0.25$	$\frac{1}{w} d = 0.50$
10	$\omega = 0.02$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{320}$	$\frac{1}{250}$
20		$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{350}$
40		$\frac{1}{1600}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{600}$
70		$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{800}$
		$\frac{1}{w} d = 0.25$	$\frac{1}{w} d = 0.50$	$\frac{1}{w} d = 1.$
10	$\omega = 0.01$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{125}$
20		$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{175}$
40		$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{300}$
70		$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{650}$	$\frac{1}{400}$
		$\frac{1}{w} d = 0.5$	$\frac{1}{w} d = 1.$	$\frac{1}{w} d = 2.$
10	$\omega = 0.005$	$\frac{1}{100}$	—	—
20		$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{125}$	—
40		$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{150}$
70		$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{325}$	$\frac{1}{200}$
		$\frac{1}{w} d = 0.62$	$\frac{1}{w} d = 1.25$	$\frac{1}{w} d = 2.50$
10	$\omega = 0.004$	—	—	—
20		$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{100}$	—
40		$\frac{1}{520}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{120}$
70		$\frac{1}{410}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{150}$

Los valores que no están indicados son menores que  $\frac{1}{100}$

En el cuadro anterior se vé la influencia del aumento del anteojo, valor de la división de la mira y del ángulo diastimométrico.

Con un anteojo de 40 aumentos, empleando una mira de 0.01, cometeremos un error máximo de 1 m. para las siguientes distancias, 1000, 500, 250 y 200 según empleemos ángulos diastimométricos de 0.02, 0.01, 0.005 y 0.004; luego la conveniencia de emplear el máximo valor de  $\omega$  compatible con la distancia, es decir, siempre el par de hilos extremos con los que se puede hacer la lectura de la mira, lo que ya habíamos dicho. Del examen del mismo cuadro se deduce que no debe usarse anteojos de menos de 20 aumentos cuando  $\omega = 0.005$  o 0.004 por ser la aproximación menor que  $\frac{1}{100}$ .

También se usa la fórmula siguiente para hallar el error temible en la determinación de la distancia horizontal con un anteojo de ángulo estadimétrico constante

$$e = \pm 0.000776 \frac{D}{w A \sqrt{n}}$$

Donde A es el aumento del anteojo,  $n$  el número de hilos del retículo y  $w$  la constante.

Cuando se trata de instrumentos de ángulo estadimétrico variable

$$D = \frac{H}{w}$$

donde H es la constante y  $w$  la variable; reemplazando el valor  $w$  en la anterior

$$e = \pm 0.000776 \frac{D^2}{H A \sqrt{n}}$$

En el caso primero el error es directamente proporcional a la distancia y en el segundo caso es proporcional al cuadrado, de donde resulta la inferioridad de los aparatos de este tipo con respecto a los del primero.

**122. Medida en terrenos inclinados.** Hemos visto como se obtiene la distancia directa entre el punto en que se instala el anteojo y el que se ha colocado la mira normalmente al eje de aquel.

Si los puntos entre los cuales se quiere medir la distancia se encuentran al mismo nivel, el instrumento nos dá el valor de la distancia horizontal siempre que coloquemos el anteojo horizontal. y la mira vertical. Pero en el caso en que los dos puntos se encuentren a diferente altura, su distancia horizontal se obtiene por el procedimiento siguiente.

Colóquese la mira vertical en P, (fig. 132) y en O el anteojo. Sea  $ab$  la parte de regla interceptada por los hilos del retículo cuyo ángulo diastimométrico es  $\omega$ ; llamamos  $D'$  a la distancia  $OC$ ,  $D$  a la  $OE$ , y  $z$  el ángulo zenital.

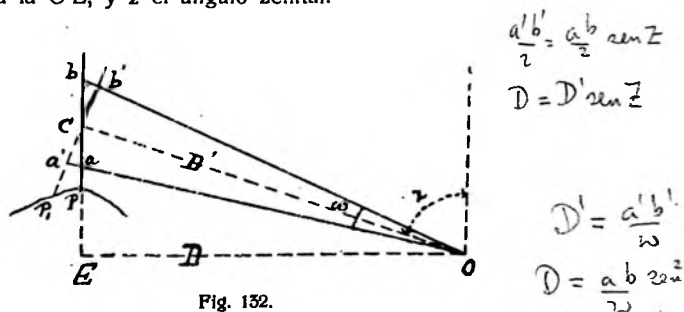


Fig. 132.

Si la mira ocupase la posición  $P_1 C$  normal a la dirección del anteojo, tendríamos:  $D' = \frac{a'b'}{\omega}$ , del pequeño triángulo  $C b b'$  que puede, sin error apreciable, considerarse rectángulo en  $b'$  por lo pequeño que es  $\omega$ , deducimos:

$$\frac{a'b'}{2} = \frac{ab}{2} \text{sen } z$$

y del triángulo rectángulo  $OCE$ ,  $D = D' \text{sen } z$ . De estas igualdades se obtiene:

$$D = \frac{ab}{\omega} \text{sen}^2 z$$

y como el valor de  $ab$  está dado por la diferencia de lecturas, podemos hallar rápidamente la distancia horizontal.

Para facilitar el cálculo de la fórmula hay construidas tablas que dan el valor de  $D$  en función de  $\left(\frac{a \ b}{\omega}\right)$  y  $z$ , otras tablas están calculas en funciones de  $\left(\frac{a \ b}{\omega}\right)$  y  $\alpha = 90 - z$ , siendo, por lo tanto,  $D = \left(\frac{a \ b}{\omega}\right) \cos^2 \alpha$ .

**123. Taquímetros.**—El anteojo analáctico que hemos estudiado se aplica a algunos teodolitos y con su correspondiente mira sirven para medir indirectamente las distancias y, con su círculo azimutal los ángulos horizontales. Bajo esta forma es que se aplica la taquimetría en los levantamientos hidrográficos, sobre todo en los trabajos de poligonal.

Con el objeto de evitar la reducción de la lectura de la mira, que hay que multiplicarla por el ángulo diastimométrico para obtener la distancia, se han construido aparatos que la dan directamente, llamados autoreductores basados en principios distintos, sus ventajas son discutibles y no se usan en nuestra marina.

Para trabajar en buenas condiciones con un taquímetro a parte de la comprobación de su analactismo y del valor de sus constantes debe cuidarse la perfecta rectificación del instrumento como teodolito que es.

Algunos taquímetros llevan en el anteojo un ocular móvil delante del retículo con un tornillo de aproximación que lo desplaza en sentido vertical. Este dispositivo permite al observador llevar siempre el ocular frente al hilo que está leyendo.

Además, el nivel principal vá montado en el anteojo sobre pernos móviles. El empleo de este nivel para poner vertical el eje principal se hace como sigue: se pone el instrumento con el eje principal aproximadamente vertical centrando en dos posiciones normales entre ellas, el nivel de alidada; luego, se pone el nivel de anteojo paralelo a dos tornillos de plataforma y se centra la burbuja del nivel principal con el tornillo de elevación del anteojo, se gira 180° la alidada, si la burbuja no queda centrada, se corregirá la mitad de su desplazamiento con los tornillos de plataforma y la otra mitad con el tornillo de elevación del anteojo.

Llevando el nivel en dirección del 3er tornillo calante, se centrará la burbuja. Estas operaciones se repiten en el mismo orden hasta que la burbuja quede siempre centrada cuando se hace girar lentamente un giro completo a la alidada; después se centra con sus propios tornillos el nivel de alidadas.

Hecho esto el nivel principal estará vertical y normal a la tangente del centro de nivel, pero aún no se habrá puesto esta normal central paralela al eje óptico del anteojo para que la visual sea horizontal, esta operación se hará con una nivelación recíproca, tal como se indica en el capítulo de Niveles.

Para poner el eje óptico en el plano normal al eje secundario y este último perpendicular al principal, se procede como se ha indicado en el 56, 2º y 3º.

**124. Comparación entre la medida directa e indirecta de distancias.**—Examinando el cuadro de la página 160 se ve que se pueden medir con los anteojos estadimétricos distancias de 200 a 325 ms. con una aproximación variable de  $\frac{1}{200}$  a  $\frac{1}{1500}$ , estos límites están suficientemente separados para dar gran elasticidad al método, haciéndolo apto en casi la totalidad de las operaciones topográficas, eligiendo convenientemente el instrumento que debe usarse.

En las medidas con cinta la aproximación varía entre  $\frac{1}{1800}$  en terrenos preparados a  $\frac{1}{600}$  y para la cadena entre  $\frac{1}{800}$  y  $\frac{1}{400}$ . Con el anteojo estadimétrico siempre será posible alcanzar más exactitud que con la cadena y en general se obtendrá la misma que con la cinta y aún mayor, pues para la cinta la aproximación de  $\frac{1}{1800}$  se obtiene en medidas hechas con sumo cuidado, mientras que para los anteojos estadimétricos, cualquiera que sean las condiciones del terreno, con tal que la mira y el retículo estén convenientemente iluminados, puede conseguirse siempre la misma exactitud. Por otra parte el juego de hilos del retículo permite sin mayor trabajo ni pérdida de tiempo tener varios valores de la distancia, esto unido a la ventaja que es suficiente un operador para obtener la

orientación y medida de la longitud de una línea, hace que el método taquimétrico, en las operaciones que es factible, poligonales y relevamiento de detalles del terreno, sea preferido a las mediciones con cinta, en las que se necesitan dos operadores, a menos que uno solo haga las medidas azimutales y longimétricas sucesivamente con evidente pérdida de tiempo.

**125. Determinación de la distancia entre dos puntos con el taquímetro.**—El método más simple para determinar la distancia entre dos piquetes de las estaciones A y B, (fig. 133), consiste evidentemente en leer sobre una mira colocada en B, cuando el instrumento está en A; colocar después la mira en A y el instrumento en B con lo que se obtiene un nuevo valor de la distancia A B.

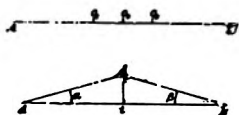


Fig. 133.

Cuando la distancia A B es mayor que aquella a la cual se pueden hacer convenientemente las lecturas de la mira, se colocará en la alineación A B, en  $o_1, o_2, o_3$  sucesivamente la mira; las lecturas correspondientes nos dan las distancias  $Ao_1, Ao_2, Ao_3$ ;

llevando el instrumento a B y volviendo a colocar exactamente la mira en  $o_1, o_2$  y  $o_3$ , medimos  $Bo_1, Bo_2$  y  $Bo_3$ , que sumadas a las anteriores nos dan tres valores de A B. Las distancias  $o_1 o_2$  y  $o_2 o_3$  pueden ser de 1 m. más o menos. El inconveniente de este método es que  $o_1, o_2, o_3$  no estén exactamente en la alineación A B; supongamos (fig. 133) que esté en I, formando los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  con la alineación A B.

Las distancias medidas son A I y B I; lo que nos interesa son sus proyecciones sobre A B.

$$A i = A I \cos \alpha$$

$$B i = B I \cos \beta$$

$$A B = A I \cos \alpha + B I \cos \beta$$

Si se han medido los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se puede calcular A B; pero en general este cálculo no se hace, sino que se determina previamente que error se puede cometer en la alineación sin que afecte la precisión que se quiere obtener en el resultado.

De la (fig. 133) se tiene

$$\overline{A I}^2 = \overline{A i}^2 + \overline{I i}^2$$

$$\begin{aligned} \text{haciendo.} \quad I i &= x, \quad A i = A I - \epsilon \\ \overline{A I}^2 &= \overline{A I}^2 + \epsilon^2 - 2 A I \epsilon + x^2 \end{aligned}$$

El error  $\epsilon$  es muy pequeño, podemos despreciar el valor de  $\epsilon^2$  y tenemos

$$\epsilon = A I - A i = \frac{x^2}{2 A I}$$

La corrección  $\epsilon$  es por lo tanto inversamente proporcional a  $A I$ . Supongamos que como mínimo los golpes de mira se hacen a 50 ms. y que el error tolerable en  $A I - A i$  para 50 ms. sea 0<sup>m</sup>01, obtendremos el valor de  $x$  de la relación

$$0.01 = \frac{x^2}{2 \times 50}$$

Se obtiene  $x = 1$  m. Por consiguiente los radios vectores de 50 ms. admiten un desplazamiento de 1 m. de la alineación sin que el error supere a 0.01 fijado como máximo. El valor 0.01 en 50 ms. representa 0.2 m en 1000 ms.

También suele determinarse los valores de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  máximos para que el error sea menor que la precisión establecida.

Supongamos el caso de las poligonales en que la tolerancia es  $\frac{4}{1000}$ .

Se debe tener

$$\frac{A I - A i}{A I} < \frac{4}{1000}$$

pero

$$A i = A I \cos \alpha$$

luego

$$1 - \cos \alpha < \frac{4}{1000}$$

$$\cos \alpha > 0.996.$$

Lo que nos indica que  $\alpha$  no puede ser mayor de 5°.

El observador al hacer la lectura de la mira, lee al grado la graduación que corresponde al círculo azimutal, apuntado el anteojo a  $I$  y como tiene la lectura azimutal que corresponde a  $B$  se cerciora que el ángulo  $B A I$  no sea mayor que 5°.

## CAPITULO XII.

### MIRAS Y NIVELES

**126. Miras.**—Son reglas graduadas, cuya longitud varía de 2 a 6 ms. como máximo que son el complemento indispensable de ciertos instrumentos como son los niveles y los anteojos estadimétricos. Las que se usan con los niveles están siempre graduadas en escala métrica, siendo su longitud 4 ms., como máximo y constituidas por uno o más trozos de madera.

Se dividen en miras parlantes y de corredera, con las primeras el observador que maneja el instrumento hace las lecturas de la mira con el anteojo que observa; con las segundas necesita un ayudante que haga las lecturas de la mira, este sistema no se utiliza en las operaciones hidrográficas.

Las miras se construyen de madera, abeto ordinario o pino blanco y en distintas experiencias que se han hecho, estudiando las causas que influyen en la variación de su longitud, se ha llegado a la conclusión de que las miras pintadas varían menos que las cocidas en aceite o dejadas al estado natural, siendo la acción de la temperatura la misma para unas y otras. El alargamiento que experimentan puede considerarse proporcional a la temperatura, dentro de los límites ordinariamente observados en las operaciones en el terreno 10° a 60°; variando la temperatura entre 60 y 100°, no varía la longitud de la mira.

Debido a la humedad también experimenta variación la longitud de las reglas y se ha comprobado que el coeficiente de variación higrométrica es más o menos constante entre 10 % y 60 % de humedad relativa.

La corrección por variación de temperatura y estado higrométrico no puede hacerse teniendo en cuenta coeficientes que puedan deducirse para una regla por cuanto las condiciones en que está la madera no corresponde a las de la observación; fácilmente se comprende que para la misma capa de pintura que las cubre, debe haber retardado a la



acción de la temperatura y la humedad sobre las fibras de la madera.

La corrección se deduce haciendo el contraste de las reglas antes y después de una campaña en el observatorio y todos los días en forma menos exacta; esta corrección solo se aplica en la nivelación de precisión; en los trabajos hidrográficos no es necesario hacerlo en ningún caso.

La graduación de la mira depende de la precisión del trabajo a efectuar, el valor de sus divisiones varia desde 1 cm. a 2 mm.; las principales condiciones que debe llenar una buena división, es que ofrezca el máximo de visibilidad compatible con el tamaño de las mismas y que las cifras sean de forma característica y colocadas de manera que no se puedan producir errores de lectura.

La disposición alternada de cada decimetro de las divisiones que muestra la figura 134 es muy ventajosa.

**127. Mira parlante.** — Se compone esta mira de tres cuerpos (fig. 134), *a*, *b*, *c*, el primero de 1<sup>m</sup> 500, recibe en su interior al segundo *b*, que puede correr a lo largo de él, hasta llegar al punto donde se verifica el ajuste de un botón *z* de resorte que lleva el cuerpo *b* en su base con el taladro hecho en la cantonera superior de *a*.

El tercer cuerpo *c* está instalado dentro de *b*, como lo está este dentro de *a*, la menor división en este sistema de miras es de 1 cm. y para utilizarla, se coloca verticalmente en el punto de observación y si la altura del primer cuerpo no es suficiente, se procederá a sacar el 2° y 3°, la lectura que se haga con el anteojo, es la que debe anotarse sin necesidad de reducción, por cuanto las graduaciones son continuas a partir del pie del primero. La altura de estas miras son en general de un total de 4 mts. Esta mira es muy cómoda para su transporte, pero

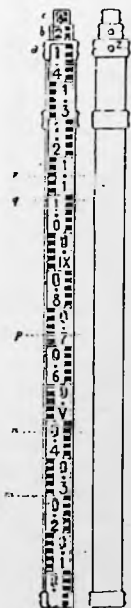


Fig. 134.

muy poco precisa debido al propio sistema de variabilidad de su longitud y sólo sirve para determinar diferencias de nivel entre puntos cercanos y en cuyo resultado no se necesita gran exactitud.

En las operaciones de precisión se usan reglas enteras de 3 mts. de forma triangular, de T o doble T, con el objeto de que no tomen curvatura, lo que fácilmente se comprueba uniendo sus extremos por un hilo en tensión y midiendo la flecha que hace con la mira; si ésta excede de 5 mm., se desecha. Estas miras están provistas de tripode o vientos que permite fijarlas verticalmente sin necesidad de que durante el trabajo tenga un hombre que mantenerlas en esa po-

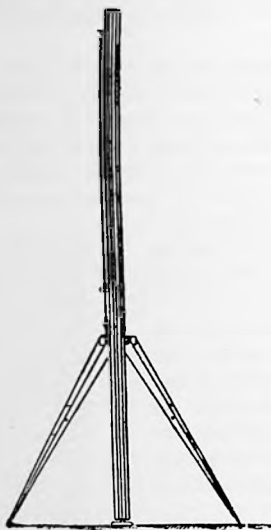


Fig. 135.

sición (figura 135), y están provistas de un nivel esférico o plomada para obtener la verticalidad y un dispositivo en su base mediante el cual no se apoyan directamente en el suelo, sino sobre una pieza sobre la cual puede girar, (fig. 136).

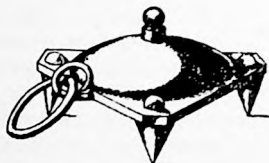


Fig. 136.

**128. Verificación de las miras.** — Esta operación debe hacerse en la División de Hidrografía, antes de iniciarse un trabajo y después de terminarlo, consiste en la compara-

ción directa de la mira con un metro patrón mediante el comparador fijo.

Sobre una regla R R van montados a corredera dos soportes verticales A y B que llevan un microscopio. Se desplaza A y B hasta que el hilo del retículo del anteojo coincida con la graduación 0 y 100 del metro patrón P, luego haciendo deslizar la mira en su alojamiento se hacen las lecturas de la misma correspondientes, la diferencia entre la longitud del metro, corregida por temperatura y la longitud de la mira es la corrección.

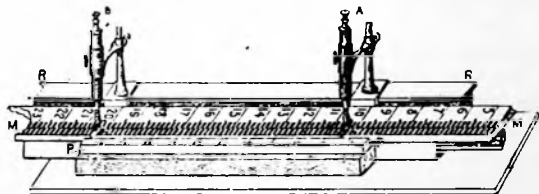


Fig. 137.

La mira lleva pernos con una línea de fe, se determina la distancia entre estos pernos, durante el trabajo, todos los días, se comprueba con un metro de metal portátil, comparado también con el patrón y corrigiendo sus indicaciones por temperatura, la distancia entre los pernos.

Debe también verificarse que cuando la burbuja del nivel esférico está centrada o que cuando la plomada está indicando la verticalidad de la mira, ésta lo esté realmente, para esto en un sitio protegido del viento, haciendo uso de una plomada o mejor con un instrumento rectificado del que se tiene la seguridad que uno de los hilos del retículo del anteojo es vertical, se coloca en esta posición a la mira, si la burbuja no está centrada o la plomada de la mira no indica su verticalidad se corrige hasta obtenerlo.

**129. Niveles.** — Tienen por objeto asegurar la horizontalidad de una visual que girando alrededor de un eje vertical, describe un plano horizontal y por lo tanto permite medir la diferencia de altura entre dos puntos, en uno de

los cuales está el nivel y en el otro se ha colocado la mira. Constan de un poderoso anteojo, al que se une un nivel instalado paralelamente al eje óptico, reposando el todo sobre una plataforma semejante a la de los teodolitos. Esta clase de niveles se clasifican en tres tipos, según las características de su construcción, que implican diferencias en su manejo y precisión.

1.º Instrumentos con el anteojo móvil y nivel fijo.

2.º        '       '       '       '       móvil y       '       móvil.

3.º        '       '       '       '       fijo y       '       fijo.

**130. Nivel Egault.** — Pertenece al primer tipo, dos soportes FF' (fig. 138), hacen cuerpo con la regla R, y terminan en su parte superior por collares sobre los que reposa el anteojo A. El nivel de aire N está fijado sobre la regla R, con su correspondiente tornillo de ajuste, *r*. La regla R por medio del eje O al que es normal, es solidaria a una plataforma de tres tornillos nivelantes.

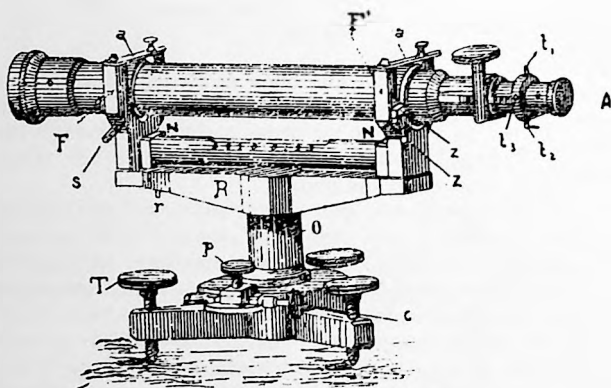


Fig 138.

Uno de los soportes F, lleva un tornillo *s*, que accionado permite elevar o bajar el anteojo, haciendo así variable la inclinación de su eje con respecto al plano determinado por la regla R; además, los soportes llevan en

sus caras exteriores y en cada uno de sus brazos, un tope de tornillo Z, que sirven a los topes z del anteojo.

El anteojo puede sacarse e invertirse en los collares, para lo cual se giran las albadillas *a a*.

**181. Rectificación.**—Las condiciones que debe llenar el nivel son:

1) Que el eje óptico del anteojo coincida con el eje de figura del mismo.

2) Que el eje óptico sea perpendicular al eje de rotación principal.

3) Que el eje de rotación principal sea vertical y que el nivel de aire esté rectificado.

Llenando estas condiciones en cualquier posición que tenga el anteojo dentro de sus collares y cualquiera que sea la dirección azimutal en que se disponga, el eje óptico será horizontal con tal que la burbuja del nivel del aire esté centrada.

1) Si el eje óptico del anteojo o el plano que pasa por el hilo horizontal del retículo y el centro óptico del objetivo no contiene el eje de figura A B del anteojo, se hará sobre una mira la lectura  $L_1$  (fig. 139) en lugar de la lectura L

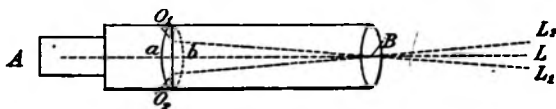


Fig. 139.

que debía hacerse, si se gira el anteojo sobre su eje de figura A B, el centro del retículo pasará de la posición  $O_1$  a la  $O_2$  quedando fijo el centro del objetivo B, la nueva visual es  $O_2 B$  y la lectura  $L_2$ . Hay que maniobrar el tornillo que mueve el hilo horizontal del retículo de manera que corrija la mitad de la diferencia  $L_2 - L_1$ , es decir se lleva el hilo del retículo a coincidir con la graduación  $\frac{L_1 + L_2}{2}$ . Cuando

el centro del objetivo  $B_1$  tampoco coincide con el eje de figura del anteojo, mediante la operación anterior sobre una mira Z a una distancia D del objetivo, conseguimos que

después de la rotación del anteojo

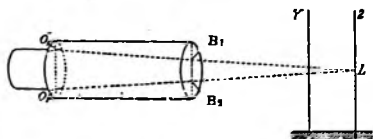


Fig. 140.

el centro del objetivo y el centro del retículo ocupen respectivamente las posiciones  $O_2$  y  $B_2$ , determinando la misma lectura  $L$  en la mira  $Z$ . Si colocamos la mira en  $Y$  a la distancia  $D'$ , las visuales

$O_1 B_1$  y  $O_2 B_2$  determinarán lecturas distintas, de manera que en este caso el centrage del retículo solo sirve para cuando la mira está a la misma distancia para la cual se hizo el reglaje; este defecto queda anulado en el promedio de las lecturas en las dos posiciones del anteojo.

2) Si el eje del anteojo no es perpendicular al eje principal, tendremos en la posición (a) (fig. 141) la lectura  $L_1$ , si invertimos el anteojo en sus collares y lo apuntamos nuevamente a la mira, tendremos la posición (b), donde por el giro de  $180^\circ$  sobre el eje principal, los soportes  $m$  y  $n$  del anteojo ocupan la posición  $m'$   $n'$ , y se hará la lectura  $L_2$ ; modificando la altura de  $m$  o  $n$  llevamos el hilo horizontal del retículo a coincidir con la graduación

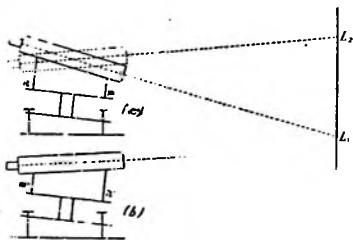


Fig. 141.

$\frac{L_1 + L_2}{2}$ . Es importante tener presente que en esta rectifi-

cación es necesario mantener en las dos posiciones del anteojo la misma generatriz en la parte superior o inferior, sinó en la inversión aparecería también el error de coincidencia del eje óptico con el eje de figura del anteojo y la corrección de la parte debida a este error por medio de la variación de  $m$  o  $n$  estaría mal hecha.

3) Se procede como en el caso general para nivelar una plataforma y rectificar el nivel de aire.

### 132. Reglas prácticas para el uso del nivel Egault.—

1) Instalar el instrumento. Fijo a su pie, se coloca de manera

que quede más o menos horizontal y dos de los tornillos nivelantes dirigidos según la línea que tendrá la visual; téngase en cuenta lo dicho al hablar de la instalación de los pies de instrumentos.

2) *Enfocar el anteojo sobre la mira.* — Análogamente a lo dicho para los teodolitos.

3) *Poner vertical el eje principal y rectificar el nivel.* — Su operación no difiere en nada del caso de nivelar un teodolito con el nivel fijo de plataforma.

4) *Primera lectura.* — Se apunta con el anteojo a la mira, se centra exactamente la burbuja con el tornillo de plataforma más cercano a la dirección de la visual y se hace la primera lectura.

5) *Segunda lectura.* — Se gira el instrumento  $180^\circ$  alrededor del eje principal, se saca el anteojo e invierte en sus collares para que el objetivo quede del lado de la mira y al mismo tiempo se le hace girar  $180^\circ$  sobre su propio eje de manera que la generatriz que ocupaba la parte superior ocupe ahora la parte inferior, centrar si es necesario la burbuja y hacer la segunda lectura. El promedio de la 1ª y 2ª lectura es independiente de los errores de reglaje.

**153. Diferencia de nivel entre dos puntos.** — Instalado el nivel aproximadamente a igual distancia de los puntos cuya diferencia de nivel se desea, y efectuadas las rectificaciones del instrumento, se coloca verticalmente una mira en cada uno de dichos puntos; efectúase la lectura sobre la mira de retaguardia, lectura que se llama *golpe de espalda* y se anota en la columna 4 a del formulario adjunto; gírese el instrumento para apuntarlo a la otra mira, se colima y hace la lectura llamada *golpe de frente* que se anota en la columna 5 a.

**Planilla de nivelación**

Instrumento empleado: Nivel

Operadores:

ESTACIÓN	PUNTOS NIVELADOS	DISTANCIAS			GOLPE DE NIVEL ESPALDA			GOLPE DE NIVEL FRENTE			DIFERENCIAL		COTAS	DISTANCIA AL ORIGEN
		3			4			5			6			
		Regla	Teod.	Total	La familia a	La familia b	La familia c	La familia a	La familia b	La familia c	Regla a	Regla b		
	A												1.1700	00
1		95	85	183	2.280	2.285	2.2825	3.110	3.1125	3.1110	0.8255	0.5415	188	
2		85	80	175	1.820	1.824	1.8220	2.117	2.1152	2.1160	0.2940	0.0475	475	
3		68	60	178	2.420	2.419	2.4195	2.015	2.017	2.0160	0.2055		0.2510	361

Invertiendo el anteojo en sus soportes y llevando la generatriz inferior a ocupar la posición superior, se efectúan nuevas lecturas de espalda y de frente que se anotan respectivamente en las columnas 4 *b* y 5 *b*, los promedios de éstas con 4 *a* y 5 *d*, nos dá el valor corregido de la lectura de cada mira que se anota en 4 *c* y 5 *c*, las diferencias de éstas se anotan en 6 *a* y 6 *b* según sean positivas o negativas, este es el valor del desnivel entre los dos puntos.

**134. Nivel Berthelemy.**— Llamado también *nivel a burbuja independiente*, pertenece al 2.<sup>o</sup> tipo; su anteojo (fig. 142)

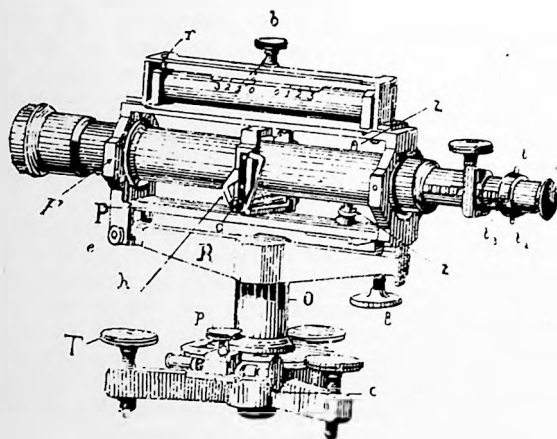


Fig. 142.

de gran poder, reposa sobre dos soportes collares F, que en vez de estar directamente fijados a la regla R, lo están al puente P, articulado en *e*; la inclinación de este puente con respecto a R, puede modificarse con el tornillo B de paso muy reducido. Esta disposición de los soportes F, presenta la ventaja de tenerse una línea de muñoneras invariable, permitiendo que los anillos del anteojo establezcan cóntacto en toda su superficie, lo que no sucede en el Egault a causa del tornillo *s* (fig. 138).



El nivel de burbuja *b*, que no es solidario al aparato, reposa por dos pies sobre los muñones del anteojo, y para evitar una caída queda sostenido por medio de una cruceta al eje *o*, esta cruceta está fijada a la regla del nivel por un resorte y una horqueta excéntrica *h*; si se quiere invertir el nivel sobre los muñones, operación que hay que hacer en cada observación, se le suspende por el botón *b*, e imprimiéndole un movimiento giratorio horizontal de  $180^\circ$ , se le deja descansar sobre el anteojo.

En los últimos modelos Berthelemy (figs. 143 y 144) se han puesto dos prismas *p p'* montados sobre una cremallera *c c'* que permite variar la distancia entre ellos de acuerdo con la variación de la longitud de la burbuja mediante el tornillo *d*. Los extremos de la burbuja

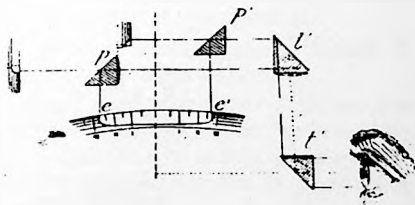


Fig. 145.

son reflejados por los prismas *p p'* que envía los rayos al juego de prismas colocados en la caja *T*; de donde son enviados al ojo en *O*".

Con la adición de estos prismas se consigue que el observador pueda controlar simultáneamente con la lectura de la mira la centración de la burbuja y rectificar la posición de ésta en el instante en que dá el golpe de nivel; por otra parte, las imágenes de los extremos de la burbuja son más nítidas y se elimina la paralaje que se origina cuando para hacer la lectura simultánea de las extremidades de la burbuja, se coloca el ojo en el centro de la misma en vez de colocarlo sobre la vertical de sus extremos.

**135. Rectificación.** — 1) Poner el eje óptico en coincidencia con el eje de figura del anteojo. Se efectúa esta rectificación como en el caso anterior, mediante el giro de  $180^\circ$  del anteojo sobre su propio eje.

2) Poner el anteojo perpendicular al eje principal y éste vertical. Se hace las mismas operaciones que cuando se coloca

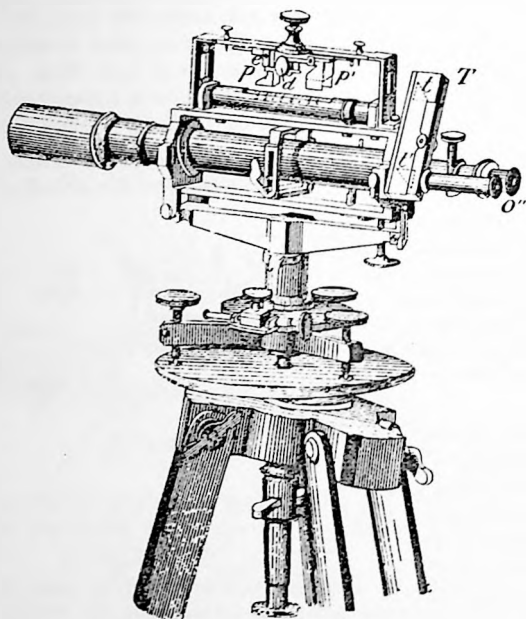


Fig. 144.

horizontal el eje secundario del teodolito mediante el nivel a caballete.

**136. Reglas prácticas para el uso del Berthelemy.**—1) Instalar el instrumento. Se procede como se ha dicho para el nivel Egault.

2) Enfocar el anteojo. Como en el caso general.

3) Poner horizontal el anteojo. Se coloca éste en la dirección de dos tornillos de la plataforma, se centra la burbuja, se gira 90° en dirección del tercer tornillo y se centra la

burbuja; se vuelve a la posición inicial, centrando la burbuja si es necesario; se levanta el nivel con la manija *b* y se invierte en sus apoyos; si la burbuja se desplaza, se corrige la mitad con los tornillos T de la plataforma, la otra mitad con el *r* del nivel.

Considerando el nivel solidario con el anteojo, se hace girar este 180°, si la burbuja se desplaza se corrige la mitad con el tornillo de plataforma y la otra mitad con el tornillo B.

El anteojo queda perpendicular al eje principal y este vertical y la línea de fé del apéndice debe coincidir con el índice fijo; si esto no sucede se hace una nueva marca sobre el apéndice, de manera que hecha esa coincidencia se tiene la seguridad que el anteojo es perpendicular al eje principal.

4) *Primera lectura.*—Se apunta a la mira; con el tornillo B se centra la burbuja y se hace la primera lectura.

5) *Segunda lectura.*—Se hace girar el anteojo 180° en sus collares (eliminación del error de colimación); se invierte el nivel sobre sus apoyos levantándolo con la manija *b*, se centra la burbuja, si es necesario, moviendo el tornillo B y se hace la segunda lectura.

**137. Diferencia de nivel entre dos puntos.**—Se instala el instrumento como se ha dicho el tratar el nivel Egault; se hace la primera lectura sobre la mira de retaguardia que se anota en 4 *a* (pág. 173 ). se gira el instrumento y se apunta a la mira de frente; se hace la primera lectura en ella que se anota en 5 *a*; se invierte el nivel sobre sus apoyos y se hace girar el anteojo en sus collares, haciéndose la segunda lectura en la mira de frente que se anota en 5 *b*, se apunta a la otra mira y se hace la segunda lectura sobre ella que se anota en 4 *b*; las demás columnas se llenan de acuerdo con lo que se ha dicho para el Egault.

**138. Nivel Zeiss.**—Este instrumento pertenece al tercer tipo, (fig. 145).

Se adapta a su pie por medio de la plataforma P, a la que se fija con la arandela roscada V. La verticalidad del eje principal se obtiene con el nivel esférico N, sirviéndose de los tornillos nivelantes C.

El eje principal es de acero y cilíndrico, tiene su tornillo de presión que no se vé en la figura y su tornillo de coincidencia B para el movimiento horizontal del anteojo; el movimiento lento en el plano vertical se obtiene mediante el tornillo micrométrico A, que permite centrar la burbuja con rapidéz y comodidad.

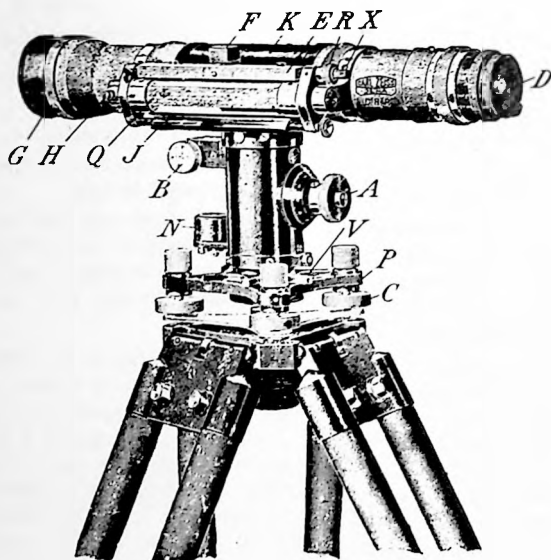


Fig. 145.

El anteojo puede girar en su soporte K alrededor de su eje longitudinal, para lo que hay que destrabar una palanquita que se encuentra encima del soporte del tornillo B.

El sistema óptico adoptado en este instrumento evita por completo el movimiento del ocular y del objetivo, lo que ha permitido encerrar herméticamente todas las lentes y el retículo en el interior del anteojo, quedando así bien prote-

gidos sus órganos vitales contra los deterioros atmosféricos o mecánicos.

El anteojo es enfocado por el desplazamiento longitudinal de una lente colocada en el interior del tubo y manejada con el botón W (fig. 146); al desplazarse esta lente auxiliar, se desplaza la imagen dada por el objetivo hasta llevarla al plano del retículo. El ocular es enfocado sobre el retículo mediante un movimiento helicoidal. Este anteojo puede usarse invertido, haciendo el objetivo, función de ocular. Para esto se saca el ocular D de su alojamiento y se pone en el hueco H (fig. 147) de la tapa del

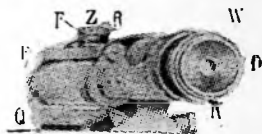


Fig. 146.

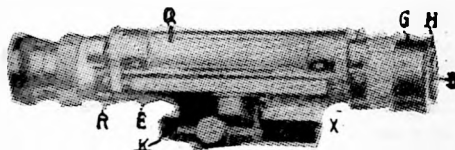


Fig. 147.

objetivo, este tiene grabada una crucesita que sirve como retículo, se enfoca el ocular desplazándolo en su alojamiento.

Para enfocar la mira se acciona el botón W. El nivel de burbuja, reversible, puede ser ajustado con los tornillos verticales y horizontales H (fig. 145), está fijado lateralmente al anteojo; un cilindro de vidrio Q lo rodea y protege contra la acción del frío y del calor.

El tubo nivel no lleva graduaciones, la burbuja se observa mediante una combinación de prismas alojados en la caja E, esta combinación de prismas lleva a las imágenes de los extremos de la burbuja una encima de la otra, lo que se observa por medio del prisma giratorio F. La burbuja está iluminada con el espejo J.

La posición de referencia, no teniendo graduaciones el tubo nivel, es la coincidencia de las dos imágenes de sus extremos, la que se obtiene moviendo el tornillo A que varía la inclinación del tubo nivel que le es solidario.

En la posición del nivel en la figura 147, la burbuja es

observada siempre en el prisma F, por abajo a través del tubo nivel.

Por necesidad para el ajustaje la caja E es móvil con respecto a la burbuja, mediante el tornillo X de traslación fig. 145, el R sirve para ajustarlo e impide que pueda haber desplazamientos posteriores.

La fig. 148 muestra la disposición de los prismas en la caja E; A A' es la burbuja en el tubo nivel, estando la arista BB' del prisma en el plano de la sección meridiana del nivel. La mitad de la burbuja, considerada longitudinalmente, se refleja en la cara superior del prisma y la otra mitad sobre la

cara anterior inclinada de donde es reflejada sobre las caras laterales C y C', las que a su vez la refleja sobre los planos inclinados interiores D y D' y de aquí a la caja F de la figura 145 en E y E'.

Siempre que, como en la figura 148 los extremos de la burbuja A y A' ocupen una posición simétrica con respecto a la vertical DE, los extremos de la misma se verán en coincidencia; si por variación de la temperatura, manteniéndose siempre en la misma posición, la burbuja adquiere la longitud

A<sub>2</sub> A'<sub>2</sub> o A<sub>1</sub> A'<sub>1</sub>; la figura 149 nos hace ver que siempre, se mantiene la coincidencia de las extremidades.

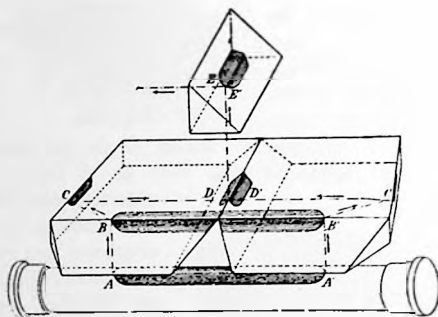


Fig. 148.

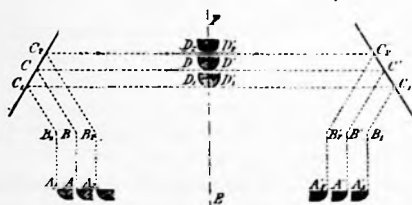


Fig. 149.

Si la posición de la burbuja, manteniendo su longitud  $AA'$  varía desde  $AA'$  hasta la situación  $A_2A'_1$ , las imágenes reflejadas de sus extremos serán  $D_2$  y  $D'_1$  y no estarán en coincidencia; para conseguirlo podemos variar la inclinación del tubo nivel con el tornillo A, (fig. 145) lo que desplaza la burbuja o bien correr la caja E con los tornillos X y R con lo que se lleva la vertical de la caja F a la posición equidistante de los extremos de la burbuja. Esta vertical es la que determina la línea de referencia que reemplaza a las graduaciones del nivel.

Cuando las imágenes de los extremos de la burbuja están en coincidencia, esta línea de referencia pasa por el centro de la misma.

Con el anteojo se pueden efectuar lecturas en 4 posiciones.

I. El ocular del lado de la escala en dioptrías y el nivel a la izquierda (fig. 145).

II. El ocular en la misma colocación anterior y el nivel a la derecha.

III. El ocular montado en la tapa del objetivo y el nivel a la derecha.

IV. El ocular en la misma colocación anterior y el nivel a la izquierda (fig. 147).

En general, para las necesidades de la hidrografía es suficiente una lectura con la posición I. En las nivelaciones de precisión se impone hacer las lecturas correspondientes a la posición I y II y tomar la media de las dos.

Las posiciones III y IV sirven para hacer el ajuste del instrumento.

Simétricos al hilo horizontal del retículo hay un par de hilos estadimétricos, cuya constante para cada anteojo es dada en el historial del instrumento.

**139. Reglas prácticas para su uso.** — Para obtener la precisión necesaria en los trabajos hidrográficos será suficiente proceder como sigue: sobre una mira vertical colocada a una distancia de 50 a 100 metros se hacen las lecturas con el anteojo, correspondientes en orden sucesivo a las posiciones IV, III, II, y I, centrando en cada caso la bur-

buja con el tornillo micrométrico A, para lo cual deben verse en coincidencia los extremos reflejados de la misma en el prisma F.

El promedio de las cuatro lecturas corresponde a la posición horizontal del eje óptico del anteojo, libre de todo error. Después, en la posición I en la que se hizo la última observación, moviendo el tornillo A se lleva el hilo horizontal del retículo a coincidir con esa graduación promedio de la mira. Si la burbuja no está centrada, ni tampoco en el campo del prisma F, se mueven los tornillos verticales H (fig. 145) que varían la inclinación del tubo nivel en el plano vertical hasta conseguir ver ambos extremos de la burbuja, después moviendo la caja E por medio de sus tornillos X y R se hace la exacta coincidencia.

Con esta operación, en la que primero ponemos con toda seguridad la línea de mira horizontal y después hacemos la coincidencia de los extremos de la burbuja, nos aseguramos que siempre que esto última suceda, observando en la posición I, el eje óptico del anteojo estará horizontal.

Esta operación de control debe hacerse siempre que se inicie el trabajo diario.

Con referencia a la planilla de nivelación de la pág. 173, como se hace una sola lectura en la posición I, solo habrá que llenar la columna de la 1.<sup>a</sup> visual de las casillas 4 y 5.

En las nivelaciones de precisión, cuando se quiere utilizar también la posición II no hay que llevar, al hacer el ajuste a coincidir el hilo horizontal del retículo con el promedio de las 4 lecturas, sino que hay que tener en cuenta la diferencia de todos los errores entre las lecturas I y II, en este caso hay que hacer de modo que el promedio de las lecturas correspondientes a estas dos posiciones sea igual al promedio de las lecturas en las 4 posiciones.

Para colocar el plano meridiano del nivel paralelo al eje óptico, se gira el anteojo de modo que uno de los tornillos nivelantes de la plataforma quede debajo del ocular o del objetivo, se centra la burbuja y se hace la lectura en la mira, luego se gira uno de los tornillos laterales de la plataforma una media vuelta o una entera, después con el otro



tornillo lateral de la misma se lleva próximamente y luego exactamente con el tornillo A, a coincidir el eje óptico con la misma lectura anterior.

Si la coincidencia de los extremos de la burbuja, visto en el prisma no subsiste, se mueven los tornillos horizontales de ajuste del retículo del nivel H (fig. 145), hasta conseguirlo.

**140. Niveles reversibles.**—También llamados de *doble graduación*, están constituidos por un tubo nivel internamente trabajado en forma de sólido de revolución con los meridianos circulares. La figura 150, muestra un tubo nivel de esta clase; puede considerarse constituido por dos superficies tóricas simétricas, tales que se puede utilizar su sección meridiana en dos posiciones inversas, superior e inferior.



Fig. 150.

La condición que deben llenar, para que puedan ser utilizadas, es que, las tangentes  $T_1$   $T_1$  y  $T_2$   $T_2$  (ejes del nivel) en los puntos de referencia de cada superficie sean paralelas entre sí y que cuando se solidariza a un anteojo para llevar el eje óptico del mismo a la horizontal, este último debe ser paralelo a las tangentes  $T_1$  y  $T_2$ .

**141. Verificación de los niveles reversibles.**—Suponemos que no hay error de colimación, si lo hubiera se eliminaría como se ha explicado para los demás instrumentos; en el nivel Zeiss en su construcción se ha eliminado.

1.º Supongamos que las tangentes  $T_1$  y  $T_2$  son paralelas y que formen un ángulo  $\alpha$  con el eje óptico O del anteojo.

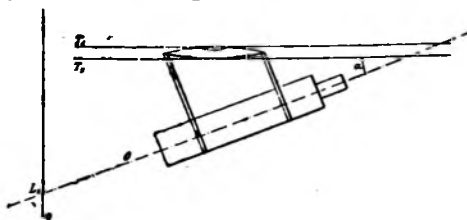


Fig. 151.

Después de centrada la burbuja, el nivel a la izquierda, hacemos la lectura  $L_1$  sobre una mira colocada a 50 o 100 ms. (fig. 151).

girando el nivel lo llevamos a la derecha del anteojo y ocu-

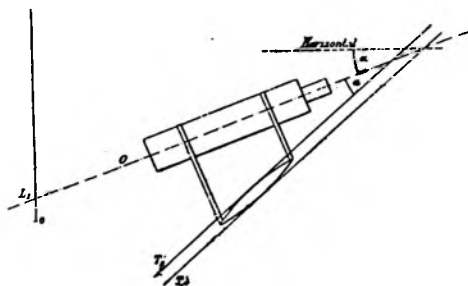


Fig. 152.

para la posición que muestra la figura 152, como este giro se hace alrededor del eje del anteojo, la línea de mira O ocupará la misma posición, la tangente superior  $T_1$  ocupará la posición simétrica e in-

ferior  $T'_1$ , igualmente  $T_2$  estará en  $T'_2$ , el eje de simetría es O.

La burbuja no estará centrada y por formar  $T'_2$  un ángulo igual a  $2\alpha$  con la horizontal, para llevarla a esa posición habrá que hacerla girar ese ángulo que también lo girará el eje óptico O. La nueva posición de la línea de mira O fig. 153; cuando esto se ha he-

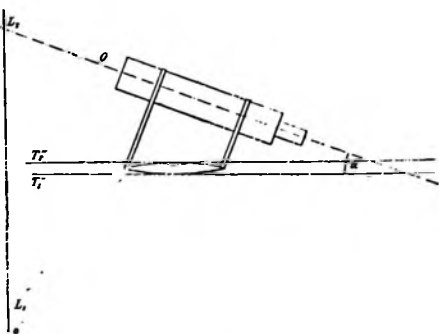


Fig. 153.

cho, hará un ángulo  $\alpha$  por arriba de la horizontal en posición simétrica a la de O (fig. 151). Haciendo la lectura  $L_2$  sobre la mira correspondiente a O;  $L_o = \frac{L_1 + L_2}{2}$  es la graduación de la mira a la que hay que llevar el eje óptico del anteojo para que sea horizontal.

2.º En el caso que las tangentes  $T_1$  y  $T_2$  no sean paralelas y formen un ángulo  $\varphi$  entre sí y que  $T_1$  haga un ángulo  $\alpha$  con el eje óptico (fig. 154), la línea de colimación nos dá sobre la mira, con el nivel a la izquierda y la burbuja centrada, la lectura  $L_1$ .



Fig. 154.

Poniendo el nivel a la derecha, el eje óptico  $O'$  (fig. 155) se mantiene invariable, las tangentes  $T_1$  y  $T_2$  ocuparán la posición simétrica con respecto a  $O'$ .  $T'_1$  y  $T'_2$ ; el ángulo que  $T'_2$  tiene que girar para que sea horizontal es  $2\alpha - \varphi$  y el mismo ángulo girará el eje óptico, el que entonces ocupará la posición  $O''$  (fig. 156) y sobre la mira tendremos la lectura  $L_2$ .

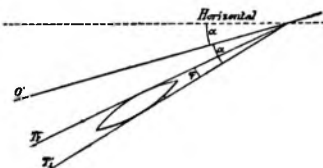


Fig. 155.

En la posición de la fig. 154 la línea de mira formaba con la horizontal y por debajo de la misma un ángulo  $\alpha$ , dándonos la lectura  $L_1$  de la mira; en la posición de la (fig. 156);  $O''$  forma un ángulo  $\alpha - \varphi$  por encima de la horizontal y nos dá la lectura  $L_2$ , por lo tanto el promedio  $L_0 = \frac{L_2 + L_1}{2}$  no corresponde a la graduación que lleva la línea de mira a la horizontal, sino que corresponde a una inclinación  $\frac{\varphi}{2}$ , por debajo de la horizontal, en este caso.

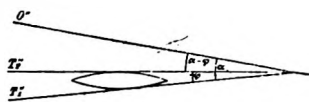


Fig. 156.

3.º Si después de visar la graduación de la mira correspondiente a la lectura  $\frac{L_1 + L_2}{2}$ , centramos la burbuja con los tornillos del tubo nivel; tendremos, la tangente  $T'_2$  horizontal (fig. 157) y formando



Fig. 157.

Hidrografía, 24.

un ángulo  $\frac{\varphi}{2}$  con el eje óptico, la tangente  $T'_1$  que forma un ángulo  $\varphi$  con  $T'_2$ , también hará un ángulo  $\frac{\varphi}{2}$  con el eje óptico  $O'$ . Si cambiamos la posición del nivel,  $O'$  permanece

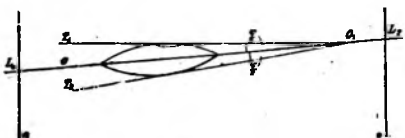


Fig. 158.

inmóvil,  $T'_1$  ocupará la posición simétrica  $T_1$  (fig. 158) que en este caso es la de  $T'_2$  y por lo tanto horizontal y la burbuja permanecerá centrada, lo que puede inducir en el error de considerar el instrumento rectificado, es decir, aceptar que la línea de mira es horizontal, lo que no es cierto por cuanto forma con ella el ángulo  $\frac{\varphi}{2}$ , para constatar la existencia de este error se procede como sigue:

4.º En la figura 158, el ocular está en  $O_1$  y el objetivo en  $O$ , la línea de mira está inclinada un ángulo  $\frac{\varphi}{2}$  y nos da sobre la mira la lectura  $L_1$  debajo de la horizontal, si convertimos el objetivo en ocular y recíprocamente, apuntando nuevamente a la mira el eje óptico tendrá la misma inclinación, la lectura correspondiente  $L_2$  de la mira estará por arriba de la horizontal y es simétrica con  $L_1$  respecto a la misma; el promedio  $\frac{L_1 + L_2}{2}$  es la graduación que corresponde a la posición horizontal del eje óptico.

La reversibilidad del ocular en objetivo es la característica del nivel Zeiss. En otros instrumentos el tubo nivel es desmontable, hechas las lecturas con nivel a la derecha e izquierda en una de sus posiciones, se desmonta el tubo nivel y se le coloca invertido, resultan los ejes del nivel en posición inversa a la anterior, es decir con la convergencia hacia el objetivo, si antes como lo indica la figura 158, estaba hacia el ocular, esta operación equivale a convertir el objetivo en ocular y en consecuencia estamos en el caso anterior.

Cuando el nivel no puede desmontarse es necesario recurrir

a una nivelación recíproca para encontrar el error. El nivel Breithaupt pertenece a este tipo.

**142. Resumen.**—Para llevar el eje óptico a la horizontal:

1.º Se pone el nivel a la derecha, se centra la burbuja y se hace la lectura  $L_1$  sobre una mira colocada a 50 o 100 metros.

2.º Se pone el nivel a la izquierda, se centra la burbuja y se hace la lectura  $L_2$ .

El promedio de las lecturas  $L_1$  y  $L_2$  nos lleva el eje óptico a formar un ángulo con la horizontal igual a la mitad de la convergencia de los ejes del nivel.

3.º Se cambia el objetivo en ocular, si estos son convertibles, o se desmonta el nivel y se coloca invertido de modo que si la convergencia de los ejes de nivel antes estaba hacia el objetivo ahora esté hacia el ocular, se centra la burbuja y se hace la lectura  $L_3$  sobre la mira con el nivel a la derecha.

4.º Se cambia el nivel a la izquierda, se centra la burbuja y se hace la lectura  $L_4$ ; el promedio de  $L_3$  y  $L_4$  nos lleva el eje óptico a ocupar una posición simétrica respecto a la horizontal con la determinada por el promedio de  $L_1$  y  $L_2$ ; luego la media  $L = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{4}$  representa la graduación de la

mira que corresponde a la posición horizontal del eje óptico.

**143. Nivelación recíproca para la rectificación de niveles.**— En los instrumentos con el nivel fijo al anteojo se prefiere, en general, para llevar la línea de mira paralela de la tangente central al nivel, el empleo de una nivelación recíproca.

Se eligen dos puntos A y B a una distancia de 50 ms. Se coloca el instrumento en A y una mira en B. Después de poner aproximadamente vertical el eje principal del instrumento, se dirige el anteojo sobre la mira, se centra la burbuja y con el hilo horizontal del retículo se hace la lectura  $L_a$ , también se mide la altura del centro del ocular sobre el suelo  $H_A$ .

Si el eje óptico estuviese horizontal cuando la burbuja está centrada, la lectura sería la que corresponde a la graduación  $M$ ; pero estando inclinada un ángulo  $i$ , será  $L_a$  en un punto, N a una distancia  $x$  de M.

Si  $z$  es la diferencia de nivel entre A y B

$$x = L_a - z - H_A.$$

Trasladando el instrumento de manera que el ocular esté sobre la vertical de B y con la burbuja centrada, después de dirigir el anteojo a una mira colocada en A, se hace la lectura  $L_A$

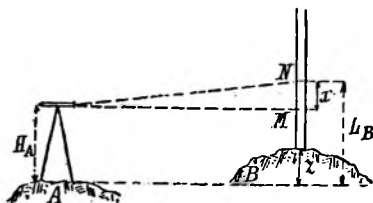


Fig. 159.

y se mide la altura  $H_n$  del ocular. Considerando que la diferencia de nivel entre los puntos es siempre la misma y siendo la distancia AB la misma, el desplazamiento sobre la mira debido a la inclinación del eje de colimación tiene que ser igual a  $x$ .

$$x = L_A - z - H_n$$

luego

$$x = \frac{(L_A + L_n) - (H_A + H_B)}{2}$$

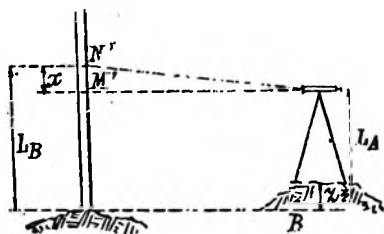


Fig. 160.

En este caso la suma de las lecturas de la mira es mayor que la suma de las lecturas del ocular, la línea de colimación está inclinada hacia arriba del horizonte; sucediendo lo contrario estará inclinada hacia abajo.

En el caso de la figura (2ª posición) se llevará la línea de mira a coincidir con la graduación de la regla  $L_A - x$ , inclinando el anteojo con su tornillo de elevación, después se centrará la burbuja con los propios tornillos de rectificación de la armadura del tubo de nivel.

En los taquímetros y teodolitos con el nivel principal sobre el anteojo, cuando se quiere emplearlos en la nivelación, se usa este procedimiento de rectificación y si después de centrada la burbuja, la línea de los nonios del círculo vertical no esté en cero o  $90^\circ$ , se desplazará convenientemente para que ello suceda.

**144. Errores con los niveles.**—El error temible sobre la determinación de una cota depende de los distintos errores de que están afectadas cada una de las operaciones que sirven para hacer la lectura de la mira y para rectificar el nivel.

1) El error de la lectura de la mira está afectado independientemente por el error de puntería y por el error angular de lectura de la burbuja en centración.

2) Los errores por la incompleta rectificación del nivel dependen principalmente de la sensibilidad de los medios usados para conseguir esa rectificación en cada una de sus partes. Así, cuando la operación se funda en la lectura de una mira, se tendrá un error igual al de puntería y cuando se basa en la lectura de la burbuja se tendrá un error igual al promedio por el error angular de la lectura de esta última.

Consideraremos solo el error de lectura de la mira pues el error debido a la imperfecta rectificación se elimina con el sistema de observación.

Siendo el error debido a la apreciación de la vista  $\frac{4}{\gamma A}$ , donde  $A$  es el aumento del anteojo; si  $D$  es la distancia del nivel a la mira, el error será

$$I_2 = D \tan \frac{4}{\gamma A}$$

Siendo  $\alpha''$  la sensibilidad del nivel, desplazamiento angular de

la burbuja para el desplazamiento longitudinal de 1 mm, el error de lectura en la mira será

$$l_1 = D \alpha'' \text{ sen } 1''$$

y el error total

$$l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$$

*Ejemplo:* Determinar el error temible lineal de un golpe de nivel a 25 y 50 ms. con un instrumento cuyo nivel tiene 3" de sensibilidad ( $R = 60$  ms) y un anteojo de 15 aumentos.  $A = 15$ .

$$l_1 \text{ para } D = 25 \text{ m} = \text{mm } 0.28$$

$$, \quad , \quad D = 50 \quad , = \quad , \quad 0.72$$

$$l_2 \quad , \quad D = 25 \quad , = \quad , \quad 0.12$$

$$, \quad , \quad D = 50 \quad , = \quad , \quad 0.24$$

$$l_{25} = \sqrt{0.28^2 + 0.12^2} = \pm 0.32 \text{ mm}$$

$$l_{50} = \sqrt{0.72^2 + 0.24^2} = \pm 0.76 \quad ,$$



## CAPITULO XIII

### INSTRUMENTOS ESPECIALES

**145.** En los capítulos anteriores hemos visto la descripción, rectificación y uso de los instrumentos principales que sirven para: medir ángulos horizontales y verticales; medir la distancia entre dos puntos, directamente o con aparatos estadimétricos; medir la diferencia de nivel o cota entre dos puntos. Con los aparatos ya indicados puede resolverse todas las cuestiones de topografía, pero para ciertos problemas no se necesita la precisión que con ellos se alcanza o se prefiere ganar en rapidez, por estas razones se usan instrumentos que son más simples que los descriptos o que son una combinación de los mismos.

Haremos aquí una breve descripción de los más importantes con su rectificación y uso.

**146. Pantometra.**—Es un instrumento destinado a la medida de ángulos compuesto de un cilindro hueco cortado en dos por un plano perpendicular al eje (fig 161).

La parte inferior A está terminada por un eje hueco con tornillo de presión B que permite inmovilizarlo sobre su resorte. La parte superior C gira junto con la parte A pero una cremallera interior permite desplazar a C respecto a A con el tornillo D.

La parte inferior lleva el limbo y en contacto con esta graduación, se desplaza un nonio fijo en el cilindro superior.

Sobre la generatriz del cilindro, que pasa por el cero del limbo y por el cero del nonio, están practicadas una ventanilla

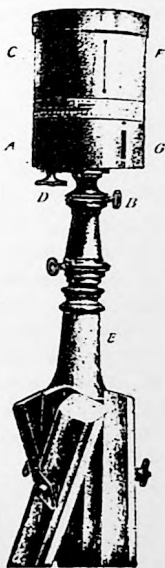


Fig. 161.

F y G que constituyen el *ocular* de una pinula; en la generatriz diametralmente opuestas otras dos ventanillas constituyen el *objetivo* de la pinula.

Normales al plano de las pinulas que contienen el cero del limbo y del nonio, hay practicadas otras ventanillas que sirven para determinar visuales a  $90^\circ$  de las pinulas anteriores.

Otro tipo más completo de pantómetro, (fig. 162) tiene tri-

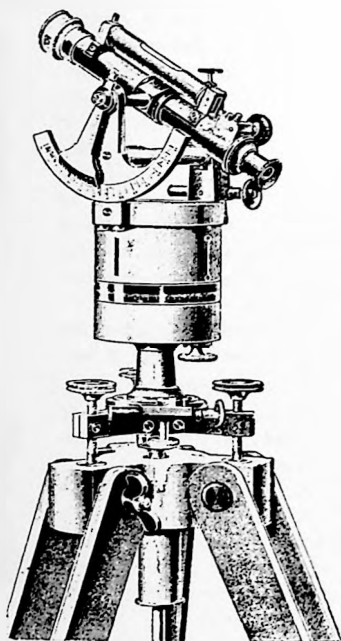


Fig. 162.

pode y plataforma de nivelación, anteojo estadimétrico con círculo vertical y nivel. Sobre la caja del aparato se coloca una burbuja magnética que se mueve sobre un arco graduado.

**147. Rectificación.** — 1) *Los planos determinados por cada par de ventanillas opuestas, tanto las del cilindro inferior como superior deben ser paralelas al eje del instrumento y este debe estar vertical.*

Cuando el instrumento está montado sobre un trípode simple se coloca vertical el soporte E sirviéndose de una plomada colocada a 5 o 6 ms. como ya se ha dicho para colocar un jalón vertical N.º 91.

Después se visa el hilo con cada pinula para comprobar que cada plano determinado por un par de ventanillas contiene a aquel en toda su extensión.

En los instrumentos con anteojo montados sobre plataforma con tornillos nivelantes, se procede como se ha dicho para los teodolitos con nivel fijo y anteojo que no pueda invertirse en sus muñoneras N.º 61 a efectuar las siguientes rectificaciones a) poner vertical el eje principal, b) el eje secundario perpendicular al principal y c) el eje óptico perpendicular al secundario.

2) *Coincidiendo el cero del nonio con el cero del limbo, los planos determinados por la pinula del cilindro inferior y superior deben coincidir.* Se hacen coincidir ambos ceros, y se visa con la pinula del cilindro inferior el hilo de una plomada; luego, mirando por la pinula del cilindro superior el plano de esta debe contener al hilo. Si esto no sucede, se obtiene la corrección moviendo el cilindro superior solamente hasta hacer esa coincidencia; luego, la lectura del limbo dará la corrección a aplicar cuando se toma como origen el cero del limbo visando con la pinula del cilindro inferior uno de los dos puntos entre los cuales se va a medir un ángulo y con la otra pinula el otro punto.

Cuando se usa solamente la pinula del cilindro superior, visando primero un punto y después el otro, la diferencia de lecturas del limbo es la medida del ángulo sin que haya que aplicarle corrección.

3) *Los planos cotimadores del cilindro superior deben pasar por el eje de rotación.* Sobre el terreno se ponen dos jalones que estén en línea con el centro del instrumento y a uno y otro lado del mismo, se señala un tercer punto fuera de la en-

filación y se miden los ángulos adyacentes entre este y cada uno de aquellos, su suma debe ser  $180^\circ$ .

4) *Los planos de colimación del cilindro superior deben ser perpendiculares entre sí.* Sirviéndose de las pinulas superiores se marcan sobre el terreno los dos planos determinados por las visuales; luego, haciendo girar el cilindro de manera que coincida cada plano visual con la alineación determinada por el otro, debe mantenerse la coincidencia de los planos de colimación con las señales colocadas.

**148. Brújula topográfica.**—La parte especial está constituida por una aguja magnética centrada sobre un estilo colocado en el eje de una caja cilíndrica cerrada con una tapa de vidrio. Una palanca sirve para levantar la aguja, inmovilizando sus movimientos cuando no se hace uso.

Concéntrico con el eje de suspensión hay un círculo graduado movable y el que girándolo se puede llevar el cero del círculo a coincidir con la punta N de la aguja.

Una pinula o anteojo se mueve externamente a la caja, el plano visual de esta pasa por el eje magnético de la aguja o le es paralelo, en su movimiento el anteojo arrastra el círculo graduado y visando un punto, la lectura de la graduación correspondiente a la punta N o mejor al promedio de la punta N y la de la punta S disminuida  $180^\circ$  para eliminar el error debido a que la línea NS de las puntas, que forman el eje geométrico de la aguja, no coincide con el eje magnético de la misma determinado por los polos. Esa lectura es el azimut magnético de esa dirección y corregido por la declinación magnética da el azimut verdadero.

La fig. 59 es un teodolito con una declinatoria, representa el tipo más completo de brújula topográfica, pero para trabajos de reconocimiento hay otros modelos más pequeños pero igualmente completos. La rectificación se hace como ya se indicó para los teodolitos en general.

La fig. 163 representa una brújula Kater, está montada en un pie simple. La aguja lleva fijada una corona circular de aluminio graduada de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  y con la graduación  $0 - 180^\circ$  correspondiendo a los extremos N — S de la aguja; en la parte interna de la caja va una línea de fé que está en el mismo

plano diametral que determina la pinula. Visando el punto cuya orientación respecto al centro de estación se quiere determinar, la lectura correspondiente a la línea de fé es el azimut magnético. El examen de la figura indica suficientemente en construcción y empleo.

En las brújulas todos los materiales que entran en su construcción son antimagnéticos.

Además de las condiciones generales: verticalidad del eje principal, perpendicularidad de los ejes instrumentales, rectificación de los niveles; las brújulas deben llenar la condición de que el plano de la pinula o eje óptico sea paralelo o contenga la línea  $0 - 180^\circ$  del círculo graduado o la línea de fé; esta condición no es necesaria en los goniómetros porque allí la diferencia de lecturas da el valor del ángulo N.º 65, pero en las brújulas el ángulo medido está referido a la punta de la aguja.

Para determinar este error se hace coincidir el extremo N de la aguja con el cero de la gra-



Fig. 163.

duación o índice y se colima un punto lejano; luego se saca el vidrio de la caja y se coloca de canto una regla coincidiendo con el diámetro  $0 - 180^\circ$ , esta regla debe tener en su canto dos puntos de mira para colimar el punto lejano, si el plano de colimación no pasa por este, habrá error de paralelismo, se mueve la regla hasta que la visual pase por la señal y el ángulo que ha girado es el valor del error.

Si se conoce el azimut verdadero de una línea, después de determinar el azimut magnético con la brújula, se tendrá un valor de la declinación para el lugar y para el instrumento;

este valor de la declinación es la resultante de la declinación verdadera y del error de paralelismo.

**149. Plancheta pretoriana.**— Es un goniógrafo que Juan Pretorius inventó en la segunda mitad del siglo XVI, desde entonces este instrumento ha tenido muchas modificaciones y a continuación describiremos uno de los modernos más completos.

Se compone de un tablero de dibujo AB de  $0.60 \times 0.70$  m. aproximadamente, fijado por una plataforma a un trípode como el de los teodolitos. Un nivel C que se aplica sobre el tablero permite ponerlo horizontal.

En los modelos más perfeccionados el tablero puede desplazarse en dos direcciones normales entre sí y también tiene un movimiento de rotación; estos movimientos permiten orientar una de sus aristas en una dirección determinada y colocar un punto cualquiera del mismo sobre la vertical del centro de estación.

Una alidada, que en otros modelos es una simple pinula, está formada por un anteojo M, estadimétrico casi siempre, montado sobre el extremo de una regla PQ mediante la columna D. Esta columna está montada a charnela sobre la regla y por medio de un tornillo de su pie puede girar un poco alrededor de un eje horizontal, para poner vertical a la columna cuando la regla está horizontal.

El anteojo es susceptible de dos movimientos de rotación; uno, alrededor del eje vertical para hacer que el eje óptico quede sobre el mismo plano vertical que pasa por el borde de la regla y otro movimiento alrededor del eje horizontal que sirve para dirigir el anteojo a diversas altitudes, un círculo vertical mide este desplazamiento angular. Un nivel G va montado sobre los índices del círculo vertical. Además, se provee a estos instrumentos de un nivel a caballete.

Una brújula tiene en su fondo dos líneas de fé, paralela a cada lado del tablero, o un círculo graduado con la línea  $0-180^\circ$  paralela a uno de esos lados; cuando la punta N de la aguja coincide con el cero, el lado correspondiente está orientado según la línea N — S magnético.

La escuadra guía está compuesta de las reglas de madera

R L T, la extremidad R tiene un refuerzo metálico y termina en forma de cuña, con una línea de fé y en la extremidad T va asegurada una plomada; la longitud de LT es tal que cuando

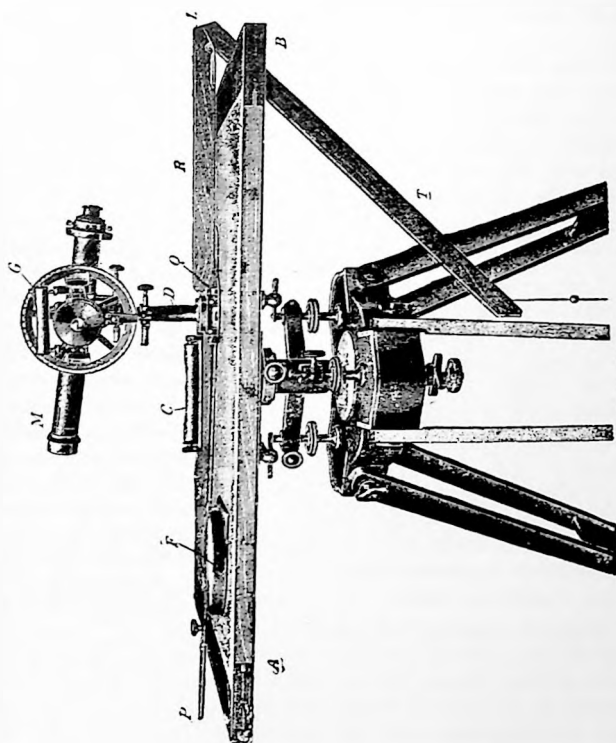


Fig. 164

RL está horizontal, la vertical de la plomada pasa por la línea de fé del extremo R y mediante este dispositivo, haciendo coincidir la plomada con el centro de estación en el terreno, se marca en el tablero el punto correspondiente a la línea de fé.

**150. Rectificación de la plancheta.** — Las operaciones que hay que hacer para poner en estación el instrumento y rectificar el anteojo son las que en general se requieren para cualquier goniómetro.

1) *Poner horizontal el tablero.* Se pone el nivel C cerca del centro del tablero, paralelo a la dirección de dos tornillos nivelantes y se centra la burbuja; se marca sobre el tablero la posición del nivel trazando una línea con lápiz o fijando sobre el mismo dos alfileres. Después se levanta el nivel, se le invierte y se repone en el lugar que antes estaba; si la burbuja no queda centrada se corrige la mitad con los tornillos de plataforma y la otra mitad con los tornillos del nivel.

Después se nivela la dirección normal a la anterior con el tercer tornillo nivelante. Poniendo el nivel en cualquier orientación del tablero la burbuja debe quedar centrada.

2) *El eje óptico debe ser perpendicular al eje de rotación.* La corrección se verifica como se ha indicado en el párrafo 61 (2).

Como no hay graduaciones de referencia, en la primera posición se traza sobre el tablero la línea que coincide con el canto de la regla; luego se invierte la regla apoyando el mismo canto sobre la línea trazada y se gira el anteojo para colimar el punto, si este no está sobre el hilo vertical del retículo, se mueve la regla hasta conseguirlo, luego se traza la línea correspondiente al canto y el ángulo formado por las dos líneas es el doble de la corrección; trazando gráficamente la bisectriz, se coloca el canto de la regla sobre ella y con los tornillos del retículo se mueve éste hasta que el hilo vertical coincida con el punto a visar.

3) *El eje de rotación del anteojo debe estar horizontal.* Se colima con el cruce de los hilos del retículo al hilo de una plomada o arista vertical de un edificio y se observa si girando el anteojo se mantiene o no la coincidencia, se corregirá la mitad del desplazamiento con los tornillos del cojinete del eje secundario o se varía la inclinación de la columna vertical con el tornillo que se encuentra en su base. Hecha esta corrección, el eje secundario estará horizontal, se centrará la burbuja del nivel que le es paralelo.



4) *Los nonios del círculo vertical deben estar en cero cuando el anteojo está horizontal.* Esta operación se hace cuando se usa la alidada para operaciones de altimetría. Después de poner el anteojo horizontal con el nivel que tiene montado, si el cero de la graduación del círculo vertical no coincide con el cero del nonio, se hace la coincidencia; luego, se centra la burbuja del nivel montado sobre los nonios.

5) *El plano vertical descripto por el eje óptico debe coincidir con la línea de fé. (Canto de la regla).*

Después de haber apuntado a una señal, se coloca dos alfileres verticalmente y junto al canto de la regla; sirviéndose de estos alfileres como alidada, se coloca otra señal en la parte opuesta al anterior y se gira el anteojo hasta bisectarla sin mover la regla, si la coincidencia se efectúa el plano vertical de colimación pasa por la línea de fé, de otra manera se gira la columna soporte alrededor de su eje hasta que el anteojo, en las dos posiciones invertidas, colime las dos señales con el hilo vertical del retículo.

Este error no tiene influencia cuando se trata de medir ángulos, que son diferencias del desplazamiento angular entre dos direcciones, afectadas cada una por un mismo error de un mismo sentido, pero cuando se trabaja con el tablero orientado por la brújula, midiéndose los ángulos entre la dirección de la aguja y los correspondientes a la dirección del eje óptico, que se materializan en el tablero con la raya trazada al canto de la regla, el error influye íntegramente en la orientación.

**151. Uso de la plancheta.**—Cuando el papel del tablero no tiene indicación alguna, se pone el instrumento sobre el centro de estación, se nivela el tablero y se mueve la escuadra guía de manera que la plomada caiga sobre la señal que indica el centro de estación en el terreno; luego se marca sobre el tablero un punto en coincidencia con la línea de fé del extremo o se clava un alfiler; sobre este punto o coincidiendo con el alfiler se pone el canto de la regla o línea de fé de la alidada y girando esta sobre ese punto se dirige el anteojo a una de las señales a bisectar, luego se traza sobre el papel una línea con lápiz que indica la dirección en que se apunta el anteojo.

Con vértice en el punto indicado se trazan las líneas que corresponden a otras visuales.

Si el tablero debe estar orientado, después de nivelado se gira hasta que el N de la aguja esté en la graduación cero o en la que se desea, luego con los dos movimientos ortogonales se traslada en dos direcciones paralelas a la que tiene hasta que la plomada caiga sobre el centro de estación.

Cuando hay que poner en estación el instrumento después de estar marcado sobre el papel el vértice del ángulo, hay que coincidir este punto con el centro de estación; para esto se coloca sobre el punto la línea de fé de la regla y se mueve el tablero, después de nivelado con los dos movimientos ortogonales hasta que coincida la plomada con la señal del terreno; como además de la coincidencia del vértice del ángulo con el centro de estación habrá que hacer coincidir una línea de papel con cierta dirección o habrá que orientar el tablero con la declinatoria, colocada la regla de la alidada sobre esta línea se girará el tablero hasta obtener esa coincidencia, al hacer esto el vértice quedará fuera del centro de estación, con los movimientos ortogonales se llevará a esa posición.

#### **152. Taquímetro auto-reductor Sanguet — Descripción.**—

Se basa en la aplicación de el principio de la medida de la distancia por diferencia de pendiente con longitud variable de mira. La distancia horizontal se deduce de la diferencia de dos lecturas de la mira hechas con un anteojo al cual se le dá dos posiciones distintas cuya diferencia de inclinación se conoce.

La variación en la posición del anteojo se hace mecánicamente.

Se compone de un círculo horizontal con declinatoria D, para la medición de los ángulos horizontales y de un dispositivo especial para el movimiento vertical del anteojo,

El anteojo es móvil alrededor de su eje O que materializa el punto de la figura 165.

Una regla prismática F materializa la regla *mn* de aquella figura.

La horqueta E está invariablemente unida a la regla F, paralela a la cual está la columna guía C cuyas extremidades

pueden desplazarse en los salientes SS de la regla F. La columna C asienta sobre la punta del tornillo de aproximación R.

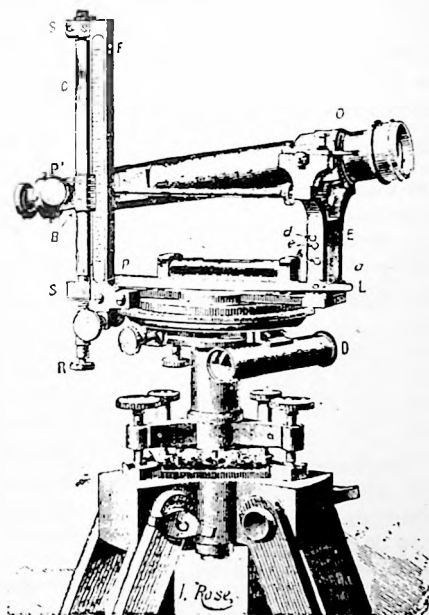


Fig. 165.

Una palanca L móvil alrededor del punto P acciona la columna por medio de una biela que arrastra la tuerca del tornillo R.

El extremo de la palanca L se encaja siempre en uno de los botones *a, b, c, d* colocados en una de las caras de la horqueta E.

Un cursor B móvil a lo largo de la columna C, puede fijarse en un punto cualquiera de esta por un tornillo de presión P', este cursor arrastra un saliente sobre el cual reposa el anteojo.

Moviendo el cursor puede llevarse el anteojo a una posición cualquiera donde queda fijado con el tornillo P'; la simple ma-

niobra de la palanca L comunica a la columna C y por consiguiente a la parte posterior del anteojo, un desplazamiento correspondiente al transporte del extremo de la palanca, a los botones *a, b, c, d*. Estos desplazamientos son constantes e independientes de la inclinación inicial.

*Medida de la distancia.*—La distancia depende del valor de  $\omega$  y de la diferencia de lecturas en la mira.

El valor de  $\omega$  es la relación  $\frac{ab}{aP}$ ,  $\frac{ac}{aP}$  y  $\frac{ad}{aP}$ , estos valores se aplican cuando la lectura inicial es la correspondiente a partir de la posición del anteojo con la palanca en *a*. También puede tomarse como origen *b* y *c*.

Los valores de  $\omega$  son los siguientes:

Para el intervalo <i>ab</i> .....	$\omega_1 = 0.010$
» » » <i>ac</i> .....	$\omega_2 = 0.018$
» » » <i>ad</i> .....	$\omega_3 = 0.022$
» » » <i>bc</i> .....	$\omega_4 = 0.008$
» » » <i>bd</i> .....	$\omega_5 = 0.012$
» » » <i>cd</i> .....	$\omega_6 = 0.004$

Estas seis relaciones son útiles de diversas maneras: sirven para descubrir fácilmente los errores de lectura, permiten esquivar los obstáculos que en parte ocultan la mira y mediante la combinación de lecturas se obtiene una mayor precisión.

La relación  $\omega = 0.010$  es la más ventajosa para trabajos corrientes. La mira dividida en centímetros permite apreciar las distancias en metros y decímetros hasta 400 ms.

Las relaciones  $\omega_4$  y  $\omega_5$  combinadas ofrecen un excelente medio de aumentar la precisión y controlar las lecturas en un radio de 250 ms.

Las lecturas que hay que hacer son las correspondientes a las posiciones *b, c, d* de la palanca que llamaremos  $L_b, L_c$  y  $L_d$ . Se tendrá

$$D = \frac{L_d - L_b}{0.012} = \frac{\Delta_1}{0.012}$$

$$D = \frac{L_c - L_b}{0.008} = \frac{\Delta_2}{0.008}$$

$$y \quad D = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{0.012 + 0.008} = 100 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$$

La distancia en metros, es igual a la semisuma de las dos longitudes de mira expresadas en centímetros.

Una-verificación de la lectura se tiene con la siguiente relación

$$D = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{0.012 - 0.008} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{0.004}$$

o sea

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{\Delta_2}{2} = \frac{\Delta_1}{3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{5}$$

Si las longitudes de mira son correctas, su diferencia debe ser igual a 1/2 de la primera, 1/3 de la segunda y 1,5 de la suma de las dos.

La combinación de las tres relaciones  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , y  $\omega_3$  nos da

$$D = \frac{L_d - L_a}{0.022} = \frac{\Delta_1}{0.022}$$

$$D = \frac{L_c - L_a}{0.018} = \frac{\Delta_2}{0.018}$$

$$D = \frac{L_b - L_a}{0.110} = \frac{\Delta_3}{0.010}$$

$$D = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{0.050} = 100 \frac{2(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)}{10}$$

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{5} = \Delta_3 \quad \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{10}$$

La distancia en metros es igual 1/10 del doble de las sumas de las longitudes de mira en centímetros y para que las lecturas sean correctas, 1/5 de la suma debe ser igual a la tercera y la diferencia de la primera y segunda igual a 1/10 de la suma.

**153. Uso del instrumento.**—Se pone en centro de estación y se nivela como cualquier goniómetro. Se coloca la palanca en el tope inferior  $a$  y con el hilo horizontal del retículo se bisecta el cero de la graduación de la mira o una graduación entera, 0,40 o 1,00 m.; para esto se afloja el tornillo de pre-

sión P' y se inclina convenientemente el anteojo, luego se afina la coincidencia con el tornillo R.

Se traslada sucesivamente la palanca L hasta encastrar en los botones *b*, *c*, *d*, según la combinación de valores de  $\omega$  que se emplea. En cada posición se hace la lectura de la mira. Terminada la operación, se vuelve la palanca al punto de partida y se comprueba que la lectura de la mira no ha variado para esa posición.

La comparación de las indicaciones estadimétricas se hace midiendo sobre el terreno con una cinta una longitud y luego se mide con el instrumento.

El error a temer, según el inventor, es para  $\omega = 0.01$

$$l = 0.04 \text{ m. } \frac{D}{4000}$$

y para  $\omega = 0.05$

$$l = 0.02 \text{ m. } \frac{D}{10.000} .$$

---

## CAPITULO XIV.

### PLANIMETRÍA

**154. Generalidades.**—El objeto del levantamiento de un plano es representar gráficamente la forma exacta de una zona de la tierra. Para esto es necesario hacer sobre el terreno las medidas angulares y lineales necesarias que determinan la posición de los puntos a representar, fijando la posición relativa entre ellos.

El levantamiento de un plano comprende dos operaciones distintas, la *planimetría* y la *nivelación*.

La planimetría comprende las operaciones que sirven para determinar la proyección horizontal del terreno. La nivelación tiene por objeto la determinación y representación del relieve del terreno.

Cuando el terreno a representar es el fondo del mar y la costa, o el fondo de un río o lago y sus márgenes, además de los procedimientos generales de planimetría y nivelación se emplean algunos particulares, dada la índole del trabajo, que constituye la *Hidrografía*.

Para concebir la proyección horizontal, es necesario imaginar un plano, llevado por el punto central del terreno a levantar, tangente a la superficie terrestre o más exactamente a la superficie media de las aguas oceánicas, consideradas cubriendo la tierra.

Si por cada punto A, B, C y D (figura 166) del terreno se trazan las verticales, los puntos de intersección de estas con el plano tangente, es la proyección de los puntos del terreno; Aa, Bb, etc., son las cotas que fijan verticalmente la posición relativa de los puntos.

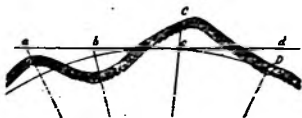


Fig. 166

La hipótesis del plano tangente no es admisible sino en el caso que la extensión del

terreno sea reducida, para que la superficie teórica de la tierra pueda considerarse confundida con este plano.

Sea O (figura 167) el centro de la tierra y R el radio medio de la misma, considerada esférica, A B el plano tangente que sustituye en porción C D del terreno

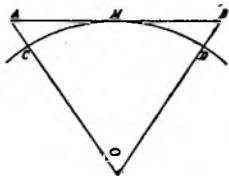


Fig. 167.

$$A B = 2 R \tan \frac{\Theta}{2}$$

$$C M D = 2 R \frac{\Theta}{2}$$

$$A B - C M D = 2 R \left( \tan \frac{\Theta}{2} - \frac{\Theta}{2} \right)$$

desarrollando  $\tan \frac{\Theta}{2}$  en serie

$$A B - C M D = \frac{2 R}{3} \left( \frac{\Theta}{3} \right)^3$$

Para un arco C M D = 100 kms., corresponde próximamente para el ángulo  $\Theta = 1^\circ$  y siendo  $R = 6371103$

$$A B - C M D = 2^m 8.$$

El error relativo en la distancia total es  $\frac{3}{100.000}$ , que en trabajos hidrográficos es despreciable.

Considerada plana la superficie de la tierra, las operaciones del levantamiento se simplifican y los métodos a emplearse constituyen la *Topografía*; pero cuando por la extensión del terreno es necesario tener en cuenta la forma de elipsoide de la tierra hay que aplicar otros métodos que constituyen la *Geodesia*.

**155. Principio de la planimetría.**—Si se determina la posición de dos puntos del terreno A y B, (fig. 168) midiendo la distancia horizontal A B entre ellos, se puede fijar la posición de otro punto C, midiendo en A el ángulo M A B que fija la dirección A M sobre la que se encuentra C; si en B medimos



el ángulo  $NBA$ , en la intersección, de las direcciones  $AM$  y  $BN$  se tendrá situado el punto  $C$ .

Determinada la dirección  $AM$  si desde el punto  $a$  situarse  $C$  se mide el ángulo  $ACB$ , se puede trazar el arco de circunferencia (segmento capaz) sobre el cual se encuentra el punto  $C$ , que es la intersección de ese arco con  $AM$ .

Por el primer método midiendo el ángulo en  $A$  y  $B$ , determinaremos  $C$  por *Intersecciones*; si además de medir  $A$  y  $B$ , también medimos  $C$  tendremos una comprobación del trabajo, pues conocemos los tres ángulos del triángulo, cuya suma es conocida, es este el método de *Triangulación*; si  $A$ ,  $B$  y  $C$  están suficientemente cercanos para que pueda considerarse confundido con la superficie terrestre al plano tangente, 30 kms. a lo sumo, se llama *triángulo topográfico* y si está fuera de ese límite *triángulo geodésico*.

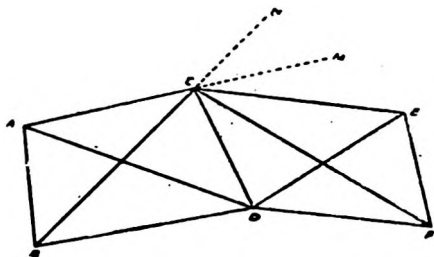


Fig. 168

Determinados los elementos del primer triángulo  $ABC$ , se puede sucesivamente de una manera análoga determinar los del  $BCD$ ,  $CDE$ , etc.; el conjunto de estos triángulos forma una *Red de triangulación*; según sean triángulos geodésicos o topográficos, la red es *Geodésica* o *Topográfica*.

Una *Red de triangulación* puede ser sustituida por una *Cadena de cuadriláteros*:  $ABCD$ ,  $CDEF$ , etc.; con esto además de tenerse la comprobación del cierre angular de cada triángulo y cuadrilátero, se tiene un doble valor de cada lado, lo que sirve para control de las operaciones de observación y cálculo. Pueden dejarse sin medir algunos de los ángulos del

cuadrilátero o no ocupa se una estación; por ejemplo, si en C no se ha medido ningún ángulo se tendrá como elementos de control para el cuadrilátero A B C D el cierre del triángulo A B D y el doble valor de C D.

La posición de E podemos referirla a la de B; midiendo el ángulo A B C y directamente la distancia B C con un taquímetro o cinta, fijada la posición de C se mide el ángulo B C E y la longitud C E; este es el método de *Poligonal*; según que las distancias se midan con taquímetro o cinta, la poligonal es *taquimétrica* o a *cinta*.

La longitud A B sobre la que hemos apoyado la determinación de todos los demás puntos es la *Base* de los trabajos; su medición se hace por procedimientos directos empleando según la precisión e importancia del trabajo que se va a hacer; la cadena, cinta, taquímetro, reglones o alambre Invar; todas las demás medidas que se toman sobre el terreno son goniométricas, y el instrumento a emplear depende de la precisión con que se ha medido la base y por lo tanto del trabajo en general.

**156. Ordenes de triangulación.**— Las operaciones de triangulación comprenden tres órdenes que antes se clasificaban de acuerdo con la longitud de los lados pero que ahora se clasifican de acuerdo con la exactitud de las medidas efectuadas.

Con la triangulación de *primer orden, primaria* o de *precisión* se cubre la superficie a relevarse con una red de triángulos que tienen las características siguientes: el error medio de cada triángulo y el error medio de la medida de cada ángulo es de 1"; la elevación del instrumento queda limitada a una altura de 25 ms. sobre soportes contruidos especialmente para que la plataforma del instrumento sea independiente de la plataforma del observador; las observaciones de día se hacen con heliotropos y de noche con señales luminosas; el soporte de las señales puede elevarse a 40 ms. sobre el terreno. La triangulación de precisión, propia de los trabajos geodésicos, prepara una serie de lados que sirven para apoyar y desarrollar los trabajos de 2º y 3er orden y de ella debe esperarse una exactitud de 1 : 100000 de la longitud de los lados.

En la triangulación de 2° orden o *secundaria* la exactitud es de 2" a 3" de error medio en el cierre para cada triángulo y para la medida de cada ángulo; se emplea para llevar el control de la triangulación de precisión a la localidad donde se efectúa trabajos topográficos o hidrográficos y para control de la triangulación terciaria; el desarrollo de esta triangulación generalmente es menor de 200 kms. El acuerdo entre la longitud de un lado deducido por una triangulación secundaria y el valor dado por la primaria o el acuerdo de las bases de control no debe exceder de 1 : 10000.

En la triangulación *terciaria* la exactitud es de 3" a 5" de error medio en el cierre de cada triángulo y en la medida de cada ángulo; el acuerdo de bases o el control con la triangulación secundaria no debe excederse 1 : 5000.

La triangulación de la costa es del carácter de la terciaria y ella se usa para control de los trabajos topográficos y apoyo de la situación de sondajes y la denominaremos *Triangulación principal*; los puntos A, B, C, D, que la constituyen son *puntos principales* y sirven para determinar otros, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, que llamaremos *puntos auxiliares* que se utilizan para cierre de poligonales a lo largo de la playa, para situación de detalles topográficos y para estaciones de situación de sondajes.

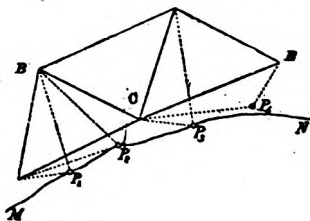


Fig. 169.

La longitud de los lados de la triangulación principal está fijada por dos criterios: en líneas muy cortas es difícil, obtener la exactitud necesaria para el cierre en los triángulos, la experiencia indica que con lados de 6 kms. de longitud la exactitud es prácticamente la misma que se alcanza con líneas más largas; por otra parte, la longitud de los lados debe ser tal que haga mínimo el costo del trabajo, teniendo en cuenta la construcción de señales, los puntos auxiliares que serán necesarios para la topografía e hidrografía y la medida de los ángulos y bases.

**157. Orden de las operaciones.**—Antes de dar comienzo a las operaciones sobre el terreno, es necesario confeccionar un anteproyecto de los trabajos a ejecutarse, para ello se utilizarán los planos y datos que de la región hubiera, y que previamente habrán sido recogidos; si no existiera planos ni datos, será indispensable proceder a efectuar un reconocimiento ligero de la zona de trabajo.

Al recorrer el terreno se irán eligiendo los puntos naturales que deben utilizarse en la triangulación, como así mismo los lugares en que se establecerán las señales oportunas para completar la red. Muy conveniente será aprovechar esta recorrida, tomando desde un punto dominante con un sextante, ángulos a todos los puntos principales del terreno, como también obtener con ayuda de una brújula, el azimut de una línea determinada. Con estos datos y una escala aproximada, se construirá el croquis de la región.

Iniciados los trabajos, y una vez obtenido un número suficiente de puntos, se procederá a fijarlos en proyección ortogonal, con lo cual, al mismo tiempo que se facilitan, se podrán descubrir errores cometidos. Este plano servirá también para la situación de estaciones en el mar, operación que se habrá iniciado tan pronto se tengan determinados los puntos de la costa indispensables.

Si bien la triangulación y la topografía de detalle constituyen dos operaciones bien diversas, que trataremos separadamente, en relevamientos pequeños para mayor economía de tiempo, ellas son efectuadas simultáneamente por los mismos operadores, y a veces con los mismos instrumentos. Otro sistema es dividir el trabajo en dos comisiones a cargo de un solo jefe; una comisión efectúa la triangulación, y la otra, valiéndose de sus elementos, procede al trabajo topográfico de detalle, poligonación de la costa.

Finalmente en otros casos, cuando la zona a relevar es muy extensa conviene hacer una comisión para el trabajo de triangulación y otra para el relevamiento topográfico, poligonal y situación de sondajes. Según las circunstancias y los elementos de que dispone el jefe de la comisión dividirá su personal; teniendo en cuenta al elegir el sitio donde se medirá la base

o ubicar los vértices de triangulación las consideraciones que más adelante se harán.

Los trabajos del sondeaje deben iniciarse tan pronto como se hayan elegidos los puntos convenientes para su situación y determinado un plano de reducción aproximado.

**158. Consideraciones sobre las bases.**—Hemos visto anteriormente, que para el cálculo de la red de triángulos era necesario conocer la longitud de uno de sus lados que llamamos base. La exactitud en su medida es tanto más importante, cuanto mayor sea la red, pues un error sobre la base se reproduce sobre los lados de los triángulos proporcionalmente a su longitud y altera en consecuencia, de una manera considerable, la posición de los puntos lejanos. En los levantamientos que reclaman gran exactitud, conviene no solo medir una base con gran precisión, sino también tener otra base de verificación. No midiéndose más que una sola, es necesario situarla aproximadamente en el centro de la red.

Los puntos más esenciales que deben tomarse en consideración al elegir el terreno en que se situará la base son: que el terreno comprendido entre los extremos sea poco quebrado y aproximadamente horizontal y que de cada uno de los mismos se descubra una buena extensión de la zona cuyo plano se levanta, para facilitar la unión de la base con la red; ésta unión debe hacerse de manera que se obtenga un doble valor del primer lado de la triangulación como más adelante se indicará.

El largo de la base depende de muchas circunstancias; algunos autores aconsejan que sea corta, siendo preferible medir varias veces una de pequeña longitud que una sola vez, una grande.

Actualmente con el uso del alambre Invar ya no hay discusión sobre la conveniencia de que la base tenga la longitud de los lados de la triangulación principal, pues la objeción que se hacía al empleo de bases largas era la poca precisión en los instrumentos para medirla.

La Comisión Hidrográfica del Litoral de la Provincia de Buenos Aires ha empleado una base de 16921 ms. para apoyar la triangulación principal, midiéndola con alambre Invar.

Cuando se trata del levantamiento de una zona reducida, el

cuarteron de un puerto o bahía, en que los lados de los triángulos no son mayores de 4 o 5.000 ms. es suficiente medir una base de 800 o 1.000 ms., sobre todo si hay que hacerlo a cinta; en este caso deberán tomarse todas las precauciones que antes hemos señalado para obtenerse la mayor precisión.

**159. Medida de la base.**—El aparato a usarse en la medida de una base, depende de la importancia y exactitud con que se debe hacer el trabajo, anteriormente se ha dado la aproximación que son susceptibles de proporcionar los instrumentos para medidas de longitudes.

El error medio de las varias medidas de una base no debe exceder de 1: 100000 y este se consigue fácilmente empleando los métodos indicados para la aplicación del alambre Invar, haciendo las correcciones por temperatura, tensión e inclinación.

Deben colocarse pilares de mampostería en los extremos de la base a medir, marcando sobre ellos esos extremos, después se procederá a la medida según lo explicado al hablar de la cadena, cinta, reglas o alambres.

Para cada cintada se anotará, el número de orden, temperatura, tensión de los dinamómetros e inclinación de la cinta. Esta debe ser comprobada en la División de Hidrografía y debe acompañarse con los siguientes datos: longitud entre las marcas extremas y temperatura correspondiente a esa longitud, variación de la misma por cada grado de temperatura y por cada kilogramo de tensión, estos datos sirven para corregir la medida total como mas adelante se verá. La inclinación es conocida por la nivelación hecha del terreno o entre las estacas.

Cuando se trabaja con el alambre Invar se emplean formularios y métodos especiales.

La medida de la base debe hacerse por lo menos dos veces, si se nota divergencia, se efectuará otro par de mediciones. La diferencia entre las medidas debe estar dentro el límite de precisión que hemos establecido según el aparato.

Cuando no se tiene, en línea recta, disponible el terreno necesario para la medida de la base, puede utilizarse una línea quebrada.

Sea A B C (fig. 170) la base quebrada, de la que hemos medido las longitudes A B y B C; para utilizar A C como base, medimos el ángulo A B C con sumo cuidado y tendremos

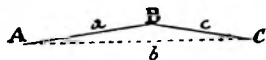


Fig. 170.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

que nos da el valor de A C.

Llamando  $\delta B$  el error cometido en la medida de B y  $\delta b$  el que resulta para A C

$$\delta b = \frac{ac}{b} \text{ sen } B. \delta B$$

El coeficiente de  $\delta B$  será nulo para  $B = 0^\circ$  o  $180^\circ$ , es decir que A B y B C deben estar lo más próximo a la línea recta.

**160. Corrección de la longitud de la base por temperatura, inclinación y tensión.**—La longitud de las reglas, cintas o alambres son variables a causa de las dilataciones que sufren los metales de que están constituidas. La confrontación de ellas a diversas temperaturas con la medida patrón nos permite conocer su longitud y variación por temperatura, dato que debe acompañar el instrumento de medida.

Durante el día, habiendo sol, en la determinación de la temperatura de la cinta puede cometerse errores de más de  $5^\circ \text{ C}$ , por lo que será más conveniente y aún necesario trabajar de noche o con días nublados.

Si  $l_0$  es la longitud de una cinta a la temperatura  $t_0$ ; una medida cuando la temperatura sea  $t_1$ , si el coeficiente de dilatación o variación de la cinta por cada grado de temperatura es  $\theta$  será

$$l_1 = l_0 + (t_1 - t_0) \theta$$

anotando la temperatura,  $t_2, t_3, \dots$  de cada cintada, la longitud entre las marcas de cada medida es

$$l_2 = l_0 + (t_2 - t_0) \theta$$

$$l_3 = l_0 + (t_3 - t_0) \theta$$

$$l_n = l_0 + (t_n - t_0) \theta.$$

La longitud total es

$$L = \Sigma l = n l_0 + [(t_1 - t_0) + (t_2 - t_0) - \dots (t_n - t_0)] \theta$$

Si durante la operación la temperatura ha sido constante o adoptamos como valor de ella el promedio de la temperatura observada al principio y final, lo que se puede hacer siempre que haya variado en el mismo sentido, aumentando o disminuyendo durante la observación,  $t_m = \frac{t_1 + t_n}{2}$  y el valor de la base será

$$L = n l_0 + (t_m - t_0) n \theta = n [l_0 + (t_m - t_0) \theta]$$

*Ejemplo.*—La distancia confrontada entre las marcas de una cinta, es igual a 24006.8 mm. a 20° y 10 kgs. de tensión.

Esta distancia varía según el ajuste, 0.288 mm. por cada grado de temperatura y 0.21 mm. por cada kilo de tensión.

Se ha medido con la cinta una longitud de 50 cintadas, la temperatura al iniciar la operación es  $t_1 = 21^\circ$  y al terminar  $t_n = 29^\circ$ ; aplicando la fórmula anterior.

$$t_m = \frac{29 + 21}{2} = 25^\circ, \theta = 0.288 \text{ mm.}, n = 50, l_0 = 24006.8 \text{ mm.}$$

$$L = 50 [(24.006.8 + (25 - 20) 0.288)] = 1200.412 \text{ m.}$$

La corrección por tensión se aplica análogamente a la de temperatura, una mayor tensión produce una dilatación entre las marcas de la cinta y le corresponde una longitud mayor, suponiendo la temperatura constante, sea  $f_1, f_2 \dots f_n$  la tensión de cada cintada.

$$l_1 = l_0 + (f_1 - f_0) K$$

$$l_2 = l_0 + (f_2 - f_0) K$$

$$l_n = l_0 + (f_n - f_0) K$$

El coeficiente K es la variación de la cinta por cada kilo de tensión

$$L = \Sigma l = n l_0 + [(f_1 - f_0) + (f_2 - f_0) + \dots (f_n - f_0)] K$$

$$L = n l_0 + [f_1 + f_2 \dots + f_n - n f_0] K.$$

El valor de la tensión no podemos suponerlo como el de la temperatura que varía uniformemente desde el principio al fin de la operación, por esta razón no podemos tomar el promedio de  $f_1$  y  $f_n$ .



*Ejemplo.*—Con las constantes de la cinta anterior se ha medido una base que comprende 50 cintadas, después de hecha la corrección por temperatura (ejemplo anterior) se tiene

$$L = 1200.412 \text{ ms.}$$

Las tensiones registradas son 10 de 9.5 kgs., 20 de 10 kgs. y 20 de 11 kgs., siendo  $f_0 = 10 \text{ kg.}$  y  $K = 0.21 \text{ mm.}$

$$\Sigma f = f_1 + f_2 + \dots + f_n = 10 \times 9.5 + 20 \times 10 + 10 \times 11 = 515$$

$$n f_0 = 10 \times 50 = 500$$

Corrección  $= (\Sigma f - n f_0) K = 15 \times 0.21 \text{ mm.} = 0.031 \text{ ms.}$   
la longitud medida es luego

$$1200.412 + 0.031 = 1200.443 \text{ ms.}$$

Si el terreno es inclinado y la diferencia de nivel entre los extremos de cada cinta es  $h$ , la distancia horizontal de cada una es, siendo  $\text{sen } i = \frac{h_1}{l_1}$  etc.

$$l_1^h = l_1 \cos i_1 = l_1 - 2 l_1 \text{sen}^2 \frac{i_1}{2}$$

$$l_2^h = l_2 \cos i_2 = l_2 - 2 l_2 \text{sen}^2 \frac{i_2}{2}$$

$$\vdots$$

$$l_n^h = l_n \cos i_n = l_n - 2 l_n \text{sen}^2 \frac{i_n}{2}$$

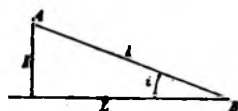


Fig. 171.

$$L = n l - 2 \left( l_1 \text{sen}^2 \frac{i_1}{2} + l_2 \text{sen}^2 \frac{i_2}{2} \dots l_n \text{sen}^2 \frac{i_n}{2} \right).$$

Si la pendiente es uniforme entre los extremos de la base.

$$L = n l \left( 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{i}{2} \right).$$

Como tambien

$$L = \sqrt{l^2 - h^2}$$

la corrección por inclinación es

$$L - l = - \left( l - \sqrt{l^2 - h^2} \right) = - \frac{h^2}{2l} + \frac{h^4}{8l^3}$$

para una cinta de 25 ms. la corrección en metros será

$$- 0.02 h^2 0.000008 h^4$$

y para una de 50 ms.

$$- 0.01 h^2 0.000001 h^4$$

Con estas fórmulas se han calculado tablas de corrección cuyo argumento es la diferencia de nivel  $h$  entre las dos estaciones que limitan una cinta y la longitud de la cinta de 25 ms.

Cuando se trabaja con una cinta de 50 ms. se toma la mitad de la corrección tabular.

**161. Reducción de la base al nivel del mar.** — Por la fórmula anterior obtenemos el largo de la base reducida al horizonte de una de sus extremidades. es decir, el arco de círculo que pasa por dicha extremidad, que debemos proyectar sobre la superficie de nivel del mar, para tener la triangulación reducida a este nuevo nivel. Sea (figura 172)

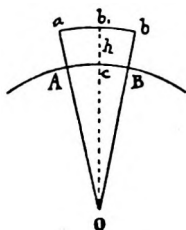


Fig. 172.

$a b = b$  la base horizontal medida,  $b, c = h$  la altura media de la base sobre el nivel del mar,  $A B = B$  la base incógnita reducida a este nivel, y  $R = O B$  el radio de la tierra supuesta esférica.

De la figura se deduce:

$$\frac{\text{arco } a b}{\text{arco } A B} = \frac{R + h}{R}$$

$$\text{o} \quad \frac{b}{B} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\text{y} \quad b - B = \frac{h}{R} B$$

Como  $\frac{h}{R}$  es muy pequeño, podemos reemplazar  $B$  por  $b$  que es la longitud medida y la reducción es

$$b - B = \frac{h}{R} b.$$

Para  $h = 400$  ms.,  $b = 12.000$  ms. y  $R = 6.400.000$  ms., esta reducción, es 0.80 ms. La altura  $h$  se obtiene por una nivelación directa llevada desde la base hasta el mar.

**162. Influencia sobre los lados de los triángulos de un error cometido en la base.**—Siendo  $a$  la base, los lados del triángulo tendrán por valor

$$b = a \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A}, \quad c = a \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}.$$

Supuestos exactos los ángulos medidos en los vértices, hallaremos el error que corresponde a un error  $da$  en la base, diferenciando la fórmula anterior

$$db = da \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} = da \frac{b}{a},$$

$$dc = da \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A} = da \frac{c}{a}.$$

Esto demuestra que el error cometido en la base se transmite a la medida de los lados en proporción directa a la longitud de los mismos e inversa a la longitud de la base.

Suponiendo  $b = 20$  Km y  $a = 5$  Km;  $db = 4 da$ , la gran precisión que por esta circunstancia se requiere en la medida de la base explica porqué esta operación es considerada como una de las más delicadas en los trabajos hidrográficos.

Si queremos que los errores  $db$  y  $dc$  sean iguales a  $da$ , debemos tener  $b = a$  y  $c = a$ : es decir, dar la forma equilateral a los triángulos.

**163. Influencia sobre los lados de un error cometido en los ángulos. Forma de los triángulos.**—El valor de la longitud de los lados es

$$(1) \quad b = a \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} \quad c = a \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}.$$

Siendo  $dA$ ,  $dB$  y  $DC$ , el error cometido en la medida de los ángulos, considerando  $a$  exacto.

$$(2) \quad \begin{cases} db = a \frac{\cos B \text{ sen } A}{\text{sen}^2 A} dB - a \frac{\text{sen } B \cos A}{\text{sen}^2 A} dA \\ dc = a \frac{\cos C \text{ sen } A}{\text{sen}^2 A} dC - a \frac{\text{sen } C \cos A}{\text{sen}^2 A} dA \end{cases}$$

Dividiendo (2) por (1)

$$\frac{db}{b} = \cotg B \, dB - \cotg A \, dA$$

$$\frac{dc}{c} = \cotg C \, dC - \cotg A \, dA$$

Siendo los ángulos medidos con el mismo instrumento, el mismo observador e igual número de veces, los errores pueden considerarse iguales numéricamente

$$\frac{db}{b} = dB (\cotg B - \cotg A)$$

$$\frac{dc}{c} = dC (\cotg C - \cotg A).$$

En el caso que los errores angulares sean también del mismo signo, en la expresión anterior se vé que es suficiente que  $A = B = C$  para que se anule la influencia de los errores en los ángulos. Si estos son iguales, pero de signo contrario.

$$\frac{db}{b} = dB (\cotg B + \cotg A)$$

$$\frac{dc}{c} = dC (\cotg C + \cotg A)$$

las que pueden transformarse

$$\frac{db}{b} = dB \frac{2 \operatorname{sen} C}{\cos(A-B) + \cos C}$$

$$\frac{dc}{c} = dC \frac{2 \operatorname{sen} B}{\cos(A-C) + \cos B}$$

La condición para que  $db$  y  $dc$  sean mínimo es que  $A = B$  y  $A = C$ , por lo tanto la forma más conveniente a dar a los triángulos para que tenga el mínimo efecto un error en los ángulos es la equilátera, con lo cual también se consigue que el error en la medida de la base, como se ha visto anteriormente, se trasmita por igual en la medida de los lados. Por otra parte la forma equilátera ofrece la ventaja de una uniforme distribución de los vértices y como también a igualdad de perímetro es el triángulo equilátero el que cubre la mayor superficie, se deduce que su empleo permitirá cubrir una región determinada con un mínimo de triángulos.

En la práctica, la elección de los vértices está subordinada a las condiciones del terreno y será suficiente que los triángulos no se alejen mucho de la forma equilátera; adoptando como mínimo un valor  $\alpha = 30^\circ$ , pudiendo tener el triángulo dos ángulos del valor mínimo, el valor máximo será  $180 - 2\alpha = 120^\circ$ .

En los levantamientos hidrográficos no se tiene interés en cubrir el máximo de superficie del terreno, sino en unir una serie de puntos principales situados en la faja de costa visible desde el mar, en este caso el desarrollo de la triangulación se hará solamente considerando al lado que servirá para continuar el trabajo sea en tierra o en el mar.

**164. Error medio en la determinación de un lado de un triángulo.**— Si  $a$  es el lado conocido con un error medio  $\mu_a$ ,  $c$  el lado que se calcula y cuyo error medio  $\mu_c$  queremos determinar; A y C los ángulos opuestos medidos respectivamente con un error medio  $\mu_A$  y  $\mu_C$ .

$$c = a \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\mu_c^2 = \left(\frac{dc}{da}\right)^2 \mu_a^2 + \left(\frac{dc}{dC}\right)^2 \mu_C^2 + \left(\frac{dc}{dA}\right)^2 \mu_A^2$$

Siendo

$$\frac{dc}{da} = \frac{c}{a}, \quad \frac{dc}{dC} = c \cotg C, \quad \frac{dc}{dA} = -c \cotg A$$

$$\mu_c^2 = \frac{c^2}{a^2} \mu_a^2 + c^2 \cot^2 C \mu_C^2 + c^2 \cot^2 A \mu_A^2$$

Se considera iguales los errores medios angulares y  $\mu_A = 0$ ; luego,

$$\mu_c = c \operatorname{sen} 1'' \mu \sqrt{\cot^2 A + \cot^2 C}$$

y el error medio relativo en la longitud del lado es

$$\frac{\mu_c}{c} = \mu \operatorname{sen} 1'' \sqrt{\cot^2 A + \cot^2 C} = \mu K$$

En el cuadro siguiente se dan los valores de K para diversas combinaciones de A y C y los valores de  $\mu K$  para  $\mu$  igual a  $1''$ ,  $5''$  y  $10''$ .

A	C	K	$\mu K =$		
			$\mu = 1''$	$\mu = 5''$	$\mu = 10''$
60°	60°	0.000039	1	1	1
			256 000	51 000	256 00
30	30	119	1	1	1
			84000	16800	8400
90	45	048	1	1	1
			200000	40000	20000
45	45	068	1	1	1
			145000	29000	14500
90	30	087	1	1	1
			113000	22600	11300
90	60	027	1	1	1
			360000	72000	36000
90	80	008	1	1	1
			1.160000	232000	116000
90	10	280	1	1	1
			35700	7145	3570
55	85	034	1	1	1
			290000	58000	29000
110	35	071	1	1	1
			140000	28000	14000

165. Error medio sobre el último lado de una cadena de triángulo.—Sea  $a_1$  la base o lado de partida;  $c_1, c_2, c_3$ , los lados sucesivos de la cadena que se utilizan para su desarrollo,

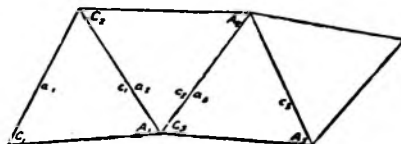


Fig. 173.

consideramos el caso de 3 triángulos, lo que es fácilmente generalizable para un número cualquiera.

$$c_1 = a_1 \frac{\operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A_1}, c_2 = c_1 \frac{\operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A_2}, c_3 = c_2 \frac{\operatorname{sen} C_3}{\operatorname{sen} A_3}$$

$$c_3 = a_1 \frac{\operatorname{sen} C_1 \operatorname{sen} C_2 \operatorname{sen} C_3}{\operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3}$$

Se tiene

$$\frac{d c_3}{d a_1} = \frac{c_3}{a_1}$$

$$\frac{d c_3}{d C_1} = a_1 \frac{\cos C_1 \operatorname{sen} C_2 \operatorname{sen} C_3}{\operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3} = c_3 \cotg C_1$$

y análogamente

$$\frac{d c_3}{d C_2} = c_3 \cot C_2, \frac{d c_3}{d C_3} = c_3 \cot C_3$$

Por otra parte

$$\frac{d c_3}{d A_1} = -a_1 \frac{\operatorname{sen} C_1 \operatorname{sen} C_2 \operatorname{sen} C_3}{\operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3} = -c_3 \cotg A_1$$

y análogamente

$$\frac{d c_3}{d A_2} = -c_3 \cotg A_2, \frac{d c_3}{d A_3} = -c_3 \cotg A_3$$

El error medio  $\mu_{c_3}$ , siendo los errores medios angulares:

$$\mu_{C_1}, \mu_{C_2}, \mu_{C_3} \text{ y } \mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \mu_{A_3},$$

será

$$\begin{aligned} \mu^2 c_3 = & \left( \frac{c_3}{a_1} \right)^2 \mu^2 a_1 + c_3^2 \cot^2 C_1 \mu^2_{C_1} + c_3^2 \cot^2 A_1 \mu^2_{A_1} \\ & + c_3^2 \cot^2 C_2 \mu^2_{C_2} + c_3^2 \cot^2 A_2 \mu^2_{A_2} \\ & + c_3^2 \cot^2 C_3 \mu^2_{C_3} + c_3^2 \cot^2 A_3 \mu^2_{A_3} \end{aligned}$$

Considerando igual para todos los ángulos el error angular  $\mu$  y nulo el error en la base

$$\frac{\mu c_3}{c_3} = \mu \operatorname{sen} 1'' \sqrt{(\cot^2 C_1 + \cot^2 A_1) + \dots + (\cot^2 C_3 + \cot^2 A_3)}$$

En el caso de  $n$  triángulos que sean iguales  $C_1 = C_2 = C_n$  y  $A = A_2 \dots = A_n$ .

$$\frac{\mu c_n}{c_n} = \mu \operatorname{sen} 1'' \sqrt{n} \sqrt{\cot^2 C + \cot^2 A} = \mu_1 K \sqrt{n}$$

donde  $K$  tiene el valor anteriormente dado.

Para un error medio angular,  $\mu = 5''$  y  $n = 16$ , siendo los triángulos equiláteros

$$\frac{\mu c}{c_{16}} = \frac{\sqrt{16}}{510000} = \frac{1}{12750}$$

y en estas condiciones podríamos cubrir una faja de costa de 160 kms. de longitud con triángulos de 10 kms. de lado manteniéndonos dentro de una precisión menor de  $\frac{1}{10000}$  establecida para las triangulaciones de 2º orden.

El cálculo del error medio sobre un lado servirá para determinar cuando es necesario cerrarla sobre una nueva base para no seguir acumulando los errores de acuerdo con la precisión preestablecida.

También nos da un criterio sobre la elección de las figuras para situar los puntos principales de un trabajo hidrográfico y para ampliar la base

Así, el lado (1 — 2) puede servir para unir los puntos 3 — 4 mediante las figuras (174) y el valor de K es

$$K_{3-4} = \sin 1'' \sqrt{2 \cot^2 80 + 2 \cot^2 90} = \frac{1}{800000}$$

En una red de triángulos, el error medio angular  $\mu$ , puede calcularse con la fórmula internacional adoptada por la Comisión Geodésica Internacional.

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum \omega^2}{3n}}$$

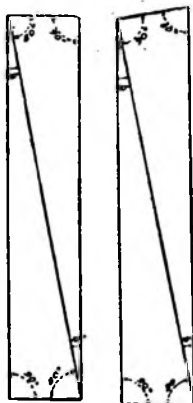


Fig. 174.

donde  $\omega$  es el error de cierre de cada triángulo y  $n$  el número de triángulos que constituyen la red.

**166. Unión de la base con la red de triángulos.**—Los accidentes del terreno y la posición de los vértices de los triángulos principales no permiten siempre adoptar como base uno de los lados de un triángulo; por otra parte la base no puede ser sino de corta longitud, comparada con la de los lados de



los triángulos, y es necesario desarrollarla hasta alcanzar dimensiones convenientes en forma que se tenga seguridad en la exactitud del primer lado de la triangulación alcanzado, para esto se ejecuta una triangulación especial, cuyo único objeto es la *ampliación de la base*, mediante la cual se determina con sumo cuidado el valor de la distancia entre dos puntos que pueden ser considerados como vértices de triangulación, distancia que debe ser comprobada como más adelante se expone.

Siendo  $ab$  (fig. 175) la base medida, para alcanzar el lado  $AB$  de la triangulación, lo primero que ocurre es desarrollar una serie de triángulos, cuyos lados sean sucesivamente mayores, atendiendo a lo dicho sobre la forma de los mismos, no convendrá pasar los límites de  $100^\circ$  y  $45^\circ$  para los ángulos sobre la base y  $35^\circ$  en el vértice opuesto, con los triángulos  $abA$ ,  $AbI$ ,  $AIB$ , llegamos al lado  $AB$ , el valor obtenido para este debemos comprobarlo con otro desarrollo que puede ser  $ab1$ ,  $a12$ ,  $a2A$  y  $A2B$ .

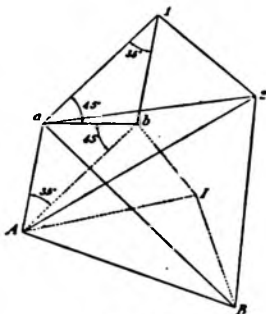


Fig. 175.

La condición que debe llenar, la ampliación de la base, es obtenerla con el menor número de triángulos, y que éstos tengan la mejor forma posible y que su valor esté debidamente comprobado.

Las figuras 177 y 176 muestran como puede pasarse de la base medida  $ab$  a la base deducida  $AB$ .

El método de ampliación romboidal o de Bessel consiste en apoyarse sucesivamente sobre la diagonal del cuadrilátero formado por dos vértices elegidos simétricamente a la base, en vez de utilizar los lados del triángulo. Este método es muy ventajoso cuando es muy pequeña la longitud de la base con relación a los lados de la triangulación a desarrollar, con dos rombos puede obtenerse una ampliación en que la relación de la base medida a la deducida sea 1 a 5.

El método consiste en elegir sobre la perpendicular a la base  $MN$ , (fig. 178) los puntos  $P$  y  $Q$ , el cálculo de los triángulos

MNP y MNQ, nos da la situación de P y Q por lo tanto la

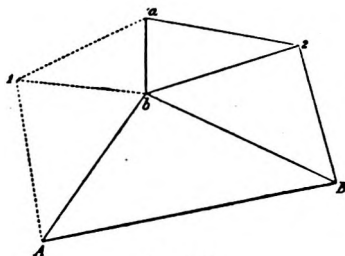


Fig. 176.

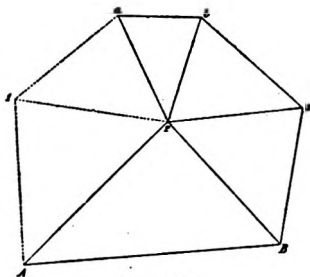


Fig. 177.

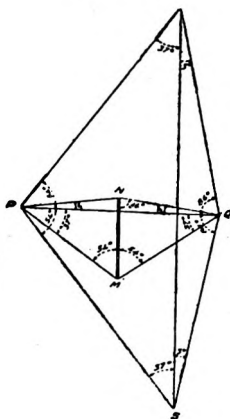


Fig. 178.

diagonal P Q. Deben medirse en cada vértice los ángulos formados entre los lados del triángulo y la diagonal en el vértice, en el punto P se medirán los ángulos NPM, NPQ y QPM independientemente, lo mismo se hace en los demás vértices; antes de someter al cálculo el cuadrilátero debe compensarse los ángulos medidos para que parcialmente en cada triángulo su suma sea  $180^\circ$  y en el cuadrilátero  $360^\circ$ .

Para un desarrollo como el indicado en la fig. 178 se tendrá una ampliación de la base de 1 a 5.

El valor de  $K = \frac{1}{115000} \sqrt{\cot^2 40^\circ + \cot^2 86^\circ + \cot^2 108^\circ + \cot^2 37^\circ}$  correspondiente a los triángulos MNP y PMQ para deducir la primera diagonal es de  $\frac{1}{115000}$  y para la segunda diagonal RS,  $K = \frac{1}{80000}$ .

**167. Poligonal de precisión.** — En localidades muy llanas, boscosas o en zonas donde por su naturaleza es difícil el transporte de materiales y traslado de observadores, es más rápido y económico aprovechar uno de los caminos a lo largo de la costa o la parte en que la tierra cae hacia el mar o la faja de la playa, para llevar una poligonal cuya exactitud es comparable con la triangulación. Esta forma de trabajar es ampliamente empleada por el Coast and Geodetic Survey (E. U. de N. A.) siguiendo las vías de ferrocarriles; en nuestro país el primer trabajo de esta índole es la unión de la triangulación del Río de la Plata con la triangulación de la costa marítima de la Provincia de Buenos Aires y ella está comprendida entre Punta Piedras y Cabo San Antonio, sus resultados hacen preveer su aplicación posterior. (Anales Hidrográficos, tomo V).

El método consiste en ligar los extremos A y D mediante la medida de las longitudes AB, BC, CD, etc. y los ángulos ABC, BCD, etc. Además se observa el azimut de AB y de la última línea por lo menos.

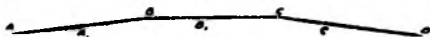


Fig. 179.

Las medidas de las longitudes se efectúa con alambre Invar, empleándose los métodos aplicados a la medida de bases y efectuándose las correcciones por temperatura, tensión e inclinación, etc.

En general la distancia entre las estaciones sucesivas no superan a 10 kms. para evitar la construcción de señales grandes en las medidas angulares; además, se tendrá en cuenta los puntos que serán necesarios para la situación de los detalles topográficos y para los trabajos hidrográficos. Las estaciones A, B, C.... quedarán señaladas con pilares principales, otros puntos A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, pueden dejarse indicados con pilares diferentes y su situación está dada por su distancia a los pilares principales.

En la poligonal de exactitud equivalente a la de la triangulación de precisión, las medidas de longitud están hechas con un error medio de 1 : 75000, los ángulos con 3 series de 6

repeticiones del ángulo a medir y del suplemento; los azimutes se observan cada 30 o 35 estaciones con un error medio de  $\pm 0''5$ .

En la poligonal equivalente a la triangulación secundaria, los puntos extremos no estarán a más de 300 kms.; el error medio en la medida de las longitudes es de 1: 25000; para los ángulos basta una serie de 6 repeticiones con teodolitos de 5" y los azimutes se observan cada 15 o 20 estaciones con un error medio de  $\pm 1''5$ .

En la poligonal equivalente a la triangulación terciaria, que es la principal en un trabajo hidrográfico; el error medio en la medida de longitudes será de 1: 10000; para los ángulos bastará una serie de 3 repeticiones del ángulo a medir y 3 repeticiones del suplemento con el anteojo invertido.

## CAPITULO XV.

### CÁLCULOS DE LA TRIANGULACION.

**168. Reducción de las medidas angulares horizontales al centro de estación.**—No es siempre posible colocar el instrumento en el centro de la señal para observar; así, cuando la señal es una torre, faro, etc., será necesario hacer estación exéntrica y los ángulos que se miden desde ésta, deberán sufrir una corrección para obtener los que se habrían observado desde el centro de la señal.

Sea C (fig. 180) el centro de la señal utilizada como vértice del triángulo ABC, los ángulos A y B medidos haciendo estación central, no pudiéndose colocar el instrumento en C, será necesario colocarlo en D y se medirá el ángulo BDA; el problema se reduce a deducir el ángulo  $B'DA' = BCA$  del ángulo medido BDA.

$$B'DA' = BDA - BDB' + ADA'.$$

Llamando  $d = CD$ , la distancia entre el centro de señal C y a estación D, la que medimos directamente.

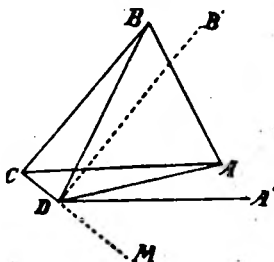


Fig. 180.

$$BDB' = CBD, \quad \text{sen } CBD = \frac{d \text{ sen } CDB}{CB}$$

$$ADA' = CAD, \quad \text{sen } CAD = \frac{d \text{ sen } CDA}{CA}$$

Los ángulos CDB y CDA los medimos con el instrumento, es suficiente unos minutos de aproximación. Los lados CB y CA los calculamos aproximadamente resolviendo el triángulo como si el ángulo BDA fuera el exacto que corresponde a ese vértice.

Como el valor de las correcciones es muy pequeño puede ponerse

$$CBD = \frac{d \operatorname{sen} CDB}{CB \operatorname{sen} 1''}$$

$$CAD = \frac{d \operatorname{sen} CDA}{CA \operatorname{sen} 1''}$$

Para no equivocarse en los signos de las correcciones conviene hacer un croquis representando aproximadamente la situación de los cuatro puntos A, B, C y D.

En algunos casos en vez de una, se tienen dos o las tres estaciones excéntricas, se hace siempre el cálculo aproximado del triángulo con los ángulos medidos, para obtener la longitud de sus lados, que entra en el cálculo de la reducción al centro de estación.

*Ejemplo.* — Haciendo estación central en A se ha medido el ángulo  $BAC = 76^{\circ} 43' 45''$  y en C el  $ACB = 65^{\circ} 48' 30''$ .

En B se ha hecho estación excéntrica según indica el formulario (pág. 229.) El lado conocido del triángulo es  $BC = 30751.99$ .

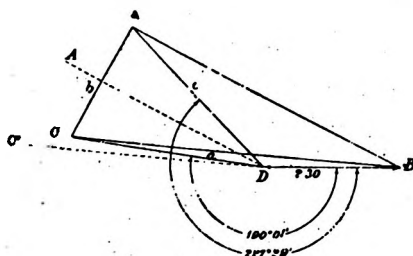


Fig. 181.

*Cálculo aproximado del triángulo ADC.*

$$\log c = 4.45970$$

$$\log \operatorname{sen} C = 7.98008$$

$$\log a = 4.48787$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = 0.01175$$

$$\log \operatorname{sen} B = 7.78416$$

$$\log b = 4.28374$$

## TRIANGULACION PRINCIPAL

### ESTACIONES EXCÉNTRICAS.—CROQUIS Y ELEMENTOS PARA LA CENTRACIÓN

**Vértice.** Faro Mogotes.

**Anotaciones.** Las visuales tangentes al Faro desde el punto de estación D, son  $135^{\circ} 15'$  y  $239^{\circ} 15'$ ; la visual que corresponde a D B será  $187^{\circ} 15'$ .

La lectura D A =  $54^{\circ} 44' 25''$ .

La lectura D C =  $17^{\circ} 16' 10''$ .

La circunferencia exterior del Faro medida con una cinta es 11.68 ms., a la que corresponde un radio de 1.86 m.

La distancia del centro de estación a la pared del Faro es 0.44 m.; luego su distancia al centro del Faro es

$$d = 0.44 + 1.86 = 2^m 30.$$

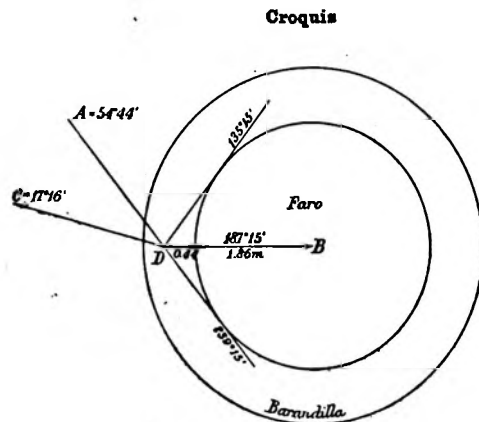


Fig. 182.

*Cálculo de la reducción al centro.*

$C = 17^{\circ} 18'$	$\log \text{sen } 1'' = 5.31442$	$A = 54^{\circ} 44'$	$\log \text{sen } 1'' = 5.31442$
$B = 187^{\circ} 15'$	$\log d = 0.36173$	$B = 187^{\circ} 15'$	$\log d = 0.36173$
$\beta = 190^{\circ} 01'$	$\log \text{sen } \beta = 1.24027 (n)$	$\beta = 227^{\circ} 29'$	$\log \text{sen } \beta = 1.88752 (n)$
	$\text{colg } a = 5.51213$		$\text{colg } c = 5.54030$
	$\log \text{red} = 0.42821$		$\log \text{red} = 1.08397$
	$\text{red} = -2'' 68$		$\text{red} = -12'' 14$

Visual a  $A = 54^{\circ} 44' 25'' - 12'' 14 = 54^{\circ} 44' 12'' 86$

• a  $C = 17^{\circ} 16' 10'' - 2'' 68 = 17^{\circ} 16' 07'' 32$

$A B C = 37^{\circ} 28' 05'' 54$

Sin tener en cuenta los signos obtenidos para las reducciones, podríamos deducir del croquis que para obtener el ángulo  $A B C$  debemos, al ángulo  $A D C$  medido, restarle la reducción  $A D A'$  y sumarle la  $C D' C'$ .

**169. Reducción al centro de señal.** — Sea  $B$  el centro de una señal y  $D$  el punto visado de ella desde la estación  $A$ , si queremos reducir la lectura correspondiente  $A D$ , al centro de la señal,  $A B$ ; análogamente al caso anterior medimos la distancia  $B D = d$  y el ángulo  $B D A$ , para lo cual hacemos estación en  $D$ , punto visado; del triángulo  $A D B$  obtenemos

$$\frac{d}{A B} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } B D A}$$

$$\text{o sea } \beta = \frac{d \text{ sen } B D A}{A B \text{ sen } 1''}$$

Como en el caso anterior, primeramente se hace un cálculo aproximado del triángulo  $A B C$ , y se considera  $A D = A B$ . El ángulo que se quiere medir es:

$$C A B = C A D + D A B.$$

**170. Cálculo de un triángulo.** — En las operaciones de triangulación, los ángulos que medimos sobre el terreno, pertenecen a triángulos del elipsoide terrestre, es decir, que

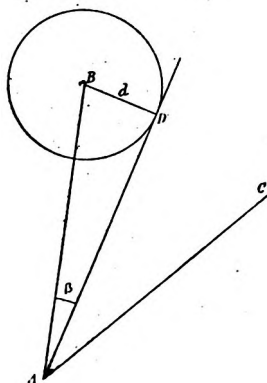


Fig. 183.



tienen por lados líneas geodésicas; pero siendo los triángulos muy pequeños con relación a las dimensiones de la tierra, las siguientes consideraciones simplifican su cálculo:

1) Se demuestra en la teoría general de las superficies que, *para que un elemento de superficie cualquiera, supuesto flexible, se pueda aplicar sobre una esfera, es necesario y suficiente que esta tenga por radio  $\sqrt{NR}$ .*

N y R siendo los radios de curvatura principales de la superficie en el punto medio del elemento considerado. Tratándose de la superficie terrestre, N es la normal mayor y R el radio de curvatura del meridiano, sus valores están dados en tablas, en función de la latitud.

En estas condiciones, puesto que la superposición de los dos elementos de superficie se hace sin extensión ni deformación, los ángulos que forman las líneas trazadas sobre la superficie primitiva no son alterados, como tampoco la longitud de las mismas líneas. El triángulo geodésico se convierte entonces sin alteración en un triángulo esférico.

La demostración del principio enunciado está basada sobre desarrollos en series y el cálculo prueba que limitándose a los primeros términos de estas series, el valor de los términos despreciados es siempre inferior al de los errores de observación, aún en el caso de los más grandes triángulos geodésicos conocidos.

2) Los triángulos esféricos pueden substituirse por triángulos rectilíneos planos, debido al siguiente principio demostrado por Legendre.

*Si se considera un triángulo esférico muy pequeño, se le puede substituir por un triángulo rectilíneo, cuyos lados son de la misma longitud y en que los ángulos son iguales a los del esférico, disminuidos del tercio del exceso esférico.*

El valor del exceso esférico para un triángulo de 20 km. de longitud de los lados es proximately  $\epsilon = 1''5$ , de manera que la corrección para cada ángulo  $\frac{\epsilon}{3} = 0''5$ , valor mucho menor que la aproximación con que en general se pueden medir los ángulos en un trabajo hidrográfico, en los que por otra parte no tienen más de 20 km. de longitud sus

lados; por esta razón en general será suficiente calcular el triángulo como si fuera plano, previa compensación de los ángulos como se indicará mas adelante.

Agregaremos que basándose en consideraciones sacadas de la teoría general de las superficies, se demuestra directamente que el teorema de Legendre se aplica a los triángulos geodésicos, trazados sobre el elipsoide y que se pueden calcular estos triángulos como si ellos fuesen planos, restando de cada ángulo un tercio del exceso esferoídico.

**171. Compensacion de los ángulos.** -- Antes de calcular un triángulo es necesario transformarlo en un verdadero triángulo geométrico.

Como cada ángulo del triángulo plano es igual a los del triángulo esférico correspondiente disminuido de  $\frac{1}{3}$  del exceso esférico  $\epsilon$ ; si  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  son los ángulos medidos en el terreno, los ángulos planos serán:

$$A = A' - \frac{1}{3} \epsilon; \quad B = B' - \frac{1}{3} \epsilon, \quad C = C' - \frac{1}{3} \epsilon.$$

La suma

$$A + B + C = A' + B' + C' - \epsilon$$

debe ser igual a  $180^\circ$ ; en general esto no sucederá debido a los errores que se han cometido en la medida de cada uno de los ángulos; y llamando  $W$  la suma algebraica de estos errores

$$A + B + C = 180^\circ + W = A' + B' + C' - \epsilon.$$

El error  $W$  se reparte por igual entre los tres ángulos y los valores definitivos de los mismos son:

$$A_1 = A - \frac{1}{3} W, \quad B_1 = B - \frac{1}{3} W, \quad C_1 = C - \frac{1}{3} W$$

o reemplazando los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$

$$A_1 = A' - \frac{1}{3} (W + \epsilon), \quad B_1 = B' - \frac{1}{3} (W + \epsilon),$$

$$C_1 = C' - \frac{1}{3} (W + \epsilon).$$

También se obtiene:

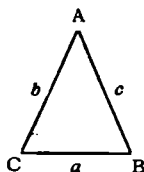
$$W = [(A' + B' + C') - \epsilon] - 180^\circ$$

y cuando se quiere calcular exactamente el error de cierre  $W$  es necesario conocer el valor del exceso esférico.

$$A' + B' + C' - 180^\circ = W + \epsilon$$

es decir, que la diferencia entre la suma de los ángulos medidos en el terreno y  $180^\circ$  nos da la suma del error del cierre y del exceso esférico  $W + \epsilon$ , cuyo tercio es la corrección a aplicar a cada ángulo para reducir el triángulo esférico a un triángulo geométrico plano.

*Ejemplo*



*Compensación de los ángulos.*

APROXIMADOS	PLANOS
A = 62° 17' 46" 1	62° 17' 45" 9
B = 66° 11' 20" 9	66° 11' 20" 7
C = 51° 30' 53" 6	51° 30' 53" 4
$\Sigma = 190^\circ 00' 00" 6$	180° 00' 00" 0
$\frac{1}{3}(W + \epsilon) = 0" 2$	

*Cálculo del triángulo*

$\log b = 4.2288651$	$b = 16938.04$
$\log \sin B = 1.9613655$	
$\log a = 4.2146184$	$a = 16391.49$
$\text{colog} \sin A = 0.0528792$	
$\log \sin C = 1.8956338$	$c = 14492.10$
$\log c = 4.1611314$	

**172. Meridiana y perpendicular.**—Sea una red de triángulos A B C D E (fig. 184) sobre la superficie de la tierra supuesta esférica, si por la vertical de uno de los vértices A, concebimos el plano que la contiene y que pasa por el polo, éste determinará la línea *meridiana* A P, el plano normal al plano meridiano determina sobre la esfera un segundo círculo máximo cuya intersección A H es la *perpendicular*.

Considerando A (H. P) como ejes de coordenadas esféricas, se pueden referir los demás vértices de la triangulación B, C, D y E, los que quedarán determinados por (Ab, Bb)

(Ac, Cc) etc., trazando los arcos de círculo Bb, Cc, etc., perpendiculares A H.

Imaginemos el plano tangente a la superficie terrestre en A, que es el plano horizontal; su intersección con el plano meridiano A P, nos da la meridiana A Y y la intersección con el plano A H la perpendicular A X; es a estos dos ejes rectangulares A (X. Y) que se refieren generalmente los diferentes vértices de la triangulación.

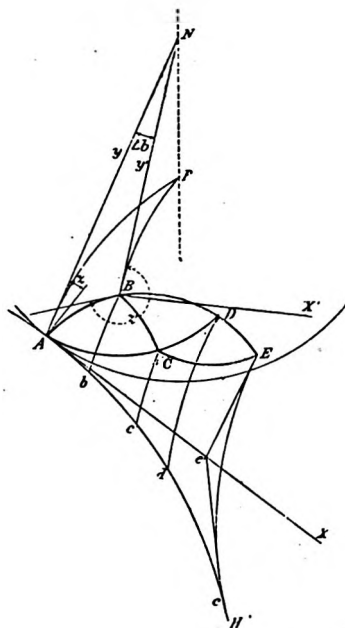


Fig. 184

La proyección  $e'$  de uno de los vértices sobre AX, determina las coordenadas  $y = E e'$ ,  $x = A e'$  del punto E, que difieren de  $E e$  y  $A e$  antes definidas sobre los ejes curvos A (P. H). La divergencia de estas coordenadas es tanto mayor cuanto más alejado está el vértice del origen; por esta razón cuando el levantamiento comprende una gran zona se cambia de origen cada 80 o 100 Km.; dentro de ese límite puede considerarse la superficie de la tierra confundida con el plano tangente a la misma, sin que el error que por esto se produce, sea mayor que los que provienen de la aproximación que proporcionan los instrumentos.

En general, se considera un vértice central de la triangulación como origen de coordenadas y que cada uno de los vértices se proyectan según líneas paralelas a los ejes. Los ángulos que cada uno de los lados forma con la dirección de la meridiana es el *azimut* Z, que se cuenta positivo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  del N al E.

173. **Convergencia de meridianos.** — La meridiana B N (fig. 184) y su perpendicular es el sistema de ejes B ( $X' Y'$ ) en el punto B; que forma con el A ( $X Y$ ) el ángulo B N A que se llama *convergencia de meridianos*  $\Delta Z$ .

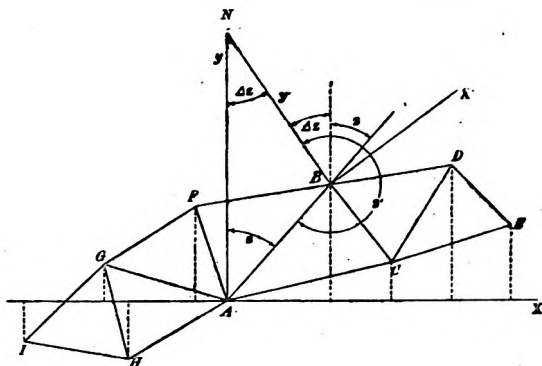


Fig. 185.

Refiriéndonos a las figuras (184) y (185), el azimut de la línea A B es Z, ángulo que forma el lado del triángulo con la meridiana en A; en B, el azimut de la línea B A es el ángulo que forma B A con la meridiana en B,

$$Z' = Z + 180^\circ + \Delta Z;$$

luego, el azimut de una línea difiere en  $180^\circ + \Delta Z$  según esté referido a la meridiana que pasa por uno de sus extremos o por el otro. El valor de la convergencia de meridianos está dado por

$$\Delta Z = \Delta \omega \operatorname{sen} \varphi_m$$

siendo  $\Delta \omega = \omega' - \omega$ , diferencia de longitud entre los vértices y  $\varphi_m = \frac{\varphi' + \varphi}{2}$ , latitud media.

La fórmula indica que cuanto menor es la latitud media, menor es el valor de la convergencia; lo que puede deducirse gráficamente, teniendo en cuenta que es el ecuador el arco de círculo máximo perpendicular al meridiano del origen de coordenadas y también a todos los demás meri-

dianos; en la latitud de A, donde la perpendicular es A H, el arco perpendicular a todos los meridianos es el paralelo A R.

El valor de la convergencia de meridianos para vértices cuya diferencia de longitud es  $10'$ , en nuestras latitudes, es la siguiente

$\varphi m$	$\Delta Z$
$35^\circ$ .....	5' 44"
$40^\circ$ .....	6 25
$45^\circ$ .....	7 04
$50^\circ$ .....	7 39
$55^\circ$ .....	8 11

Estos valores indican que la convergencia de meridianos no es despreciable aún en los casos de levantamientos de zonas poco extendidas, siempre que su desarrollo sea en longitud.

En levantamiento de puertos no será necesario tener en cuenta la convergencia de meridianos y podrán estos considerarse paralelos.

**174. Coordenadas rectangulares planas de los vértices de triangulación.**— El cálculo de las coordenadas de los vértices de la triangulación se hace llevando por cada uno de estos vértices paralelas a los ejes y calculando los lados

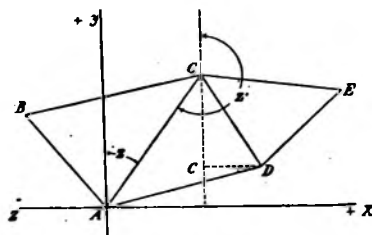


Fig. 186.

del triángulo rectángulo así formado, con el azimut y la longitud de la hipotenusa que es el lado del triángulo. Lo que así se obtiene, son las coordenadas de cada vértice con re-

lación al vértice precedente, las que se llaman *coordenadas relativas* y las coordenadas definitivas o *absolutas* se obtienen por simple adición de las relativas y las absolutas del vértice al que están referidas las relativas.

Si A es el vértice, origen de coordenadas, Z (A. C) el azimut del lado A C (fig. 186), las coordenadas de C respecto a A son:

$$X_C^A = A C \sin Z (A. C)$$

$$Y_C^A = A C \cos Z (A. C)$$

siendo las abscisas positivas hacia el E y las ordenadas positivas hacia el N; lo que se impone por la convención sobre el sentido y origen de los azimutes, las coordenadas absolutas de D son:

$$(1) \quad X_D^A = A D \sin Z (A. D)$$

$$Y_D^A = A D \cos Z (A. D)$$

Por otra parte

$$Z (C. A) = Z (A. C) + 180$$

$$y \quad Z (C. D) = Z (C. A) - A C D$$

como C D es lado conocido de la triangulación, del C C' D se deduce

$$D C' = X_D^C = C D \sin Z (C. D)$$

$$C D' = Y_D^C = C D \cos Z (C. D)$$

Las coordenadas absolutas respecto a A serán las relativas respecto a C más las absolutas de C respecto a A

$$(2) \quad X_D^A = X_C^A + X_D^C$$

$$Y_D^A = Y_C^A + Y_D^C$$

Los valores obtenidos con (1) y (2) deben ser iguales, si esto no sucede, hay equivocaciones en el cálculo de las coordenadas o en el del triángulo.

Con las coordenadas de C y D se deducirá un par de valores para las de E y así sucesivamente para los otros vértices.

175. Cálculo de coordenadas rectangulares de una cadena de triángulos.—*Ejemplo.*—Sean 1, 2, 3, 4, 5 los vértices de una cadena de triángulos, en los que siempre se designa con la letra A el ángulo opuesto al lado que sirve para calcularlo; designándose con B y C; en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj, los otros vértices.

Los datos son para el triángulo, 1, 2, 3.

Punto 1, origen de coordenadas

$$Az \text{ de } BC = 100^{\circ} 21' 04'' 3$$

$$\begin{array}{ll} A = 52^{\circ} 31' 08'' 0 & BC = 8552.211 \\ B = 56^{\circ} 35' 47'' 3 & AC = 8996.873 \\ C = 70^{\circ} 53' 04'' 7 & AB = 10182.864 \end{array}$$

Primeramente calculamos las coordenadas del vértice C.

$$\begin{array}{ll} \log. BC = 3.9320784 & \log. BC = 5.9320784 \\ \log. \text{sen } Az. BC = 1.9928737 & \log. \cos BC = 1.2545028 (n) \\ \log \Delta X = 5.9249521 & \log \Delta Y = 3.1865812 \\ \Delta X = 8413.023 & \Delta Y = - 1536.625 \\ X_B = 0 & Y_B = 0 \\ X_C = 8413.023 & Y_C = - 1536.625 \end{array}$$

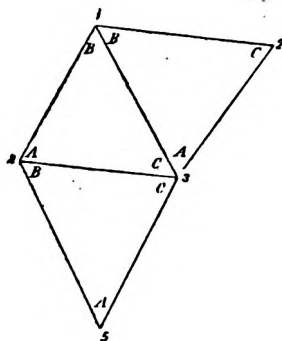


Fig. 187.

Conocidas las coordenadas de B y C, se calculan las de A, punto 3, con el formulario siguiente; luego con 1 y 3 en forma análoga las del 4 y por



último con 4 y 3 las del 5. Los pares de valores para X e Y deben ser siempre iguales.



Vértice A (Punto 3)

lado C A = 8996.873 ms.

» B A = 10182.864 »

ángulo B = 56° 35' 47".3

» C = 70° 53' 04".7

Az. de C B = 280° 21' 04".3

—  $\angle$  C = 70° 53' 04".7

Az. de C A = 209° 27' 59".8

log. C A = 3.9540916

log. sen. Az. C A = T.6918904 (n)

log.  $\Delta$  X = 5.6459820

$\Delta$  X = - 4.425.700

+ X<sub>c</sub> = + 8.415.025

X<sub>A</sub> = + 3.987.9323

log. C A = 3.9540916

log. cos. Az. C A = T.9398401 (n)

log.  $\Delta$  Y = 3.8939317

$\Delta$  Y = - 7.833.064

+ Y<sub>c</sub> = - 1.536.625

Y<sub>A</sub> = - 9.369.689

Az. de B C = 100° 21' 04".3

+  $\angle$  B = 56° 35' 47".3

Az. de B A = 156° 56' 51".6

log. B A = 4.0078699

log. sen. Az. B A = T.5928114

log.  $\Delta$  X = 3.6006813

$\Delta$  X = + 3.987.322

+ X<sub>B</sub> = 0.0

X<sub>A</sub> = + 3.987.322

log. B A = 4.0078699

log. cos. Az. B A = T.9638575 (n)

log.  $\Delta$  Y = 3.9717274

+ Y<sub>B</sub> = 0.0

Y<sub>A</sub> = - 9.369.737

$\Delta$  Y = - 9.369.737

Punto 3 { X = + 3.987.322  
Y = + 9.369.713

**176. Compensación de la triangulación.**—Los ángulos que resulten de las observaciones, deben antes de ser utilizados para el cálculo de los lados de los triángulos, sufrir correcciones. En trabajos hidrográficos para la compensación de una triangulación o figura, es suficiente emplear el método aproximado que consiste en satisfacer las diferentes condiciones que se enunciaran, haciendo la repartición de los errores por partes iguales, sin atribuir diversa exactitud a las observaciones.

Las condiciones a llenar son las siguientes:

(1) Los ángulos medidos en cada vértice deben compensarse de acuerdo con el método usado: con o sin vuelta al horizonte o con combinaciones binarias.

(2). Que la suma de los tres ángulos de cada triángulo sea igual a dos rectos (171).

(3) Si los triángulos están dispuestos en red, (fig. 188), la suma de los ángulos dispuestos alrededor de un punto debe ser igual a  $360^\circ$ ; si forman cadena (fig. 187), apoyados sobre dos bases de orientaciones conocidas, la orientación de la segunda base, deducida de la primera por medio de dos ángulos intermedios, debe ser igual a la orientación hallada por observación directa, habiendo tenido en cuenta la convergencia de meridianos; si la figura es un cuadrilátero, el caso se trata como el primero, la orientación para el lado de salida, deducida por el transporte angular con los ángulos del cuadrilátero, debe tener el mismo valor original.

(4) Los ángulos deben tener un valor tal, que si en una triangulación, se parte de una base medida para cerrarse sobre si misma, caso de una red y del cuadrilátero, o cerrarse en otra base de llegada, caso de una cadena el cálculo de la longitud de estas bases y su medida directa, deben dar el mismo valor, esta condición se llama de cierre y su corrección se denomina corrección por *acuerdo de bases*, esta indica la exactitud del trabajo y no debe exceder la tolerancia permitida. Haremos algunas aplicaciones.

**177. Compensación de una red de triángulos.**— Para cada triángulo se hace la suma de los tres ángulos medidos y se obtiene la corrección  $\frac{e}{3}$ .

$$e = (A + B + C) - 180^\circ$$

Los ángulos compensados son

$$A' = A - \frac{e}{3}, B' = B - \frac{e}{3}, C' = C - \frac{e}{3}$$

$$A' + B' + C' = 180^\circ$$

Hecha la compensación anterior para cada triángulo, alrededor del punto A tendremos los ángulos  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  cuya suma debe ser igual a  $360^\circ$ , se tendrá en general.

$$(A'_1 + A'_2 + \dots + A'_n) - 360^\circ = e'$$

corrigiendo cada ángulo por  $\frac{e'}{n}$ , resulta

$A''_1 = A'_1 - \frac{e'}{n}$ ,  $A''_2 = A'_2 - \frac{e'}{n}$  ...  $A''_n = A'_n - \frac{e'}{n}$  y la suma

$$A''_1 + A''_2 + \dots A''_n = 360^\circ$$

La suma de los ángulos de cada triángulo será ahora, considerando el ABC

$$A''_1 + B' + C' = 180^\circ - \frac{e'}{n}$$

como esta suma debe ser  $180^\circ$ , modificaremos los ángulos  $B'$  y  $C'$  sumándole a cada uno la corrección  $\frac{e'}{2n}$  y los valores de los ángulos B y C son

$$B'' = B' + \frac{e'}{2n}, C'' = C' + \frac{e'}{2n}$$

y se tendrá

$$A'' + B'' + C'' = 180^\circ$$

y

$$A''_1 + A''_2 + A''_3 \dots A''_n = 360^\circ$$

Para el *acuerdo de bases*, supongamos que el cálculo sucesivo de los lados da para la base AB en el triángulo AFB, (fig. 188), la longitud  $Ab$  en vez de AB.

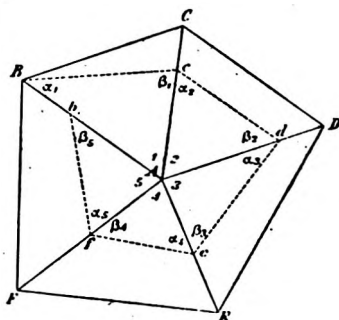


Fig. 188.

Se concibe que el error  $Bb$  puede ser anulado modificando los ángulos exteriores de cada triángulo de manera que resulte el polígono B, C, D .... B circunscripto al  $Bcd \dots b$  obtenido por el cálculo.

Sea la (fig. 188) donde la base calculada  $A b$  ha resultado más corta que la base real  $A B$ ; los lados podrán modificarse sumando una cantidad  $x$  al ángulo opuesto al lado que se quiere agrandar, y disminuyendo la misma cantidad al ángulo opuesto al lado conocido, de manera que se conserve siempre la suma de los tres ángulos de cada triángulo igual a  $180^\circ$ .

Llamemos  $\alpha$  todos los ángulos a los cuales se suma la cantidad  $x$  y  $\beta$  a aquellos que se les disminuye la misma cantidad; vamos a deducir el valor de  $x$ .

Para esto calculemos los lados interiores de la red.

$$\text{Triángulo } A B c : \frac{A c}{A B} = \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \beta_1}$$

$$, \quad A c d : \frac{A d}{A c} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen } \beta_2}$$

.....

$$, \quad A f b : \frac{A b}{A f} = \frac{\text{sen } \alpha_5}{\text{sen } \beta_5}$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades anteriores

$$\frac{\text{Productos sen } \alpha}{\text{Productos sen } \beta} = \frac{A b}{A B}$$

o

$$(1) \quad \Sigma \log \text{sen } \alpha - \Sigma \log \text{sen } \beta = \log A b - \log A B$$

Ecuación de condición que siempre que no hubiere error de cierre sería

$$\Sigma \log \text{sen } \alpha - \Sigma \log \text{sen } \beta = 0$$

En general esto no sucede y será necesario introducir una corrección  $x$ , tal que se tenga

$$\Sigma \log \text{sen } (\alpha + x) - \Sigma \log \text{sen } (\beta - x) = 0$$

Si llamamos  $D$  la diferencia tabular de la tabla que da los logaritmos senos y expresamos a  $x$  en las unidades por el valor menor de los ángulos de entrada en las tablas; para una que dé esta línea trigonométrica cada  $10''$

$$\log \operatorname{sen} (\alpha + x) = \log \operatorname{sen} \alpha + \frac{D_{\alpha} x}{10''}$$

para  $\beta - x$ , tendremos análogamente

$$\log \operatorname{sen} (\beta - x) = \log \operatorname{sen} \beta - \frac{D_{\beta} x}{10''}$$

de manera que podemos poner

$$\left( \Sigma \log \operatorname{sen} \alpha + \Sigma \frac{D_{\alpha} x}{10''} \right) - \left( \Sigma \log \operatorname{sen} \beta + \Sigma \frac{D_{\beta} x}{10''} \right) = 0$$

$$\text{o sea} \quad x'' = 10 \frac{\Sigma \log \operatorname{sen} \beta - \Sigma \log \operatorname{sen} \alpha}{\Sigma D_{\alpha} + \Sigma D_{\beta}}$$

*Ejemplo.* — Reducidos a ángulos planos, los ángulos aproximado de cada triángulo y aplicando las correcciones indicadas en la cabeza de cada columna se tiene la red compensada, fig. 188.

Triángulo	— 3"	+ 1"5	+ 1"5	Suma
A B C A <sub>1</sub> = 55°29'32"	$\alpha_1 =$ 44°43'30"	$\beta_1 =$ 79°46'58"	180°	
A C D A <sub>2</sub> = 44°37'28"	$\alpha_2 =$ 62°39'41"	$\beta_2 =$ 72°42'51"	"	
A D E A <sub>3</sub> = 87°12'08"	$\alpha_3 =$ 49°45'55"	$\beta_3 =$ 45°03'59"	"	
A E F A <sub>4</sub> = 107°00'39"	$\alpha_4 =$ 57°58'48"	$\beta_4 =$ 35°19'35"	"	
A F B A <sub>5</sub> = 65°40'28"	$\alpha_5 =$ 67°41'50"	$\beta_5 =$ 46°37'42"	"	
$\Sigma A =$ 360°00'15"	$\Sigma \alpha =$ 262°28'42"	$\Sigma \beta =$ 277°31'03"		
$e =$ — 15"		$\Sigma_1 =$ 262°28'42"		
$\frac{e}{n} =$ — 3"		$\Sigma_1 + \Sigma_2 =$ 539°59'45"		
		(5 — 2) 2 R	540°	
$\frac{e}{2n} =$ — 1"5		$\Delta =$	15"	

*Valores compensados*

A B C A <sub>1</sub> = 55°29'29"	$\alpha_1 =$ 44°43'31"5	$\beta_1 =$ 79°46'59"5	180°
A C D A <sub>2</sub> = 44°37'25"	$\alpha_2 =$ 62°39'42"5	$\beta_2 =$ 72°42'62"5	"
A D E A <sub>3</sub> = 87°12'05"	$\alpha_3 =$ 49°45'54"5	$\beta_3 =$ 45°04'00"5	"
A E F A <sub>4</sub> = 107°00'36"	$\alpha_4 =$ 57°39'49"5	$\beta_4 =$ 35°19'54"5	"
A F B A <sub>5</sub> = 65°40'25"	$\alpha_5 =$ 67°41'51"5	$\beta_5 =$ 46°37'45"5	"
$\Sigma A =$ 360°00'00"	$\Sigma \alpha =$ 262°28'49"5	$\Sigma \beta =$ 277°31'10"5	
		$\Sigma_1 =$ 262°28'49"5	
		$\Sigma_1 + \Sigma_2 =$ 540°00'00"0	

Para el acuerdo de bases tenemos:

$\alpha$	$\text{sen } \alpha$	$D \alpha$ 0.0000	$\beta$	$\text{sen } \beta$	$D \beta$ 0.0000
$\alpha_1$	$\overline{1.8473937}$	213	$\beta_1$	$\overline{1.9930585}$	38
$\alpha_2$	$\overline{1.9485652}$	108	$\beta_2$	$\overline{1.9799290}$	65
$\alpha_3$	$\overline{1.9825401}$	179	$\beta_3$	$\overline{1.8343257}$	225
$\alpha_4$	$\overline{1.7860599}$	273	$\beta_4$	$\overline{1.7621018}$	297
$\alpha_5$	$\overline{1.9662328}$	87	$\beta_5$	$\overline{1.8614863}$	199
$\Sigma$	$\overline{7.4307917}$	860	$\Sigma$	$\overline{1.4309015}$	824
	$\Sigma \text{ sen } \beta -$	$\Sigma \text{ sen } \alpha$	$=$	$\overline{0.0001096}$	860
	$\Sigma D_\alpha -$	$\Sigma D_\beta$	$=$	$\overline{0.0001684}$	1684

$$x'' = 10 \times \frac{0.0001096}{0.0001684} = 10'' \times 0.651 = 6'' 51$$

Luego se debe sumar 6''51 a los ángulos  $\alpha$  y restárselos a los ángulos  $\beta$ . Los ángulos al centro  $\gamma$ , no se modifican, su suma se mantiene igual a 360° y la compensación angular queda también satisfecha.

**178. Compensación de una cadena de triángulos.** — Siendo conocida la orientación del lado AB de salida, se calcula las orientaciones de los lados BC, BD..... hasta obtener la orientación del lado de llegada DF. Llamando  $Z'$  la orientación obtenida por el cálculo y  $Z$  la observada directamente para el lado D—F, siendo  $\Delta Z$  la convergencia de meridianos, sino se ha hecho parcialmente en cada vértice esta corrección, debe tenerse

$$Z' - Z = \Delta Z$$

en general, se tendrá

$$Z' - Z = \Delta Z + e'$$

Para compensar este error se agrega a cada uno de los ángulos  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$  que se han empleado en la deducción del azimut  $Z$ , una corrección igual a  $-\frac{e'}{n}$ .

La suma de los ángulos de cada triángulo será  $180^\circ - \frac{e'}{n}$ , luego habrá que sumarlos a los otros dos ángulos  $\frac{e'}{2n}$  para obtener que su suma sea  $180^\circ$ .

Para el *acuerdo de bases* tenemos (fig. 189).

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \beta_1}, \quad \frac{BD}{BC} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen } \beta_2}, \quad \frac{FD}{ED} = \frac{\text{sen } \alpha_4}{\text{sen } \beta_4}$$

$$\frac{\Sigma \text{sen } \alpha}{\Sigma \text{sen } \beta} = \frac{FD}{AC}$$

Siendo AC el lado de salida y FD el valor deducido para este lado por la medida directa.

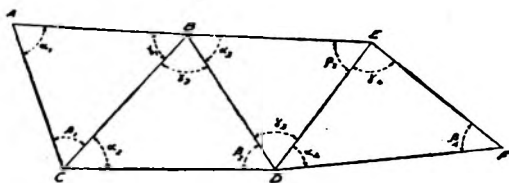


Fig. 189

Haciendo las mismas consideraciones que en el caso de la red (177)

$$A'' = 10 \frac{\Sigma \log \text{sen } \beta - \Sigma \log \text{sen } \alpha + \log \frac{FD}{AC}}{\Sigma D\alpha + \Sigma D\beta}$$

*Ejemplo.*—Sea la cadena AB... F (fig. 189) cuyos ángulos después de la compensación del triángulo son:

$\alpha_1 = 55^\circ 16' 30''$	$\beta_1 = 64^\circ 23' 45''$	$\gamma_1 = 60^\circ 19' 45''$
$\alpha_2 = 84^\circ 10' 15''$	$\beta_2 = 54^\circ 44' 45''$	$\gamma_2 = 41^\circ 05' 00''$
$\alpha_3 = 80^\circ 31' 45''$	$\beta_3 = 35^\circ 13' 15''$	$\gamma_3 = 64^\circ 15' 00''$
$\alpha_4 = 30^\circ 28' 15''$	$\beta_4 = 80^\circ 16' 15''$	$\gamma_4 = 69^\circ 15' 30''$

El azimut observado de AB es  $10^\circ$  NE.

El azimut observado de DF es  $42^{\circ} 14' 57''$  NE.

La convergencia de meridianos calculada entre los puntos A y D es:  $\Delta Z = 8' 12''$ , luego el azimut de DF referido a la meridiana del vértice A es:

$$42^{\circ} 14' 57'' - 8' 12'' = 42^{\circ} 06' 45''$$

Calculando el azimut de D — F mediante el de AB.

$$\begin{aligned} Z(A B) &= & &= 10^{\circ} \\ Z(B C) &= Z(A B) + 180^{\circ} - \gamma_1 & &= 129^{\circ} 40' 15'' \\ Z(B D) &= Z(B C) - \gamma_2 & &= 88^{\circ} 35' 15'' \\ Z(D E) &= Z(B D) + 180^{\circ} + \gamma_3 & &= 332^{\circ} 50' 15'' \\ Z(D F) &= Z(D E) + \gamma_4 & &= 42^{\circ} 05' 45'' \\ D(D F) &= \text{observando y corregido.} & &= 42^{\circ} 06' 45'' \\ e' &= & &= 1' 00'' \end{aligned}$$

$$\frac{e'}{n} = \frac{e}{4} = 0' 15''$$

Teniendo en cuenta la deformación que hay que producir en la cadena, debemos sumar  $0' 15''$  a  $\gamma_4$  y  $\gamma_2$  y restar  $0' 15''$  a  $\gamma_1$  y  $\gamma_3$ . A los otros ángulos de cada triángulo habrá que restarle  $\frac{e'}{2n} = 0' 07'' 5$  o sumarle respectivamente.

Los ángulos definitivos son

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 55^{\circ} 16' 37'' 5 & \beta_1 = 64^{\circ} 23' 52'' 5 & \gamma_1 = 60^{\circ} 19' 30'' 0 \\ \alpha_2 = 84^{\circ} 10' 22'' 5 & \beta_2 = 54^{\circ} 44' 52'' 5 & \gamma_2 = 41^{\circ} 04' 45'' 0 \\ \alpha_3 = 80^{\circ} 31' 37'' 5 & \beta_3 = 35^{\circ} 13' 07'' 5 & \gamma_3 = 64^{\circ} 15' 15'' 0 \\ \alpha_4 = 36^{\circ} 28' 07'' 5 & \beta_4 = 80^{\circ} 16' 07'' 5 & \gamma_4 = 69^{\circ} 15' 45'' 0 \end{array}$$

Considerando en esta cadena que

$$A B = b = 4278.08 \text{ ms.}$$

$$\log b = 3.6312489$$

El lado FE, medido directamente tiene la siguiente longitud

$$F E = b' = 4179.85$$

$$\log b' = 3.6211612$$

Aplicamos la fórmula con el valor de los ángulos definitivos.



$\alpha$	$\text{sen } \alpha$	$D_\alpha = 0.0000$	$\beta$	$\text{sen } \beta$	$B_\beta = 0.0000$
$\alpha_1$	1.9148276	146	$\beta_1$	1.9551183	101
$\alpha_2$	1.9977501	21	$\beta_2$	1.9120203	149
$\alpha_3$	1.9940370	35	$\beta_3$	1.7609498	298
$\alpha_4$	1.7050665	357	$\beta_4$	1.9957057	36
$\Sigma =$	1.6116812	559	$\Sigma =$	1.6217941	584
				1.6116812	
3.6211612	$\Sigma \text{sen } \beta - \Sigma \text{sen } \alpha$	$=$		0.0101129	
3.6312489	$\log \frac{b'}{b}$	$=$		1.9899123	
1.9899123				0.0000252	
				0.0000252	
				0.0001145	$= 10 \times 0''^{22}$
			$x'' =$	$2''^2$	

Debemos por lo tanto sumar  $2''^2$  a los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , y  $\alpha_4$  y restar  $2''^2$  a los ángulos  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ , con esto no se modifica la suma a  $180^\circ$  de los ángulos de cada triángulo y tampoco varía la orientación de la cadena desde que no se afecta los ángulos  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  y  $\gamma_4$ . Se repite el cálculo con los nuevos ángulos hasta obtener un valor para  $x$  que sea una fracción de segundos.

**179. Compensación de un cuadrilátero.**— Esta figura puede considerarse como una cadena de triángulos cerrada sobre la base de salida.

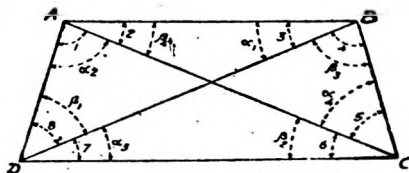


Fig. 190

Los ángulos deben satisfacer a las condiciones siguientes:

$$\Delta ABD \ 1 + 3 + 2 + 8 = 180^\circ$$

$$\Delta BCD \ 4 + 5 + 6 + 7 = 180^\circ$$

$$\Delta ABC \ 2 + 3 + 4 + 5 = 180^\circ$$

$$\Delta ACD \ 1 + 6 + 7 + 8 = 180^\circ$$

Además, partiendo del lado AB conocido y con el triángulo ABD se calcula AD; luego DC con el  $\Delta ADC$ , después BC para volver finalmente a AB. La ecuación de lados que debe llenarse para obtener el valor de la corrección angular es

$$r'' = 10 \frac{\sum \log \operatorname{sen} \beta - \sum \log \operatorname{sen} \alpha}{\sum D_\alpha + \sum D_\beta}$$

Para efectuar la compensación angular se compensan primeramente dos triángulos, los ABD y BCD por ejemplo; luego con los ángulos ya corregidos por esta compensación se efectúa la de los otros dos triángulos ABC y ACD.

*Ejemplo.*—Con referencia a la figura anterior.

1 = 62° 48' 04" 4	5 = 33° 35' 45" 4
2 = 25° 27' 56" 6	6 = 54° 24' 54" 0
3 = 55° 57' 43" 4	7 = 27° 00' 42" 9
4 = 64° 58' 38" 6	8 = 55° 48' 18" 3

a) Compensación de ABD y BCD.

$\Delta ABD.$	$8 = 35^\circ - 46' - 18'' 3$ $1 = 62^\circ - 48' - 04'' 4$ $2 = 25^\circ - 27' - 56'' 6$ $3 = 55^\circ - 57' - 43'' 4$ <hr style="width: 100%;"/> $180^\circ - 00' - 02'' 7$	$\left  \begin{array}{l} -0'' 7 \\ -0'' 7 \\ -0'' 6 \\ -0'' 7 \end{array} \right $	$55^\circ - 46' - 17'' 6$ $62^\circ - 48' - 03'' 7$ $25^\circ - 27' - 56'' 0$ $55^\circ - 57' - 42'' 7$ <hr style="width: 100%;"/> $180^\circ - 00' - 00'' 0$
$\Delta BCD.$	$4 = 64^\circ - 58' - 38'' 6$ $5 = 33^\circ - 35' - 45'' 4$ $6 = 54^\circ - 24' - 54'' 0$ $7 = 27^\circ - 00' - 42'' 9$ <hr style="width: 100%;"/> $180^\circ - 00' - 00'' 9$	$\left  \begin{array}{l} -0'' 2 \\ -0'' 3 \\ -0'' 2 \\ -0'' 2 \end{array} \right $	$64^\circ - 58' - 38'' 4$ $33^\circ - 35' - 45'' 1$ $54^\circ - 24' - 53'' 8$ $27^\circ - 00' - 42'' 7$ <hr style="width: 100%;"/> $180^\circ - 00' - 00'' 0$

(b) Con los valores de (a) obtenidos compensamos los triángulos ABC y ACD.

$\Delta A B C$	2 = 25° 27' 56". 0	-0". 5	23° 27' 55". 5
	3 = 55 - 57 - 42 . 7	-0. 5	55 - 57 - 42 . 2
	1 = 64 - 58 - 38 . 4	-0. 6	64 - 58 - 37 . 8
	5 = 33 - 35 - 45 . 1	-0. 6	33 - 35 - 44 . 5
	180° 00' 02" 2		180 - 00 - 00 . 0

$\Delta A C D$	1 = 62° 48' 03". 7	+0". 5	62° 48' 04". 2
	6 = 54 - 24 - 53 . 8	+0. 6	54 - 24 - 54 . 4
	7 = 27 - 00 - 42 . 7	+0. 6	27 - 00 - 43 . 3
	8 = 35 - 46 - 17 . 6	+0. 5	35 - 46 - 18 . 1
	179 - 59 - 57 . 8		180 - 00 - 00 . 0

Estos valores satisfacen también la condición angular de los triángulos ABD y BCD.

$\Delta A B D$

8 = 35° 48' 18". 1
1 = 62 - 48 - 04 . 2
2 = 23 - 27 - 55 . 5
3 = 55 - 57 - 42 . 2
180. 00. 00 . 0

$\Delta B C D$

4 = 64° 58' 37". 8
5 = 33 - 35 - 44 . 5
6 = 54 - 24 - 54 . 4
7 = 27 - 00 - 43 . 3
180 00 00 0

c) La ecuación de lados da

$\alpha$	$\text{sen } \alpha$	D $\alpha$ 0.0000	$\beta$	$\text{sen } \beta$	D $\beta$ 0.0000
$\alpha_1$	<u>1.9183783</u>	143	$\beta_1$	<u>1.7668271</u>	293
$\alpha_2$	<u>1.9491096</u>	108	$\beta_2$	<u>1.9102262</u>	151
$\alpha_3$	<u>1.6572256</u>	413	$\beta_3$	<u>1.9571949</u>	098
$\alpha_4$	<u>1.7429833</u>	317	$\beta_4$	<u>1.6334343</u>	442
$\Sigma$	<u>1.2676968</u>	981	$\Sigma$	<u>1.2677825</u>	984
				<u>1.2676968</u>	<u>981</u>
			$\Sigma \text{ sen } \beta - \Sigma \text{ sen } \alpha =$	<u>1.9999857</u>	1965

$$r = -10 \frac{0.0000143}{0.0001965} = -10'' \times 0.07 = -0''.7$$

Hay que sumar  $-0''.7$  a los ángulos  $\alpha$  y restarle a los ángulos  $\beta$ .  
Los ángulos finales son

1 = 62° 48' 03". 5	5 = 33° 35' 43". 8
2 = 25 27 - 56 . 2	6 = 54 - 24 - 55 . 1
3 = 55 - 57 - 41 . 5	7 = 27 - 00 - 42 . 6
4 = 64 - 58 - 38 . 5	8 = 35 - 46 - 18 . 8

## CAPITULO XIV.

### TRIÁNGULO GEODÉSICO

**180. Nivel medio del mar. Geoide.**—Las aguas del mar no pueden considerarse en equilibrio: las atracciones variables del Sol y la Luna, la diferencia de presión atmosférica, los fenómenos meteóricos del transporte de las aguas, etc.; dan lugar a un desequilibrio del cual son muestras materiales el fenómeno de las mareas y las corrientes oceánicas.

En una costa, en la cual exista un mareógrafo se puede, con la medida de las observaciones de la altura del mar durante un largo período, fijar un plano que corresponde al *nivel medio* del mar en esa costa. Análogamente podemos suponer que se ha hecho en todos los puntos del mar; el lugar geométrico de los puntos que corresponden al nivel medio nos dá una *superficie de nivel*. Esta superficie que corresponde a la posición de equilibrio de las aguas del mar, por un principio elemental de hidrostática debe ser normal a la dirección de la gravedad en cada punto de ella y como salvo excepciones de poca importancia los mares están en comunicación entre sí, como consecuencia directa de los principios enunciados, los niveles medios de los diferentes mares pertenecen a una única superficie de nivel, lo que hay que suponer muy probable por los resultados de las nivelaciones hechas entre los océanos a través de los continentes.

Si suponemos idealmente extendido sobre los continentes, el mar en su posición de equilibrio tal cual lo hemos considerado como una superficie de nivel, tendremos una superficie natural de referencia para todos los trabajos geodésicos, topográficos o hidrográficos, que se llama *Geoide*.

Por las medidas que se han hecho ha resultado que la figura geométrica que más se aproxima a la forma del geoide es el

elipsoide de revolución, achatado en los polos y que tiene las siguientes dimensiones según las clásicas medidas de Bessel y de Clark.

*Bessel* (1840).

$$a = 6.377597.15 \text{ metros.} \quad \log a = 6.8046454637$$

$$b = 6.356078.96 \quad \log b = 6.8031892859$$

$$\text{Aplanamiento} = \frac{1}{299.1528}$$

$$e = 0.0816968304 \quad \log e = 2.9122052075$$

*Clark* (1880)

$$a = 6.378249.17 \text{ metros.} \quad \log a = 6.8047014815$$

$$b = 6.356814.99 \quad \log b = 6.8032190757$$

$$\text{Aplanamiento} = \frac{1}{293.4665}$$

$$e = 0.082483217 \quad \log e = 2.91636559$$

#### FÓRMULAS FUNDAMENTALES PARA EL ELIPSOIDE TERRESTRE

**181 Coordenadas.**—Refiramos el elipsoide de revolución al sistema de ejes  $C(X, Y, Z)$ : coincidiendo el eje de las  $Y$  con la línea de los polos  $P P'$  que es también el eje de rotación, el plano  $Z X$  coincidirá con el Ecuador.

Las secciones hechas por los planos que contienen el eje  $P P'$  son elipses *meridianos* y las hechas por los planos normales al mismo eje son círculos *paralelos* al plano del ecuador  $Z X$ .

El plano del ecuador es el origen de las *latitudes* y supondremos al plano  $Y Z$  como primer meridiano, es decir, origen de las longitudes.

Por un punto  $A$  sobre el elipsoide (fig. 191), hagamos pasar el plano meridiano  $P A P'$  y el paralelo  $A M A_1$ . El ángulo plano correspondiente al diedro formado por las secciones meridianas  $P M M'$  y  $P A A'$  es la *longitud* de  $A$  con respecto al primer meridiano; por ser  $A M$  y  $A' M'$  arcos de circunferencias concéntricas, la longitud puede definirse en la misma forma que cuando se considera la tierra como esférica. Trazando en el punto  $A$  la normal, ésta corta al eje polar en  $H$ ; el complemento del ángulo  $A H P$ , que es igual a  $\varphi$ , es la *latitud elipsoidal* del punto  $A$ ; éste, unido con el centro  $C$  de la tierra, forma el ángulo  $A C A' = \psi$  que se llama *latitud geocéntrica* por que tiene por vértice el centro de la tierra.

El ángulo  $CAQ$  formado por la normal en el punto  $A$  y el radio vector, se llama *ángulo de las verticales*, es igual a  $\varphi - \psi$ . Un plano cualquiera que contenga la normal  $AH$ , es un *plano normal* a la superficie en el punto  $A$  y determina en la misma una sección normal.

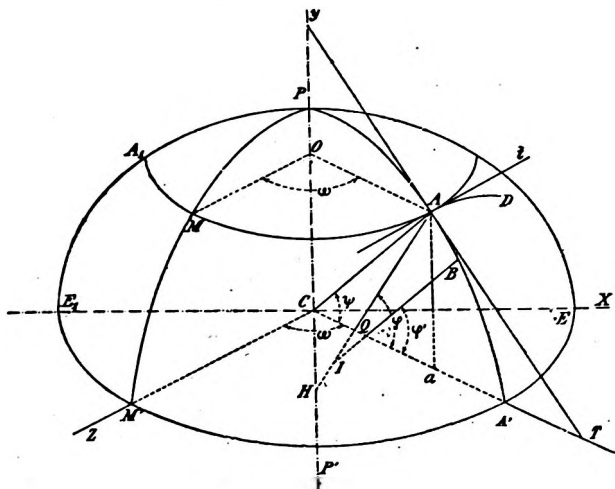


Fig. 191.

El plano normal en  $A$  que pasa por  $D$  determina una sección normal  $AD$  y el ángulo formado por las secciones normales  $AP$  y  $AD$  es el *azimut astronómico* de  $D$  respecto a  $A$ .

182. **Elipse meridiana.**—El elipsoide está determinado cuando se conocen los semiejes  $CE = a$  y  $CP = b$  de la elipse generatriz o meridiana, o uno de los semiejes y las relaciones  $\mu = \frac{a-b}{a}$  que se llaman *aplanamiento* o  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$  que es la *excentricidad* y de la que también se obtiene:

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$



$$r dr + \frac{z}{1-e^2} dz = 0$$

dividida por  $dz$  y teniendo en cuenta la (2)

$$y = r(1-e^2) \tan \varphi. \quad (3)$$

183.—**Latitud geocéntrica.**—En el triángulo COA (fig. 192.)

$$y = r \tan \psi$$

con la (3) obtenemos

$$\tan \psi = \frac{y}{r} = (1-e^2) \tan \varphi.$$

184.—**Angulo de las verticales.**—De la figura 192, se obtiene  $\nu = \varphi - \psi$ , su valor lo dá la fórmula

$$\tan \nu = \frac{\tan \varphi - \tan \psi}{1 + \tan \varphi \tan \psi}$$

reemplazando  $\psi$  en función de  $\varphi$

$$\tan \nu = \frac{\frac{1}{2} e^2 \sin 2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

Siendo  $e^2 \sin^2 \varphi$  muy pequeño con respecto a la unidad y siendo también  $\nu$  muy pequeño, expresándolo en segundos de arco

$$\nu'' = \frac{1}{2 \sin 1''} e^2 \sin 2 \varphi.$$

Este valor de  $\nu = \varphi - \psi$  está tabulado en función de  $\varphi$ .

185.—**Radio de paralelo.**—Réemplazando el valor de  $y$  obtenido en (3) en la (1)

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4)$$

186.—**Normal mayor.**—El plano normal a la superficie y perpendicular al plano meridiano PCA', (fig. 192), cuya traza es AL, forma el ángulo  $\varphi$  con el plano paralelo cuya traza es OA y determina una sección normal principal cuyo radio de curvatura en el punto A tiene un valor máximo, lo que se deduce aplicando el teorema de Meusnier:



*El radio de curvatura que en una sección normal corresponde a un elemento lineal situado sobre una superficie curva, es igual al radio de curvatura que corresponde al mismo elemento en una sección oblicua, dividido por el coseno del ángulo que forman los planos de las dos secciones.*

Llamando  $N$  al radio de curvatura de la sección normal, siendo  $\varphi$  el ángulo de los planos y  $r$  el radio de curvatura de la sección oblicua.

$$N = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

En el triángulo  $O A H$

$$A H = \frac{r}{\cos \varphi} = N;$$

luego la Normal mayor se identifica con el segmento de normal comprendido entre el eje menor  $P P'$  y el punto de la superficie por donde se ha trazado.

La única variable que interviene en la expresión de  $N$  es la latitud  $\varphi$  luego, todos los puntos de un mismo paralelo tienen el mismo valor para la Normal mayor.

Los valores de  $N$  en función de  $\varphi$  están tabulados.

**187. Ordenada.**—Remplazando el valor de  $r$  obtenido en (4) en la expresión (3) obtenemos

$$y = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (5)$$

**188. Radio de curvatura del meridiano.**—Llamado  $d\varphi$  la diferencia de latitud que corresponde al elemento de arco meridiano  $d\alpha$  y  $\rho$  al radio de curvatura, fig. 192.

$$\rho = \frac{d\alpha}{d\varphi} \quad (6)$$

de la (2)

$$d\alpha = - \frac{1}{\sin \varphi} dr = \frac{1}{\cos \varphi} dy$$

dividido por  $d\varphi$

$$\rho = \frac{d\alpha}{d\varphi} = - \frac{1}{\sin \varphi} \frac{dr}{d\varphi} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dy}{d\varphi} \quad (7)$$

los valores de  $\frac{dr}{d\varphi}$  y  $\frac{dy}{d\varphi}$  los deduciremos derivando las (4) y (5) que reemplazadas en la (7) dan

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (8)$$

La única variable que interviene en la expresión de  $\rho$  es la latitud  $\varphi$ , luego todos los puntos de un mismo paralelo tienen el mismo valor para el radio de curvatura del meridiano correspondiente.

El radio de curvatura del meridiano se designa  $R$  y es el mínimo valor que adquiere entre todos los radios de curvatura correspondientes a las distintas secciones normales que pueden pasar por  $A$  y está representado por  $AI$ , segmento de normal comprendido entre el punto de la superficie  $A$  por donde pasa y la intersección  $I$  de dos normales inmediatas.

El valor de  $R$  está tabulado en función de  $\varphi$ .

**189.—Radio de curvatura del elipsoide.**—El valor máximo del radio de curvatura  $AH$  (fig. 192) corresponde a la sección normal principal y a la sección meridiana  $PAA'$ , en la que está el mismo punto  $A$ , corresponde el radio de curvatura mínimo,  $R=HI$ . Es evidente que los centros de curvatura, de todas las demás secciones que se hagan a la superficie por  $A$ , caerán en el segmento  $HI$ .

La curvatura en el punto  $A$  del elipsoide varía según sea la sección normal que se considere; el *radio de curvatura del elipsoide* es la media aritmética de todos los radios de curvatura de las infinitas secciones normales que pasan por ese punto la que se demuestra que es igual a la media geométrica  $\sqrt{RN}$  de los radios de curvatura correspondientes a las secciones normales principales en ese punto o mejor a su *latitud* ya que  $N$  y  $R$  dependen únicamente de esa coordenada.

Los valores de  $\sqrt{NR}$  están tabulados en función de  $\varphi$ .

**190.—Longitud de un arco de meridiano.**—En la (6) establecimos.

$$d\alpha = \rho d\varphi$$

considerando un arco de meridiano comprendido entre las latitudes  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  y reemplazando el valor de  $\rho$  obtenido en la (8)

$$\alpha = a (1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi \quad (9)$$

De esta integral no puede obtenerse una expresión compuesta de términos finitos, por lo que hay que obtener su valor mediante desarrollos en serie.

La longitud del arco de un grado de meridiano de  $10'$  en  $10'$  de latitud está tabulado.

**191. Longitud de un arco de paralelo.**—Sobre un paralelo de latitud  $\varphi$ , el arco  $\theta$  comprendido entre dos longitudes geográficas  $\omega_1$  y  $\omega_2$  es un arco de círculo de radio  $r$  y cuyo ángulo al centro es  $\omega_2 - \omega_1$ , luego:

$$\theta = r (\omega_2 - \omega_1)$$

reemplazando  $r$ ,

$$\theta = \frac{a (\omega_2 - \omega_1) \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad (10)$$

La longitud del arco de un grado de paralelo está tabulado para latitudes de  $10'$  en  $10'$ .

#### TRIÁNGULO GEODÉSICO

**192. Línea geodésica.**—Sean A y B (fig. 193) dos puntos

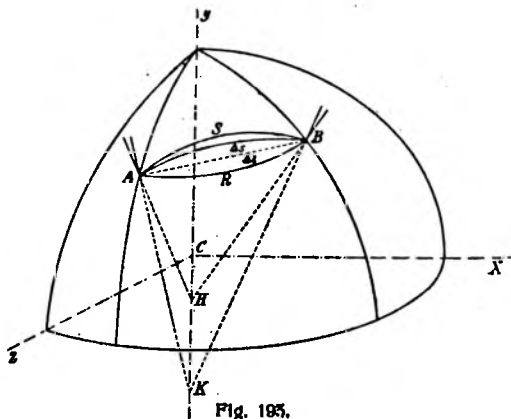


Fig. 193.

sobre el elipsoide terrestre, la normal A K en el punto A y el B determinan un plano K A B que corta a la superficie, según la sección plana normal A S B.

Análogamente la normal H B y el punto A determinan el plano H B A y la sección plana normal B R A. Las secciones A S B y B R A se llaman *secciones normales recíprocas*.

En la esfera convergiendo todas las normales en el centro de la misma, los puntos H y K coinciden, por lo tanto no existe sino un plano normal que es el arco de círculo máximo que pasa por A y B.

La línea más corta A G B sobre la superficie que une los puntos A y B llámase *línea geodésica*.

Suponiendo A y B (fig. 194) muy próximos, llamando  $\Delta l$  la

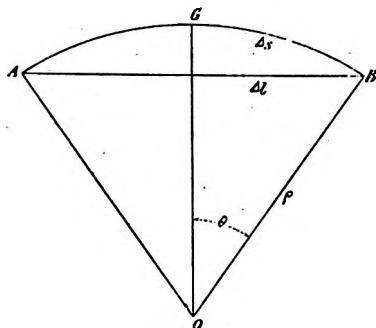


Fig. 194.

distancia rectilínea y  $\Delta s$  longitud de la geodésica entre A y B siendo  $\rho$  el radio de curvatura para el elemento de curva

$$\Delta s = 2 \rho \theta$$

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{\rho}$$

$$\theta = \text{arc sen } \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{\rho}$$

desarrollando en serie el valor de  $\theta$  y sin tener en cuenta las cantidades infinitamente pequeñas de orden superior al 3.º,

$$\Delta s = \Delta l + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{[\Delta l]^3}{\rho^3}$$

$\Delta l$  es constante para los puntos A y B, el valor mínimo o geodésico de  $\Delta s = A G B$  se obtiene para el máximo de  $\rho$ , el que corresponde a la sección normal, por lo tanto la normal principal de la línea debe coincidir con la normal a la superficie, luego el plano que pasa por los puntos A, B y G, cuando están infinitamente próximos (plano osculador), debe contener la normal a la superficie; esto nos permite enunciar la propiedad característica de las líneas geodésicas: *los planos osculadores en cada uno de sus puntos, son normales a la superficie sobre lo cual se traza la línea geodésica.*

Sobre la esfera, las líneas geodésicas son los arcos de círculo máximo y sobre las superficies desarrollables son las líneas que en el desarrollo están representadas por rectas.

En las superficies de revolución, en un meridiano cualquiera se verifica que el plano osculador (plano meridiano), es normal a la superficie y que análoga propiedad caracteriza al ecuador, luego: en toda superficie de revolución, el ecuador y los meridianos son líneas geodésicas.

Sobre la superficie terrestre, si se jalonea una línea que une dos puntos de ella, los pies de los jalones determinan una línea geodésica. En efecto; a cada jalón se le da la dirección de la vertical, es decir, la dirección normal a la superficie; si se mira en la dirección de dos jalones consecutivos, el plano determinado por ellos corta al pie del tercer jalón, de donde resulta que dos elementos consecutivos de línea trazada están en el mismo plano con el jalón que los separa. En otros términos: el plano de dos elementos consecutivos, plano osculador de la línea trazada, contiene la normal a la superficie y es, por consiguiente, normal a la misma, propiedad que caracteriza a las líneas geodésicas.

Sean  $M_0$  y  $M_1$  (fig. 195) los puntos que vamos a unir por una línea geodésica. Si  $M_0 M_1$  es el primer elemento de la misma, siendo  $K_1 M_1 V_1$  la vertical en el punto  $M_1$ , para obtener el elemento siguiente tracemos el plano normal  $M_0 K_1 M_1 V_1$  que contiene el punto  $M_0$  y la vertical  $K_1 M_1 V_1$ ; este plano

corta a la superficie según la línea  $M_0 M_1 M_2$  sobre la cual tomamos el elemento  $M_1 M_2$ , trazando la normal  $K_2 M_2 V_2$  con el plano  $M_1 K_2 M_2 V_2$  determinaremos análogamente el elemento  $M_2 M_3$  y después  $M_3 M_4$ .

Las verticales  $K_1 M_1 V_1$ ,  $K_2 M_2 V_2$ ,... etc.; que son normales a la superficie del elipsoide de revolución y, por consiguiente, a los meridianos respectivos en los puntos  $M_1, M_2, M_3$ , encuentran el eje de revolución (eje menor del elipsoide) en puntos diferentes, por consiguiente, los planos verticales que hemos considerado no coinciden y la línea geodésica  $M_0 M_1 \dots M_4$  es una línea de doble curvatura.

**193. Esfera local.**—Las curvas  $A R B$ ,  $A S B$  y  $A G B$  (fig. 193), tienen longitud distinta y también son distintos sus azi-

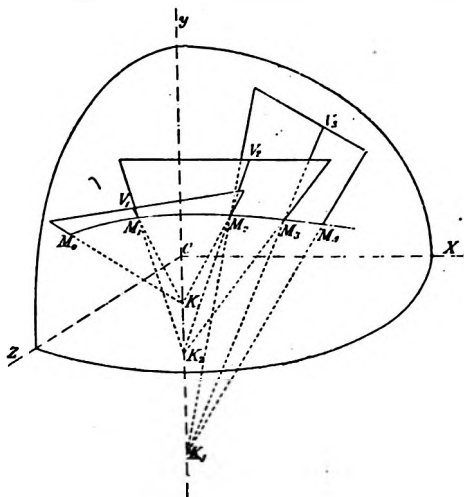


Fig. 195

mates en los puntos A y B. Si disminuye la distancia A B, esta diferencia tiende a desaparecer y para distancias muy pequeñas con relación al radio terrestre puede considerarse prác-

ticamente que los tres arcos se confunden en uno solo y que las figuras formadas por líneas geodésicas, cuando sus lados son muy cortos, pueden suponerse *esféricas*. Se demuestra en la teoría general de las superficies que, para que un elemento de una superficie cualquiera, supuesta flexible, se pueda aplicar sobre una esfera sin extensión ni doblamientos, es necesario y suficiente que esta esfera tenga por radio  $\sqrt{R N}$ ,  $R$  y  $N$  siendo los radios de curvatura principales de la superficie en el punto medio del elemento considerado. Para un elemento del elipsoide terrestre,  $N$  es la normal mayor,  $R$  el radio de curvatura del meridiano; ambos calculados para la latitud media; la esfera correspondiente a esta latitud, y este radio medio se llama *esfera local*.

**194. Triángulo geodésico.**— El triángulo geodésico es el formado por tres líneas geodésicas como lados; para calcularlo tendremos en cuenta que podemos reemplazar el elemento de superficie que abarca los lados geodésicos por el elemento de superficie de la esfera local correspondiente; así reducimos el cálculo del triángulo geodésico a calcular un triángulo esférico; tampoco éste se calcula directamente.

Sean  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  los puntos de la tierra donde están los vértices del triángulo plano  $A' B' C'$ ;  $A$ ,  $B$  y  $C$  sus proyecciones sobre la esfera local de radio  $\sqrt{R N}$ , es decir, que  $A B C$  es el triángulo esférico que reemplaza al geodésico.

Para calcularlo, conociendo los ángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , debe hallarse las longitudes de los arcos  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Valiéndonos de las fórmulas de trigonometría esférica

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$

el error producido en el cálculo de  $b$  por un error en la medida de  $B$  será

$$db = \frac{\sin B \, dB}{\sin A \sin C \sin b}$$

Para  $b = 45$  Km., el ángulo en el centro de la esfera es muy pequeño e igual a  $24' 32''$ , por lo tanto  $\sin b$  que entra en el denominador será muy pequeño y hará que el error  $db$

sea muy grande; para  $B = 45^\circ$ ,  $A = 55^\circ$ ,  $C = 80^\circ$ :  $db = 123$   $dB$  y un error  $dB = 0.02$  produce un error  $db = 25'' = 777$  metros.

Por esta razón en la solución de los triángulos esféricos es necesario hacer intervenir la longitud de uno de los lados, calculándolos como triángulos planos, para lo cual se aplica el teorema que sigue.

**195. Teorema de Legendre.**—Legendre ha demostrado que, un triángulo esférico, cuyos lados sean muy pequeños respecto al radio de la esfera puede substituirse, para su resolución, por un triángulo plano cuyos lados tienen la misma longitud y cuyos ángulos son iguales a los del esférico, disminuidos de un tercio del exceso esférico.

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  los lados de un triángulo esférico trazado sobre una esfera de radio  $r$ ; sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  los ángulos opuestos. Sobre la esfera cuyo radio es la unidad, el triángulo esférico semejante al propuesto tendrá por lados  $\frac{a}{r}$ ,  $\frac{b}{r}$  y  $\frac{c}{r}$  que llamamos respectivamente  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Las fórmulas fundamentales de trigonometría esférica dan:

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

Desarrollando en el segundo miembro, los senos y cosenos en función de los arcos hasta los términos de 4.º orden, lo que puede hacerse por ser  $a$ ,  $b$  y  $c$  muy pequeños con relación a  $r$ , se obtiene:

$$\cos A = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}\right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{24}\right)}{\left(\beta - \frac{\beta^3}{6}\right) \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{6}\right)}$$

efectuando las operaciones y eliminando siempre las potencias superiores a la 4.ª

$$\cos A = \frac{\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 6\beta^2\gamma^2}{24}}{\beta\gamma \left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}\right)}$$

multiplicando numerador y denominador por



$$1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}$$

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2 \beta \gamma} + \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2 \alpha^2 \beta^2 - 2 \alpha^2 \gamma^2 - 2 \beta^2 \gamma^2}{24 \beta \gamma}$$

reemplazando  $\alpha, \beta, \gamma$  por sus valores

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2 a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2}{24 b c \gamma^2}$$

Si designamos con  $A'$  el ángulo del triángulo rectilíneo que corresponde al  $A$  del triángulo esférico, por las fórmulas de trigonometría rectilínea

$$\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}$$

$$\sin^2 A' = 1 - \cos^2 A' = \frac{2 a^2 b^2 + 2 a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4 b^2 c^2}$$

de lo que resulta

$$\cos A = \cos A' - \frac{b c \sin^2 A'}{6 r^2}$$

Por otra parte, poniendo  $A - A' = x$ , cantidad que es muy pequeña

$$\cos A = \cos (A' + x) = \cos A' - x \sin A'$$

de donde

$$x = \frac{b c \sin A'}{6 r^2}$$

Siendo  $S$  el área del triángulo rectilíneo

$$S = \frac{b c \sin A'}{2}$$

por consiguiente:  $x = \frac{S}{3 r^2}$  se obtiene así:  $A = A' + \frac{1}{3} \frac{S}{r^2}$ .

Lo mismo se obtendría:

$$B = B' + \frac{1}{3} \frac{S}{r^2} \quad C = C' + \frac{1}{3} \frac{S}{r^2}$$

llamando  $\epsilon = \frac{S}{r^2}$ , el exceso esférico, se puede escribir:

$$A' = A - \frac{1}{3} \epsilon, B' = B - \frac{1}{3} \epsilon, C' = C - \frac{1}{3} \epsilon$$

relaciones que demuestran el teorema de Legendre, por el que se puede calcular el triángulo esférico por intermedio de un triángulo plano.

En hidrografía, cuando se hace la triangulación, se miden siempre los tres ángulos del triángulo, si no hubiesen errores de observación haciendo la diferencia  $180 - (A + B + C) = W'$  se tendría el exceso esférico  $\epsilon$ ; pero debido a los errores de observación,  $W'$  contiene la suma algebraica de los mismos que llamamos  $W$  y el exceso esférico. Se demuestra en la teoría de los errores, que para la compensación de los ángulos de un triángulo, deben corregirse cada uno de ellos en un  $\frac{1}{3}$  de  $W$ , luego: los ángulos planos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  son iguales a los medidos  $A$ ,  $B$  y  $C$  menos un  $\frac{1}{3}$  de  $\epsilon$  y menos  $\frac{1}{3}$  de  $W$ , es decir, que hay que corregirlos en un  $\frac{1}{3}$  de  $W'$ .

Siendo  $W' = 180 - (A + B + C)$  no es necesario calcular particularmente el exceso esférico, pero cuando se quiere conocer la precisión de las observaciones hay que determinar  $\epsilon$  para deducir  $W = W' - \epsilon$ .

196. Cálculo del exceso esférico. — Sea  $\triangle ABC$  (fig. 196)

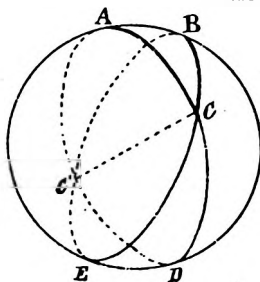


Fig. 196

un triángulo esférico, cuyos lados pertenecen a los círculos máximos  $ABDE$ ,  $ACDC'$  y  $BCE'C'$ . La superficie del hemisferio superior al círculo  $ABDE$  se compone de cuatro triángulos o sea:

$$ABC + CDE + CBD + ACE = \frac{1}{2}$$

superficie esférica y además:

$$\begin{aligned} ABC + CDE &= ABC + C'AB = \text{huso } C \\ CBD &= \text{huso } A - ABC \\ ACE &= \text{huso } B - ABC, \end{aligned}$$

sumando se tiene

$$\frac{1}{2} \text{ superficie esférica} = \text{husos } (A + B + C) - 2 A B C.$$

Tomando como unidad el área de la superficie de la esfera, la del huso estará dada por la relación del ángulo del huso a  $360^\circ$ ; llamando S el área del triángulo A B C, la última relación expresada en la misma unidad lineal del radio R, se escribe:

$$\frac{A^\circ}{360^\circ} + \frac{B^\circ}{360^\circ} + \frac{C^\circ}{360^\circ} - 2 \frac{S}{4 \pi R^2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{o } A + B + C - 180^\circ = \frac{360^\circ}{2 \pi} \frac{S}{R^2}$$

y siendo por definición, el primer término el exceso esférico que llamaremos  $\epsilon$ , se tiene  $\epsilon^\circ = \frac{360^\circ}{2 \pi} \frac{S}{R^2}$  y dado que los triángulos son muy pequeños con relación a R, se puede sin error substituir  $\frac{360^\circ}{2 \pi} \frac{1}{1''}$  por  $\frac{1}{\text{sen } 1''}$  y tendremos  $\epsilon'' = \frac{S}{R^2 \text{ sen } 1''}$ .

El valor de S se calcula como si el triángulo fuese rectilíneo con la fórmula  $S = \frac{1}{2} ac \text{ sen } B$ , en que  $a$  es el lado conocido y  $c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$ . Finalmente, substituyendo obtenemos:

$$\epsilon'' = \frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C}{2 \text{ sen } A} \frac{1}{R^2 \text{ sen } 1''}.$$

**197. Exceso esferóidico.**—Al resolver el triángulo geodésico se toma como radio el de la esfera local correspondiente,  $\gamma R_N$ .

**198. Coordenadas geodésicas rectangulares.**—Para fijar sobre el elipsoide la posición de un punto B respecto al origen A, se lleva el arco de geodésica BC normal al meridiano PA del punto A (Fig. 197).

Las coordenadas rectangulares de B son:

$$X = BC \quad Y = AC$$

Las coordenadas polares son:

$$s = AB \quad Z = PAB$$

Para pasar de las coordenadas polares a las rectangulares resolvemos el triángulo ABC, cuyos elementos conocidos son:

$$A = Z, \quad C = 90^\circ, \quad s = AB$$

El valor del tercer ángulo B llamando  $3\epsilon$  el exceso esferoïdico

$$B = 180 + \text{Exc} - (A + C) = 90 - Z + 3\epsilon$$

y los ángulos del triángulo plano que resulta

$$A_1 = A - \epsilon = Z - \epsilon$$

$$B_1 = B - \epsilon = 90 - Z + 2\epsilon$$

$$C_1 = C - \epsilon = 90 - \epsilon$$

resolviéndolo

$$AC = Y = AB \frac{\sin B_1}{\sin C_1} = s \cos (Z - 2\epsilon)$$

$$BC = X = AB \frac{\sin A_1}{\sin C_1} = s \sin (Z - \epsilon)$$

desarrollando estas fórmulas y teniendo en cuenta que se puede poner  $\cos \epsilon = 1$ .

$$X = s \sin Z - \sin \epsilon \cdot s \cos Z$$

$$Y = s \cos Z + \sin 2\epsilon \cdot s \sin Z$$

La expresión del exceso esferoïdico, llamando S la superficie del triángulo

$$S = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} s^2 \sin Z \cos Z$$

y

$$3\epsilon = \frac{s^2 \sin Z \cos Z}{2 NR \sin 1''}$$

substituyendo  $\sin \epsilon$  por  $\epsilon \sin 1''$  y reemplazando por su valor

$$X = s \sin Z - \frac{s^3 \sin Z \cos^3 Z}{2 NR}$$

$$Y = s \cos Z + \frac{s^3 \cos Z \sin^3 Z}{2 NR}$$

Esta fórmula se simplifica cuando la distancia  $s$ , del punto al origen, es tan pequeña que el segundo término es despreciable al lado del primero. Si se establece que el segundo término no exceda de  $\frac{1}{200.000}$  del primero, será suficiente que

$$\frac{s^2}{3NR} < \frac{1}{200.000} \quad \text{es decir: que } s < 100 \text{ Km.}$$

Por lo tanto, cuando la distancia al origen es inferior a 100 Km., se puede usar las fórmulas

$$X = s \sin Z, \quad Y = s \cos Z$$

que son las relaciones entre las coordenadas polares y rectangulares en el plano

**199. Transporte de coordenadas geográficas.**— El problema a resolver es el siguiente: conocidas las coordenadas geográficas del punto A ( $\varphi, \omega$ ) (fig. 198), el azimut  $PAB = Z$  y la distancia  $AB = s$  del punto B respecto a A, determinar para B, los elementos:

$$\varphi', \omega' \text{ y } Z' = 180^\circ - PAB;$$

o sea:

$$\Delta \varphi = \varphi' - \varphi, \Delta \omega = \omega' - \omega \text{ y } \Delta Z = Z' - Z.$$

Si la tierra fuese esférica sería suficiente resolver el triángulo  $PAB$ , cuyos vértices son los puntos dados y el polo.

Llamando  $\rho$  el radio de curvatura del arco  $AB$  y  $k$  el ángulo en el centro de la tierra

$$PA = 90 - \varphi, \quad PAB = Z, \quad \frac{AB}{\rho} = \frac{s}{\rho} = k, \quad APB = \Delta \omega$$

$$PB = 90 - \varphi', \quad PBA = 180 - Z.$$

Aplicando conocidas relaciones trigonométricas

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos k + \cos \varphi \sin k \cos Z$$

$$\sin \Delta \omega = \frac{\sin Z \sin k}{\cos \varphi'}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (Z + 180 - Z') = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')} \operatorname{cotang} \frac{\Delta \omega}{2}$$

o sea

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta Z = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\varphi + \varphi')}{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')} \operatorname{tang} \frac{\Delta \omega}{2}.$$

Para tener en cuenta la forma elipsoidal de la tierra es necesario introducir algunos términos correctivos, lo que se hace mediante distintos métodos.

**200. Fórmulas de Delambre.**—Hemos visto que la longitud de los lados de un triángulo geodésico puede ser calculada mediante el teorema de Legendre, considerando que el triángulo pertenece a la superficie de la esfera cuyo radio es el valor medio de la normal mayor en la región.

Se puede también, sin error sensible, tomar la esfera tangente al elipsoide a lo largo del paralelo que pasa por el vértice cuyas coordenadas geográficas se conoce, esfera que tiene por radio la normal mayor en ese punto.

Sea  $AB$  (fig. 198) el lado de un triángulo esférico calculado como se ha dicho, aplicando el teorema de Legendre;  $N$  al pie de la normal mayor,  $AN = N\varphi$  del punto  $A$ , valor del radio de la esfera tangente, según el paralelo  $AA_1$ . Proyectando el triángulo elipsoidal  $PAB$  sobre esa esfera, obtenemos el triángulo esférico  $P'AB_1$ ; comparando estos dos triángulos se observa que:

$$AP'B_1 = \Delta \psi, PAB_1 = \angle, P'A = 90 - \varphi$$

los demás elementos correspondientes no son iguales, pero puede considerárseles y se tiene

$$P'B_1A = PBA, AB_1 = AB = k.$$

**Latitud.**—La latitud del vértice  $B$  es  $BQE' = \varphi'$  y la del  $B_1$  que la sustituye es  $BN E' = \varphi_1$ , el pequeño ángulo  $\alpha$  representa la diferencia de ellas; resolviendo el triángulo esférico

$P' A B_1$ , calculamos la latitud de  $B_1$  y a ésta le aplicamos la corrección  $\alpha$  con lo que obtenemos la de  $B$ .

La latitud de  $B_1$  respecto a  $A$  es  $B_1 A_1 = \Delta \varphi_1$  y la de  $B$  es,  $B A_1 = \Delta \varphi$ ; por lo pequeño que son los arcos  $A_1 B_1$  y  $A_1 B$ , pueden considerarse como arcos de círculo medidos por los ángulos al centro  $B R A_1$  y  $B_1 N A_1$ , su diferencia es  $N B R = \alpha$ .

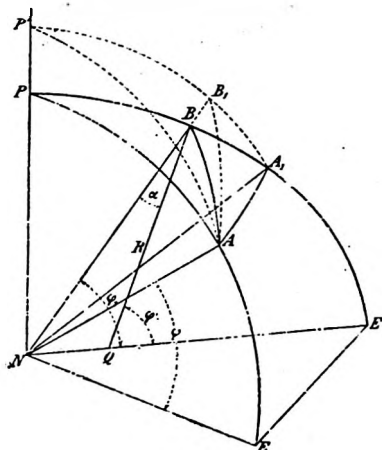


Fig. 198.

Siendo  $B R = A_1 R = R_m =$  radio de curvatura medio del arco  $\Delta \varphi$  y  $N \varphi =$  radio de curvatura del arco  $\Delta \varphi_1$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \Delta \varphi_1} = \frac{N R}{B R} = \frac{N \varphi - R_m}{R_m}$$

y aproximadamente

$$\alpha = \Delta \varphi - \Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_1 \frac{N \varphi - R_m}{R_m}$$

o

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_1 \frac{N \varphi}{R_m}$$

Aplicando las fórmulas al triángulo esférico  $P' A B_1$ , poniendo  $\varphi_1 = \varphi + \Delta \varphi_1$

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi_1) = \sin\varphi \cos k + \cos\varphi \sin k \cos Z$$

desarrollando el seno y coseno de los arcos  $k$  y  $\Delta\varphi$  hasta los términos de 2.º orden.

$$\sin\varphi \left(1 - \frac{\Delta\varphi_1^2}{2}\right) + \Delta\varphi_1 \cos\varphi = \sin\varphi \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) + R \cos\varphi \cos Z$$

de donde

$$\Delta\varphi_1 = k \cos Z - \frac{1}{2} k^2 \tan\varphi \cdot \frac{1}{2} \Delta\varphi_1^2 \tan\varphi$$

reemplazando en el último término  $\Delta\varphi_1$  por su valor aproximado  $k \cos Z$

$$\Delta\varphi_1 = k \cos Z - \frac{1}{2} k^2 \tan\varphi \sin^2 Z$$

poniendo  $k = \frac{s}{N\varphi}$  y expresando  $\Delta\varphi_1$  en segundos de arco

$$\Delta\varphi_1'' = \frac{s \cos Z}{N\varphi \sin 1''} - \frac{s^2 \tan\varphi \sin^2 Z}{2 N^2 \varphi \sin 1''}$$

y como

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 \frac{N\varphi}{R_m}$$

tendremos finalmente

$$\Delta\varphi'' = \frac{s \cos Z}{R_m \sin 1''} - \frac{(s \sin Z)^2}{2 R_m N \varphi \sin 1''} \tan\varphi$$

Para calcular esta fórmula hay que conocer la latitud media  $\varphi_m$  para obtener la de  $R_m$ , para esto se hace un cálculo aproximado de  $\Delta\varphi$  con el valor de  $R\varphi$  correspondiente a la latitud del punto conocido; obtenido el valor aproximado  $\varphi'$  se halla

$$\varphi_m = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$$

y se rehace el cálculo con el valor de  $R_m$  correspondiente.

*Longitud.*—Para la diferencia de longitud, se obtiene

$$\Delta\omega'' = \frac{s}{N\varphi \sin 1''} \frac{\sin Z}{\cos\varphi'}$$



*Azimet.*—El valor de la diferencia de azimet está dado por

$$\operatorname{tang} \frac{\Delta Z}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\varphi + \varphi')}{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')} \operatorname{tang} \frac{\Delta \omega}{2},$$

teniendo en cuenta lo pequeño que son  $\Delta Z$ ,  $\Delta \omega$  y  $\Delta \varphi$

$$\Delta Z = \Delta \omega \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\varphi + \varphi')$$

$$\Delta Z = \Delta \omega \operatorname{sen} \varphi_m.$$

El ángulo  $\Delta Z = Z' - Z$  es la *convergencia de meridianos*.

Estas fórmulas son suficientemente exactas mientras la distancia entre los puntos no supere 50 km.

**201. Cálculo de las formulas.**—En resumen las fórmulas de Delambre para el transporte de coordenadas geográficas son:

$$\Delta \varphi'' = \frac{s \cos Z}{R_m \operatorname{sen} 1''} - \frac{1}{2} \frac{(s \operatorname{sen} Z)^2}{R_m N \varphi \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang} \varphi$$

$$\Delta \omega'' = \frac{s \operatorname{sen} Z}{N \varphi \operatorname{sen} 1''} \sec \varphi'$$

$$\Delta Z'' = \Delta \omega'' \operatorname{sen} \varphi_m.$$

Para facilitar el cálculo y la aplicación de los elementos del elipsoide R y N, tal como están tabulados, haremos las transformaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi'' &= s \cos Z \frac{1}{R_m \operatorname{sen} 1''} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{N_m}{R_m} \operatorname{sen} 1'' \frac{s \operatorname{sen} Z}{N \varphi \operatorname{sen} 1''} \frac{s \operatorname{sen} Z}{N_m \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang} \varphi \end{aligned}$$

$$\Delta \omega'' = s \operatorname{sen} Z \frac{1}{N \varphi \operatorname{sen} 1''} \sec \varphi'$$

$$\Delta Z'' = \Delta \omega'' \operatorname{sen} \varphi_m.$$

Llamando

$$\log \frac{1}{R \operatorname{sen} 1''} = \left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right]$$

$$\log \frac{1}{N \operatorname{sen} 1''} = \left[ \begin{array}{c} 2 \end{array} \right]$$

$$\log \frac{1}{2} \frac{N}{R} \operatorname{sen} 1'' = \left[ \begin{array}{c} 3 \end{array} \right]$$

valores tabulados en función de  $\varphi$  y que afectaremos con los subíndices  $\varphi$  o  $\varphi_m$  según que el argumento haya sido  $\varphi$  o  $\varphi_m$ .  
Poniendo además

$$y = s \cos Z \qquad b = y [1] \varphi_m$$

$$x = s \operatorname{sen} Z$$

$$c = x [2] \varphi \qquad d = [3] \varphi_m \text{ c. t.}$$

$$t = x [2] \varphi_m \operatorname{tang} \varphi$$

tendremos:

$$\Delta \varphi'' = y [1] \varphi_m - [3] \varphi_m \text{ c. t.} = b - d$$

$$\Delta \omega'' = c \sec \varphi'$$

$$\Delta Z'' = \Delta \omega'' \operatorname{sen} \varphi_m.$$

Como ya se ha dicho, se hará primero un cálculo aproximado de  $\varphi'$  para reducir el valor de  $\varphi^m$  y después se harán los cálculos definitivos.

**202. Fórmulas de Schreiber.**—Sea  $A_1$  (fig. 199) un punto del elipsoide cuyas coordenadas geográficas son conocidas  $(\varphi_1, \omega_1)$ ; el transporte de los elementos geodésicos de  $A_1$  a  $A_2$  cuyas coordenadas  $(\varphi_2, \omega_2)$  se buscan, está basado en la resolución del triángulo geodésico  $A_1 A_2 A_3$ , rectángulo en  $A_3$ , siendo,  $A_2 A_3$  la normal tirada desde  $A_2$  al meridiano de  $A_1$ .

Los elementos de este triángulo son:

$$A_2 A_3 A_1 = 90^\circ$$

$$A_3 A_1 A_2 = Z_1$$

$$A_3 A_2 A_1 = 90^\circ - Z_1 + \epsilon.$$

siendo  $\epsilon$  el exceso esferoideico del mismo triángulo.

*Cálculo del punto—SANTA ROSA*

*Punto de salida—ISLA DE FLORES*  $\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 34^{\circ}56'50''25 \text{ S} \\ \omega = 55 \ 56 \ 14 \ 04 \text{ O} \end{array} \right.$   
*Azmut astronómico—FLORES, S. ROSA*  $Z = 39^{\circ}46'33'' \ 6$   
*Longitud del lado*  $s = 24463.75$

*Cálculo aproximado de  $\Delta \varphi$*

log	$s =$	4.38852
log cos	$Z =$	1.98567
Arg. $\varphi$	$[1] =$	2.51126
log $\Delta \varphi'' =$		2.78545
$\Delta \varphi'' =$		610"
$\Delta \varphi =$		10' 10"
$\varphi =$		34 56 50
(aprox) $\varphi' =$		34°46'40"
$\varphi_m =$		34 51 45 = 34°51'7

*Cálculo definitivo  $\Delta \varphi$*

log $s =$	4.3885230
log cos $Z =$	1.9856730
log $r =$	4.2741960
Arg $\varphi_m [1] =$	2.5112679
log $b =$	2.7854639
$b'' =$	610"18
$d'' =$	0.43
$\Delta \varphi'' = b'' - d'' =$	610.61
$\Delta \varphi =$	10.10.61
$\varphi =$	34°56'50"25
$\varphi' =$	34 46.59.64
log $r =$	4.1945588
Arg $\varphi_m [2] =$	2.5093077
log tan $\varphi =$	1.8443760 (n)
log $t =$	2.5482425 (n)
log $c =$	2.7038644
Arg $\varphi_m [3] =$	6.3885054
log $d =$	1.6386123 (n)

*Cálculo de  $\Delta \omega$*

log $s =$	4.3885250
log sen $Z =$	1.8060358
log $r =$	4.1945578
Arg $\varphi [2] =$	2.5093056
log $c =$	2.7038644
log sec $\varphi' =$	0.0854604
log $\Delta \omega =$	2.7893248
$\Delta \omega'' =$	615"64
$\Delta \omega =$	10' 15" 64
$\omega =$	55°56' 14" 04
$\omega' =$	55°45' 58" 40

*Cálculo de  $\Delta Z$*

log $\Delta \omega =$	2.7893248
log sen $\varphi_m =$	1.7570990 (n)
log $\Delta Z =$	2.5464238 (n)
$\Delta Z'' =$	351.9
$\Delta Z =$	05' 51" 9
$Z =$	39°46'33" 6
$Z' =$	39°40'41" 7

*Contra Azimut*  $= Z' + 180 = 210^{\circ}40'41"7$

*Coordenadas de SANTA ROSA*  $\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 34^{\circ}46'40''50 \text{ S} \\ \omega = 55 \ 49 \ 18 \ 70 \text{ O.} \end{array} \right.$

Hidrografía, 35.

De la figura se deduce:

$$Z_2 = 180^\circ + Z_1 + t - \epsilon,$$

luego,  $t - \epsilon$  es la convergencia de meridianos igual a  $\Delta Z$ .

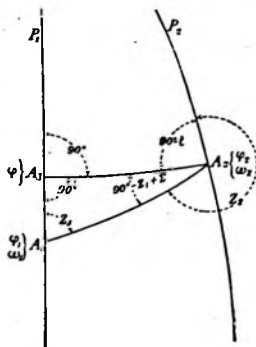


Fig. 199.

Llamando  $b$  la diferencia de latitud entre  $A_2$  y  $A_1$ , ( $b = \varphi' - \varphi_1$ ) y siendo  $d$  la diferencia entre las de los puntos  $A_2$  y  $A_1$  ( $d = \varphi' - \varphi_2$ ) se tendrá

$$\varphi_2 = \varphi_1 + b - d$$

llamando  $l = \Delta \omega$  la diferencia de longitud entre  $A_1$  y  $A_2$ .

$$\omega_2 = \omega_1 - l.$$

Para lados de longitud  $A_1 A_2 = s$  menor de 30 km., los valores de  $b$ ,  $d$ ,  $l$  y  $\Delta Z$  está dado por las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} y &= s \cos Z_1 & \beta &= y [1] \varphi_1 \\ x &= s \sin Z_1 & b &= \beta + \text{corr } \beta \\ c &= x [2] \varphi' & d &= [3] \varphi \cdot c \cdot l \\ t &= x [2] \varphi' \tan \varphi' = c \tan \varphi' \end{aligned}$$

$$\lambda = c \sec \varphi'$$

$$\Delta \omega = l = \lambda - \text{corr } \lambda$$

los valores de [1], [2] y [3] están definidos.

La corrección  $\beta$  está tabulada en función de  $\log y$ , ella tiene siempre el mismo signo que  $y$ ; la corrección  $\lambda$  está tabulada en función de  $\log t$ . Ambas correcciones están dadas en unidades de la 6.<sup>a</sup> cifra decimal logarítmica.

Comparando estas fórmulas con las obtenidas para el cálculo de las de Delambre se comprueba cierta analogía, los argumentos para obtener [1], [2] y [3] son diferentes.

Para la convergencia de meridianos

$$\Delta Z = -t - \epsilon$$

reemplazando  $t$  y  $\epsilon$  por sus valores

$$\begin{aligned} t &= c \operatorname{tang} \varphi' \text{ y } \epsilon = \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} 1'' \\ \Delta Z &= -c \left[ \operatorname{tang} \varphi' + \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} 1'' \right] = \\ &= -c \sec \varphi' \left[ \operatorname{sen} \varphi' + \frac{1}{2} b \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi' \right] \end{aligned}$$

o aproximadamente

$$\Delta Z = -\Delta \omega \operatorname{sen} \varphi_m.$$

Las fórmulas de Schreiber se deducen directamente de la teoría de las líneas geodésicas, teoría que no tiene cabida en este libro; ellas son generales para lados de cualquier longitud. La división de Hidrografía tiene hechos los formularios, tablas e instrucciones para su aplicación.

A continuación se da un ejemplo del cálculo, aplicado al caso ya resuelto.

Punto dado A<sub>1</sub>.Punto buscado A<sub>2</sub>.

Punto B.

Isla Flores (a)

Santa Rosa (b)

..... (c)

Azimet A <sub>1</sub> B = .....	log s... 4.5885250	log c... 2.7038886
+ Angulo B A <sub>1</sub> A <sub>2</sub> = .....	+ log. sen Z <sub>1</sub> ... 1.8080360	+ log. tang. φ'... 1.8416369
Azimet A <sub>1</sub> A <sub>2</sub> = Z <sub>1</sub> = 39° 46' 33" 6	log. r... 4.1845599	log. t... 2.5455055
Distancia A <sub>1</sub> A <sub>2</sub> = s = 24463.75	Arg.: φ') + log. (2)... 2.5083006	t = + 351" 2
log. s... 4.3885230	log. c... 2.7038886	Arg.: φ') log. (3)... 6.3860
+ log. cos Z <sub>1</sub> ... 1.8856730	+ log. sec. φ'... 0.0954810	+ log. c... 2.7039
log. p... 4.2741980	log. λ... 2.7893296	+ log. t... 2.5455
Arg.: φ <sub>1</sub> ) + log. (1)... 2.5112618	correc.: λ = 00	log. d... 1.6354
log. p... 2.7854578	log. l... 2.7893296	d = + 0" 43
+ correc.: β... + 60	l = + 615" 64	
log. b... 2.7854638	Longitud de A <sub>1</sub> = ω <sub>1</sub> = 55° 56' 14" 04	log. 1/3 sen 1"... 6.3845
b = + 610" 19	- l = - 10' 15" 64	+ log. b... 2.7855
Latitud de A <sub>1</sub> = φ <sub>1</sub> = 34° 56' 50" 25	Longitud de A <sub>2</sub> = ω <sub>2</sub> = 55° 45' 58" 40	+ log. c... 2.7039
- b = - 10' 10" 19	- t = - 5' 51" 2	log. s... 1.8739
φ' = 34° 46' 40" 06	- t = - 0" 7	s = + 0" 7
- d = - 0.43	*) - t - s = - 5' 51" 9	
Latitud de A <sub>2</sub> = φ <sub>2</sub> = 34° 46' 39" 63	+ 180° + Z <sub>1</sub> = 219° 46' 33" 6	
	Azimet A <sub>2</sub> A <sub>1</sub> = Z <sub>2</sub> = 219° 40' 41" 7	

**203. Transporte de coordenadas geográficas en una red de triángulos.**—Siendo A, (fig. 200) el vértice cuyas coordenadas geográficas ( $\varphi_A \omega_A$ ) son conocidas y también el azimut  $Z(A B)$  observado, calculamos con la distancia  $A B$  las coordenadas del vértice B y el contra-azimut.

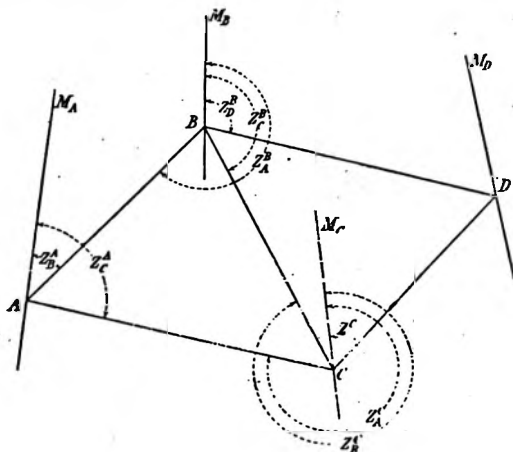


Fig. 200.

$$Z(B. A) = 180 + Z(A. B) + \Delta Z$$

2) Con los elementos de A, la distancia  $A C$  y el azimut  $Z(A. C) = Z(A. B) + B A C$ , calculamos las coordenadas de C y el contra-azimut  $Z(C. A)$ .

3) Con los elementos calculados de B, la distancia  $B C$  y el azimut  $Z(B. C) = Z(B. A) - A B C$ , calculamos otra vez las coordenadas de C, cuyos valores deben ser iguales a los deducidos en el cálculo (2). Se admite en  $\varphi$  y  $\omega$  una divergencia de  $\pm 0^{\circ}03$ .

También se calcula el contra azimut  $Z(C. B)$ , el que debe ser igual al deducido por  $Z(C. A) + A C B$ . Se admite una divergencia de  $\pm 0^{\circ}03$ .

4) Considerando puntos conocidos B y C, calculamos las coordenadas de D, par de valores que deben estar dentro de la tolerancia; la diferencia de los contra-azimutes.

$$Z(D. B) - Z(D. C)$$

debe ser, dentro la tolerancia, igual al ángulo  $B D C$ .

## CAPITULO XVII.

### TOPOGRAFÍA

**204. Consideraciones.**—Los puntos obtenidos por la triangulación de varios órdenes no son suficientes para representar el relieve del terreno y la configuración de la costa; por consiguiente, es necesario para completar el plano, determinar numerosos puntos dentro del área abarcada por la triangulación, especialmente todos aquellos que serán fáciles reconocer desde el mar, y además, los que nos permiten obtener una imagen detallada de la costa.

No es indispensable que la poligonal esté apoyada sobre una triangulación, para levantamientos de poca extensión puede emplearse una *poligonal independiente* la que debe ser cerrada sobre si misma para poder verificarla y compensarla; deberá determinarse la orientación de uno de sus lados.

Varios métodos pueden utilizarse para la determinación de los puntos topográficos o de detalle; su conocimiento permitirá resolver todos los problemas que se presenten en la práctica.

**205. Método poligonal.**—Consiste en unir los diferentes puntos a relevarse por medio de una línea quebrada, en que se miden las longitudes de estas líneas y los ángulos que cada una forma con el meridiano (fig. 201) o bien los ángulos que

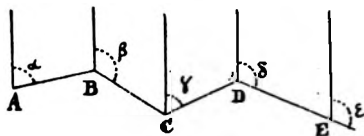


Fig. 201.

forman entre sí (fig. 202); por el primer procedimiento se obtiene una poligonal azimutal y por el segundo una poligonal goniométrica; la primera se puede ejecutar con un goniómetro



munido de una brújula y la segunda que es empleada en los trabajos hidrográficos requiere el empleo de un teodolito simple.

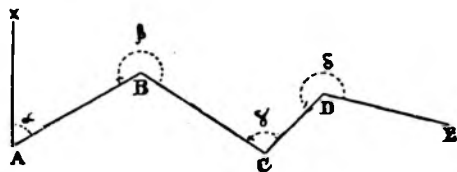


Fig. 202.

**206. Método de radiaciones.**— En este método, se toma por origen un punto central situado en la región a levantar y desde él se miden: 1.º Las distancias horizontales que lo separa de los puntos a situar. 2.º Las distancias angulares de esos puntos, sea con respecto al meridiano o a otro punto también situado. En general, este método se utiliza en combinación con el de poligonal, tomando como origen puntos convenientes de ella.

Sean A y B (fig. 203) puntos situados, vértices de triangulación o poligonal; se puede situar los puntos C, D, E; midiendo las distancias A C, A D y A E y los ángulos B A C, B A D y B A E.

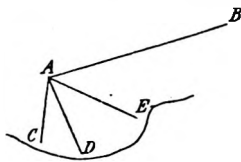


Fig. 203.

Este método se aplica ampliamente haciendo las medidas de distancia taquimétricamente.

**207. Método de intersecciones.**— Para efectuar un levantamiento por intersecciones, se elige en las proximidades de los puntos a determinar una base y después se mide desde sus extremos los ángulos que con ella forman los diversos puntos. Lo que en realidad se hace es calcular el triángulo formado con un lado conocido y los ángulos medidos en los extremos de ese lado, sin medir el tercer ángulo del triángulo; para comprobación, desde un tercer punto conocido se mide otro ángulo para formar otro triángulo con vértice en el mismo punto a de-

terminar. Este método se usa mucho en combinación con el de poligonal, para situar los puntos externos a la misma.

Sean  $A, B, C, \dots$  (fig. 204) los vértices de una poligonal o de triangulación; queremos situar  $M$  por intersecciones.

Desde  $A$ , medimos  $MA B$ , y desde  $B$ ,  $MB A$  y  $MB C$ ; la longitud  $AB$  y los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  nos permiten resolver el

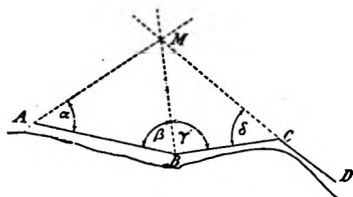


Fig. 204.

triángulo  $MAB$  y calcular las coordenadas de  $M$  respecto a  $A$  y  $B$ .

Desde  $C$  medimos  $MCB = \delta$ ; con éste y  $\gamma$  y la longitud de  $BC$  resolvemos el triángulo  $MBC$  y calculamos las coordenadas de  $M$  referidas a  $B$  y  $C$ ; que deben ser iguales a las deducidas con el primer triángulo.

Este método se aplica ampliamente con el uso de la Plancheta.

**207. Método de coordenadas.**—Consiste en proyectar los puntos a situarse sobre dos rectas perpendiculares entre sí, llamadas base de la operación, midiendo la distancia de cada punto a los ejes. También se usa en combinación con el poligonal, sea  $ABCD$  esta (fig. 205) y  $MN$  la línea de la costa

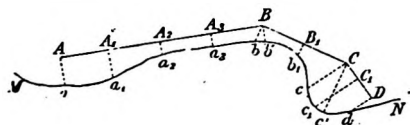


Fig. 205.

cuyo trazado queremos con detalle. Tomando el lado  $AB$  y su perpendicular como líneas bases, medimos cada cierta dis-

tancia de A B, 100 o 200 ms. por ejemplo, las cotes a la costa, A a, A<sub>1</sub> a<sub>1</sub>, .... B b'.

Análogamente sobre los ejes B C y su perpendicular, B b<sub>1</sub> B<sub>1</sub> b<sub>1</sub>.... etc. y sobre los ejes C D y su perpendicular, C c.

**209. Aplicación al levantamiento de zonas poco extensas.**— Cuando se quiere obtener el plano o medir la superficie de una isla, pueblo, determinar el contorno de una laguna o bosque, etc., no es necesario establecer una red de triángulos para que sirva de apoyo a la poligonal; basta hacer una poligonal principal rodeando el contorno de la isla, o región que se quiere levantar, esta poligonal cerrada sobre el punto de partida se compensará y servirá para apoyo y control de todas las poligonales interiores, 1, 9, 10, 4 — 8, 11, 5 — 3, 10, 11, 6 — 2, 9, 8. La compensación se hará sobre los puntos extremos. El método de coordenadas y radiaciones puede aplicarse parcialmente, situando puntos fuera de las poligonales por intersecciones o medida de la orientación y distancia.

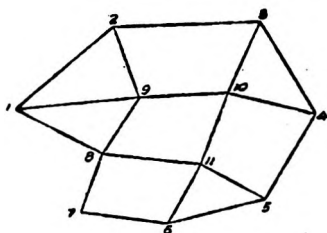


Fig. 206.

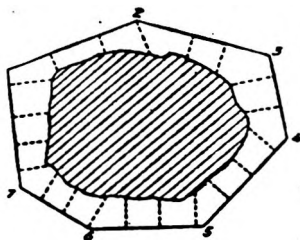


Fig. 207.

Si la superficie a levantar es un bosque inaccesible o laguna, puede hacerse una poligonal 1, 2, ... 7 que sigue su contorno y aplicando el método de coordenadas se obtendrá el perfil deseado.

**210 Aplicación al levantamiento de costas.**— Todo tramo de poligonal apoya sus extremos sobre dos vértices de la triangulación principal o secundaria con objeto de evitar la acumulación de errores.

Sea A B C (fig. 208) un triángulo de la red principal o secundaria; queremos levantar con detalle el contorno de la costa. Haciendo estación en A se mide el ángulo B A 1 o C A 1 y la

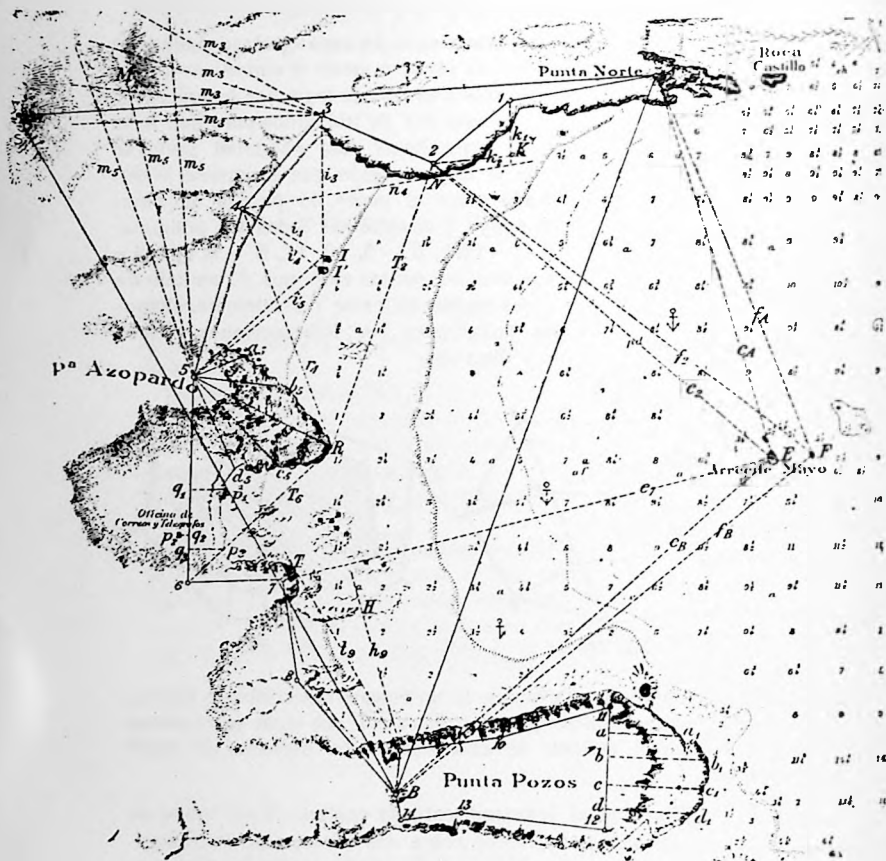


Fig. 208.

distancia A - 1; haciendo estación en 1 se mide el ángulo A 1 2 y la distancia 1 - 2; luego, análogamente, se recorre todos los vértices de la poligonal. La longitud de los lados depende de configuración de la costa y de los detalles externos a la poligonal que haya que situar desde sus vértices.

Como el lado 5-6 se aleja del perfil de la costa, empleamos el método de coordenadas y medimos las cotas  $q_1$   $p_1$ ,  $q_3$   $p_3$ ; cada 100 o 200 mts.

Para obtener el detalle de la punta frente al vértice de poligonal 5, empleamos el método de radiaciones midiendo los ángulos 4—5— $a_5$ , 4—5— $b_5$  4-5-R, etc., y las distancias 5  $a_5$ , 5— $b_5$ , 5—R, etc.

El último lado de la poligonal que se mide es el 8-B y el último ángulo el 8—B—C o 8—B—A; con esto queda la poligonal cerrada.

Para levantar la Punta Pozos puede hacerse una poligonal que partiendo de B se cierre en el mismo punto: B, 9, 10... 13, 14, B. Entre los vértices 11 y 12 se han tomado las cotas  $a$   $a_1$ ,  $b$   $b_1$ ,...  $c$   $c_1$ ,...  $d$   $d_1$ ,

El valor de la suma de los ángulos de un polígono nos permite cerrar y comprobar inmediatamente los ángulos medidos de la poligonal.

La proyección del lado A B, conocido por la triangulación, sobre un eje cualquiera debe ser igual a la proyección de la poligonal A, 1, 2... B, esto permite comprobar todo el trabajo.

La longitud de los lados de la poligonal puede medirse con cinta o taquímetro, en cada caso se tendrá en cuenta las instrucciones y formularios apropiados y además para la elección de la cinta o taquímetro lo dieho en el n.º (124). En general donde el terreno es accidentado, costa de piedras, muy cortada por cañadones, etc., será mucho más conveniente el empleo del taquímetro: trabajando en playas de arena o pedregullo, donde puedan hacerse lados largos de poligonal, sin perjudicar la topografía, será más conveniente el empleo de la cinta.

Cuando no se puede apoyar los extremos de la poligonal en vértices de triangulación y se dispone de uno solo de ellos en la proximidad, se hará una poligonal cerrada sobre el mismo punto, de ésta poligonal una parte está destinada a recorrer la

costa en todos sus contornos y obtener los elementos para la situación de todos los detalles topográficos, otra parte de la poligonal solo tendrá como finalidad hacer el cierre de la misma, se hará por el camino mas fácil y corto. La orientación se tendrá haciendo estación en el vértice de partida y midiendo el ángulo que el primer lado de la poligonal hace con otro lado de la triangulación que tiene el mismo vértice.

**211. Cierre angular de la poligonal.**—Los ángulos  $B A 1$  y  $A B 8$  (fig. 208) formados por los lados de la triangulación y el primer y último lado de la poligonal, debe siempre medirse para cerrar el poligono.

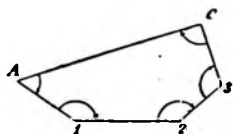


Fig. 209.

Teniendo en cuenta las graduación creciente del círculo horizontal del teodolito, en sentido del movimiento de las agujas de un reloj, recorriendo la poligonal  $A 1 2 3 C$  (fig. 209), haciendo cero en la estación a espaldas del sentido del recorrido, los ángulos medidos son los interiores del polígono cuya suma es siendo  $n$  el número de lados

$$2 R (n - 2) = (2 n - 4) \text{ Rectos}$$

En el caso de la figura (210) los ángulos medidos son los exteriores; su suma es igual a la suma de los suplementos a 4 Recto de cada ángulo inferior

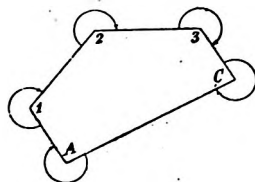


Fig. 210.

$$4 R n - 2 R (n - 2) = (2 n + 4) \text{ Rectos.}$$

Luego podemos poner la siguiente relación, donde  $\Delta$  es igual a 4 Rectos con signo positivo cuando se trata de ángulos exteriores y negativo de los interiores  $(2 n + \Delta) \text{ Rectos.}$

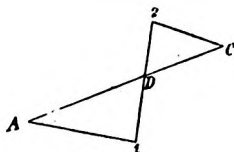


Fig. 211.

En el caso que la poligonal sea cortada por el lado de triangulación, (fig. 211) se aplica la misma fórmula y convención sobre el signo de  $\Delta$ ; considerando los polígonos secundarios  $A 1 D$ , al que corres-

ponde  $-\Delta$  y D 2 C, al que corresponde  $+\Delta$ , la suma es en este caso

$$(2n) \text{ Rectos} = 8 \text{ Rectos.}$$

En el caso de la poligonal (fig. 212), a la suma de los án-

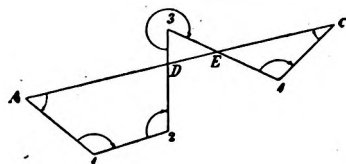


Fig. 212.

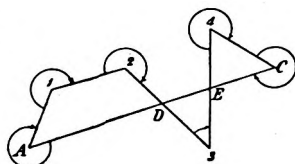


Fig. 213.

gulos en el primer polígono A 1 2 D corresponde  $-\Delta$ ; para el D 3 E,  $+\Delta$ ; y para el E 4 C,  $-\Delta$ ; luego la suma total es en este caso

$$(2n - \Delta) \text{ Rectos} = (2 \times 6 - 4) R = 8 R.$$

En el caso de la poligonal (fig. 213), se tiene para

A 1 2 D,  $+\Delta$ ; para D 3 E,  $-\Delta$ ; y para E 4 C  $+\Delta$ ;

luego la suma total es

$$(2n + \Delta) R = (2 \times 6 + 4) R = 16 R$$

Cuando no se han medido los ángulos de cierre en A y C, no se tienen directamente todos los ángulos del polígono. Si

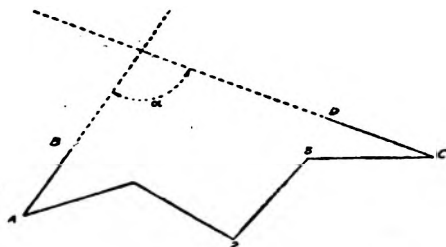


Fig. 214.

A y C son los extremos de una poligonal A, 1, 2, 3, C y el cierre se ha efectuado midiendo los ángulos B A 1 y D C 3;

siendo conocidos los azimutes de los lados de triangulación A B y C D, deduciremos el ángulo  $\alpha$  y tenemos los elementos para el cierre angular de la poligonal.

**212. Coordenadas de los vértices de poligonal.**—Lo mismo que en la red de triángulos, los vértices de la poligonal, se sitúan en el plano en función de sus coordenadas rectangulares con respecto a dos ejes.

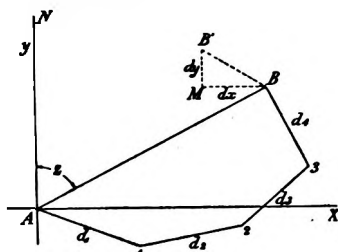


Fig. 215

Conociendo el azimut del lado A B (fig. 215) sobre el que se apoya la poligonal, deducimos el azimut de cada lado de ella con los ángulos medidos en A, 1, 2.... etc.; estos azimutes se cuentan de 0 a 360°, N al E.

$Z(A.B)$  conocido

$$Z(A.1) = Z(A.B) + \beta_{BA1}$$

$$Z(1-2) = Z(1.A) + \alpha_{12}$$

.

.

.

$$(1) \quad Z(BA) = Z(B.5) + \beta_{BA5}$$

$$(2) \quad Z(BA) \text{ conocido.}$$

Los valores (1) y (2) deben ser iguales; la diferencia es el error en el cierre en azimut por el transporte poligonal.

Conocidos los azimutes, con las distancias horizontales calculamos las coordenadas de los vértices de la poligonal con respecto al vértice A



$$\begin{array}{ll}
 X_A^4 = 0 & Y_A^4 = 0 \\
 X_1^4 = d_1 \text{ sen } Z (A - 1) & Y_1^4 = d_1 \cos Z (A - 1) \\
 X_2^4 = d_2 \text{ sen } Z (1 - 2) & Y_2^4 = d_2 \cos Z (1 - 2) \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 X_B^5 = d_4 \text{ sen } Z (3 - B) & Y_B^4 = d_4 \cos Z (3 - B)
 \end{array}$$

De donde deducimos las coordenadas respecto a A.

$$\begin{array}{ll}
 X_A^4 = 0 & Y_A^4 = 0 \\
 X_1^4 = X_1^4 & Y_1^4 = Y_1^4 \\
 X_2^4 = X_1^4 + X_2^4 & Y_2^4 = Y_1^4 + Y_2^4 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 (3) \quad X_B^4 = X_A^4 + X_B^5 & Y_B^4 = Y_A^4 + Y_B^5
 \end{array}$$

La fórmula (3) nos dá las coordenadas de B respecto a A deducidas por la poligonal, las que llamaremos  $X_p, Y_p$ ; como también conocemos esas coordenadas por el cálculo de la triangulación  $X_t, Y_t$ ; tendremos dos valores para cada una de ellas que deben ser iguales o diferir dentro un límite tolerable.

Las diferencias  $d x = X_t - X_p$  y  $d y = Y_t - Y_p$  es el error en X e Y por transporte poligonal y se reparte proporcionalmente a las coordenadas de los vértices de la poligonal.

Situado el punto  $X_p, Y_p$  tendremos el punto  $B'$ , (fig. 215) el error total es

$$B B' = \sqrt{B'M^2 + DM^2} = \sqrt{d x^2 + d y^2}.$$

La tolerancia en el error de cierre angular y en la distancia  $B B'$  depende de la extensión de la poligonal, instrumentos usados y escala del plano a construir, en los trabajos de detalle se toleran los siguientes valores

$$\alpha = 1.5 \sqrt{n}$$

expresando  $\alpha$  el error angular total, diferencia de azimutes. Cuando son conocidos el azimut de los lados de la triangu-

lación sobre los que se cierra la poligonal o el error de cierre del polígono,  $n$  es el número de ángulos medidos.

La tolerancia lineal es

$$l = 0.06 \sqrt{\Sigma s} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$\Sigma s$ , es la suma de la longitud de los lados de la poligonal.

En los trabajos hidrográficos se hace

1) La compensación angular por el error de cierre del polígono. 2) Su compensación lineal por diferencia en  $X$  e  $Y$ ; tolerándose un error  $l = \frac{4}{1000}$  de la suma  $\Sigma s$  de los lados de la poligonal.

El cálculo de las coordenadas de los puntos situados por visuales y tangentes desde la poligonal debe hacerse después de haber compensado esta.

**213. Registro de poligonal a cadena o cinta.**—El formulario responde a dejar bien sentado las diversas estaciones hechas, los ceros y los puntos visados, controlados por el croquis del ángulo capaz de aclarar cualquier duda.

**COLUMNA.—Estación.**—Se pondrá el nombre de la estación donde se toma el ángulo; *la primera es el vértice de la triangulación de partida*, los puntos o vértices de la poligonal se designan sucesivamente con números.

**COLUMNA.—Cero en.**—Se pone el nombre de la estación donde se ha puesto el cero del círculo horizontal, que debe ser la estación anterior; *en la primera (vértice de triangulación) el cero se pone en otro vértice de la triangulación*, en las demás estaciones en el vértice anterior de la poligonal.

**COLUMNA.—Croquis del ángulo.**—Se pone el croquis del ángulo, es importante señalar si es mayor o menor que  $180^\circ$ .

**COLUMNA.—Punto visado.**—Se pone el nombre del punto visado, el que es el vértice siguiente de poligonal, menos para el último de estos que es el *vértice de triangulación* donde se cierra el tramo de poligonal.

**COLUMNA.—Lecturas círculo horizontal.**—Se pone las lecturas correspondientes a la puntería al punto visado, se tendrá presente que solo en caso de poligonales precisas, situar una valiza, extremo de un muelle, un punto para situar sondages, etc., en que se hará las lecturas de los dos nonios, generalmente se hará la lectura de uno y mismo nonio solamente, siendo suficiente registrar los ángulos a los  $30''$ .

Los ángulos se tomarán siempre de izquierda a derecha.

**COLUMNA.—Círculo vertical.**—Se pondrá la lectura del círculo vertical

después de colimar una graduación de la mira o el extremo o marca de un jalón que esté sobre el suelo a una altura próximamente igual a la que tiene los muñones del anteojo del teodolito. Los ángulos verticales se miden por simple puntería, por lo que deberá tenerse bien corregido el instrumento en cuanto a la coincidencia de la línea de los ceros del círculo vertical con la horizontal.

**COLUMNA.—Distancia.**—Se coloca la distancia medida con la cadena o cinta sobre el terreno, estas distancias se reducen después a la horizontal.

**COLUMNA.—Elevación del punto visado sobre el terreno.**— Cuando el punto visado es una torre, asta, pie de un edificio; se pondrá en esta columna su altura sobre el suelo.

Debajo de cada planilla se anotarán los siguientes datos:

- 1) Origen y fin de la poligonal.
- 2) Como quedan marcados los vértices.
- 3) Estado de la marea cuando se pasó con la poligonal.
- 4) Las playas o bancos próximos, referidos a los vértices de la poligonal y que la marea permite ver, con la aclaración si son de piedra, arena, etc.
- 5) Clases de rompientes, lugares abordables para los botes.

La situación de puntos notables, casas, montículos, molinos, etc. hecha por el método de intersecciones desde dos o más vértices de poligonal se asienta en el registro de tangentes y visuales.

Para obtener la reducción a la horizontal de la medida hecha sobre el terreno, siendo la altura del anteojo igual a la altura  $h$  sobre el terreno del punto visado; se deduce de la figura (216).

$$D = d \cos \alpha_1$$

Si como comprobación se ha medido el ángulo  $\alpha_2$

$$D = \frac{d}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

o aproximadamente

$$D = d \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

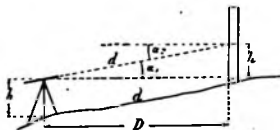


Fig. 216.

Las fórmulas para calcular el desnivel están en el Capítulo Altimetría. La planilla siguiente es un ejemplo del Registro de poligonal a cinta.

# REGISTRO DE LA POLIGONAL

Estación	Cero en	Croquis del ángulo	Punto visado	LECTURAS CÍRCULO HORIZONTAL		Círculo vertical	Distancias	Elevación del punto visado sobre el terreno	Observaciones
				Nonio I	Nonio II				
A	B		1	43° 26' 00"	223° 20' 00"	102° 16'	2078.1		
1	A		2	162° 20' 20"	342° 25' 20"	90°	2004.		
			A			77° 34'		35 m. 10	Torre mirador
2	1		3	150° 23' 40"	330° 23' 40"	90°	2075.		
3	2		4	144° 18' 00"	324° 18' 00"	92° 10'	1810.		
4	3		4	196° 29' 20"	16° 29' 20"	88° 15'	2450.		
B	4		A	23° 10' 40"	203° 10' 40"				

NOTAS: El punto A es el vértice de triangulación donde se inicia la poligonal, el punto B es donde se cierra.

El punto 1 está al borde de la barranca, número de orden de la estaca 47; el 2 en la base de un muelle, N.º 48; el 3, N.º 49; el 4 está en la parte norte de un puente sobre un arroyo, N.º 50.

La línea 0-180° del círculo vertical corresponde a la vertical, 0 en el zenit. La altura de los muñones del antejo es siempre aproximadamente 1 m. 30 y se ha colimado en la medida de los ángulos verticales una marca pintada en el jalón a 1 m. 30 de la base.

214. Registro de la poligonal con taquímetro. — Las columnas 1 a 5, 7 y 11 se llenan análogamente a lo dicho para la poligonal a cinta.

COLUMNA.—*Lectura de los hilos diastimométricos.*—Para su anotación se tendrá presente lo que sigue:

1.º Es necesario leer siempre con el mismo par de hilos.

2.º Los valores de los lados para distancias directas no deben pasar de 250 mts., siempre que haya desnivel entre los dos vértices del lado; esto es con el objeto de facilitar su reducción a la horizontal. Las tablas taquimétricas dan la corrección  $d \cos^2 \alpha$  sólo hasta 250 mts.

3.º Cuando el observador estimara conveniente que los lados tengan mayor longitud, ellos no serán mayores de 450 mts. si hay desnivel entre los vértices del lado; el procedimiento a seguir para su medida es el indicado en (125).

COLUMNA.—*Distancias.*—El taquímetro debe ser rectificado al final de cada tramo de poligonal y teniendo en cuenta el menor valor de la constante diastimométrica se corregirán las distancias anotadas en la casilla *Taquímetro*, deducidas con el valor primitivo del ángulo diastimométrico; la distancia corregida se anota en la segunda casilla.

La distancia horizontal debe calcularse con la distancia corregida y el ángulo vertical observado.

COLUMNA.—*Altura de los muñones.*—Se pone la altura del eje secundario sobre el terreno, la que se mide con una plomada.

COLUMNA.—*Desnivel.*—Se pone el valor de la diferencia de nivel entre los dos puntos cuyo cálculo se verá en el capítulo Altimetría.

OBSERVACIÓN.—El cálculo de la distancia horizontal con taquímetro ha

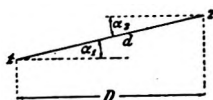


Fig. 217.

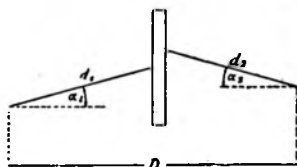


Fig. 218.

sido tratada en el número (122), medida en terrenos inclinados.

Si en el vértice 1 medimos la inclinación  $\alpha_1$  del lado 1—2, la distancia horizontal es:  $D = (d)_T \cos^2 \alpha_1$ . (Fig. 217).

Si en 2 como comprobación medimos el ángulo  $\alpha_2$ , tendremos:




$D = (d)_T \cos^2 \alpha_2$ ; como definitivo se toma el valor

$$D = \left( \frac{d}{2} \right)_T (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2).$$

Refiriéndonos al método expuesto en el (125), fig. 218

$$D = (d_1)_T \cos^2 \alpha_1 + (d_2)_T \cos^2 \alpha_2.$$

# REGISTRO DE LA POLIGONAL CON TAQUIMETRO

Estación	Cero en	Cróquis del ángulo	Punto visado	LECTURA		LECTURA DE LOS HILOS DIAMETRIMÉTRICO			Círculo vertical	DISTANCIAS			Altura de los muñones	Desnivel	Elevación del punto visado	OBSERVACIONES
				Nonio I	Nonio II	Superior	Inferior	Medio		Taquimetro	Corregida	Horizontal				
T	M		1	323°00'40"	148°00'40"	196	120	158	89°25'00"	76	75.3	75.3	158	0 <sup>m</sup> .78	—	$\frac{1}{w} = 100$  Corr. = - 1 %
1	T		2	176°02'50"	356°02'30"	196	103	148	91°28'00"	93	92.1	91.9	148	- 0.32	1.50	
2	I		3	212°15'10"	32°15'10"	285	44	164	87°14'20"	241	238.5	237.7	144	11.60	5 <sup>m</sup> 30	

**215. Formularios para el cálculo de la poligonal.**—Las planillas siguientes facilitan el cálculo de las coordenadas de los vértices.

**Elementos de la poligonal.**—Se dejará claramente anotado entre que estaciones se hace cada tramo de poligonal. En las columnas se registrarán todos los elementos de la misma sacados del registro de poligonal a cinta o taquimétrica.

Se hará la compensación angular del polígono anotándose el nuevo valor de los ángulos compensados en la 3.<sup>a</sup> columna.

En la columna *Valor del lado* se pone la medida directa hecha con la cinta o el taquímetro, el valor de la inclinación del lado se anota en la casilla correspondiente, con estos datos se deduce la medida horizontal del lado, anotándolo en la última columna. La planilla está dispuesta para la corrección de poligonales taquimétricas,  $D = \frac{d}{2} [\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2]$ . En caso de poligonales a cinta  $D = d \cos \alpha$ .

Con el azimut del lado de la triangulación, sobre el que se apoya la poligonal, se calcula el azimut de cada uno de sus lados, anotándose en la 6.<sup>a</sup> columna.

El ejemplo que se presenta se refiere a la poligonal a cinta del Registro de la pág. (290).

#### ELEMENTOS DE LA POLIGONAL ENTRE LOS PUNTOS A Y B DE LA TRIANGULACIÓN

Angulo	Valor del ángulo	Angulo compensado	Lado	Valor del lado d	Azimut del lado c	Inclinaciones del lado $\alpha_1$ $\alpha_2$	Lado corregido $D = \frac{d}{2} [\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2]$
			A—B		209°28'00"		$d \cos \alpha$
B—A—1	43°20'00"	43°19'40"	A—1	2078.1	252 47 40	-12°16' +12°26'	2030
A—1—2	182 20 20	182 20 00	1—2	2004	255 07 40	hor.	2004
1—2—3	150 23 40	150 23 20	2—3	2075	205 31 00	hor.	2075
2—3—4	144 18 00	144 17 40	3—4	1808.7	189 48 40	-2 10	1810
3—4—B	198 29 20	198 29 00	4—B	2451.2	186 17 40	+1 45	2450
4—B—A	23 10 40	23 10 20				$\Sigma =$	10369
$\Sigma =$	720 02 00	720 00 00					

$$\Delta = 2'00''$$

$$\frac{\Delta}{8} = -20''$$

**FORMULARIO.**—*Cálculo de la poligonal.*—Con los elementos de la Poligonal se pasa al siguiente formulario para calcular las coordenadas relativas de cada vértice de poligonal con relación al que le antecede.

CALCULO DE LA POLIGONAL ENTRE  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vértice A.} \\ \text{Vértice B.} \end{array} \right.$

LADO	A — 1	1 — 2	2 — 3	3 — 4	4 — B
D	2030	2004	2075	1810	2450
Z	252°47'40"	235°07'40"	205°31'00"	169°48'40"	186°17'40"
$r =$	-600.46	-1145.70	-1872.50	-1781.40	-2435.20
log $r \dots$	2.77848	3.05909	3.27243	3.25077	3.38653
log cos Z	1.47009 (n)	1.75720 (n)	1.95542 (n)	1.99309 (n)	1.99737 (n)
log D ....	3.30749	3.30189	3.31701	3.25768	3.38916
log sen Z	1.98011 (n)	1.91404 (n)	1.63425	1.24771	1.03996 (n)
log $x \dots$	3.28760	3.21593	2.95126	2.50539	2.42912
$x =$	-1959.10	-1644.10	-895.84	+320.17	-268.61

*Registro de Coordenadas de la Poligonal.*—Las coordenadas relativas del formulario anterior se anotan en el *Registro de Coordenadas* en la casilla *Coordenadas relativas*. Se calcula el error de cierre en abscisa  $\Delta x$  y en ordenada  $\Delta y$ , se deduce el error total  $e = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , si está dentro la tolerancia se aplica la corrección en las columnas correspondientes de la primera casilla; hechos los cálculos se obtienen las *Coordenadas Relativas Corregidas* y después las *Coordenadas totales*.



# REGISTRO DE COORDENADAS DE LA POLIGONAL ENTRE

Vértice A

Vértice B

PUNTOS	COORDENADAS RELATIVAS.						COORDENADAS RELATIVAS CORREGIDAS				COORDENADAS TOTALES			
	X			Y			X		Y		X		Y	
	+	-	Correc.	+	-	Correc.	+	-	+	-	+	-	+	-
A	0	0		0	0		0	0	0	0	0	0		0
1		1939.10	-0.09		600.46	+ 0.13		1939.19		600.33		1939.19		600.33
2		1644.10	-0.07		1145.70	+ 0.23		1644.17		1145.47		3583.36		1745.80
3		893.84	-0.04		1872.50	+ 0.37		893.88		1872.13		4477.24		3617.95
4	320.17		-0.01		1781.40	+ 0.35	320.16			1781.05		4157.08		5598.98
B		268.61	-0.01		2435.20	+ 0.48		268.62		2434.72		4425.70		7833.70
	-	4745.65			-7835.26		-	4745.62	-	7833.70				
	+	320.17					+	320.16						
	$\Sigma (x) =$	-4425.48		$\Sigma (y) =$	-7835.26		$\Sigma (x) =$	-4425.70	$\Sigma (y) =$	-7833.70				
	$X_{\text{m}} =$	-4425.70		$Y_{\text{m}} =$	-7833.70									
	$\Delta X =$	0.22		$\Delta Y =$	1.56									

$$\Sigma = \sqrt{(0.22)^2 + (1.56)^2} = 1.54$$

216. **Fórmula aproximada para la compensación de la poligonal.**— Con referencia a la pág. 197 tenemos, llamando  $a_1$  el azimut  $Z$  ( $A - 1$ ), etc.

$$x_1 = d_1 \operatorname{sen} a_1 \qquad y_1 = d_1 \cos a_1$$

para un error  $\lambda_1$  en  $d_1$  y  $a_1$  en  $a_1$  los errores en  $x_1$  e  $y_1$  son

$$(1) \qquad \begin{aligned} dx_1 &= \lambda_1 \operatorname{sen} a_1 + d_1 \cos a_1 a_1 \\ dy_1 &= \lambda_1 \cos a_1 - d_1 \operatorname{sen} a_1 a_1 \end{aligned}$$

El error de cierre en  $X$  e  $Y$  será respectivamente

$$\begin{aligned} dx &= X_t - X_p = X_t - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = l_x \\ dy &= Y_t - Y_p = Y_t - (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = l_y \end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas (1) para todos los lados de la poligonal

$$\begin{aligned} ex &= \lambda_1 \operatorname{sen} a_1 + \lambda_2 \operatorname{sen} a_2 + \dots + d_1 \cos a_1 a_1 + d_2 \cos a_2 a_2 + \dots \\ ey &= \lambda_1 \cos a_1 + \lambda_2 \cos a_2 + \dots = d_1 \operatorname{sen} a_1 a_1 - d_2 \operatorname{sen} a_2 a_2 - \dots \end{aligned}$$

suponiendo que las correcciones lineales son proporcionales a las longitudes de los lados, esto es

$$\lambda_1 = K d_1, \quad \lambda_2 = K d_2, \quad \lambda_3 = K d_3 \dots$$

y que el valor de la corrección angular es siempre el mismo para todos los ángulos

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = \omega$$

se tendrá

$$\begin{aligned} ex &= K (d_1 \operatorname{sen} a_1 + d_2 \operatorname{sen} a_2 + \dots) + \omega (d_1 \cos a_1 + d_2 \cos a_2 + \dots) \\ ey &= K (d_1 \cos a_1 + d_2 \cos a_2 + \dots) = \omega (d_1 \operatorname{sen} a_1 + d_2 \operatorname{sen} a_2 + \dots) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} ex &= K X_t + \omega Y_t \\ ey &= K Y_t - \omega X_t \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} K &= \frac{ex X_t + ey Y_t}{X_t^2 + Y_t^2} \\ \omega &= \frac{ex Y_t - ey X_t}{X_t^2 + Y_t^2} \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Tomemos el caso de la compensación anterior.

$x_1 = -$	1939.10	$y_1 = -$	600.46
$x_2 = -$	1644.10	$y_2 = -$	1145.70
$x_3 = -$	893.84	$y_3 = -$	1782.50
$x_4 = +$	320.17	$y_4 = -$	1881.40
$x_5 = -$	268.61	$y_5 = -$	2435.20
$X_p = -$	4425.48	$Y_p = -$	7835.26
$X_t = -$	4425.70	$Y_t = -$	7833.70
$ex =$	- 0.22	$ey =$	+ 1.56

$$K = \frac{-11246.918}{80953676.18} = -0.00014$$

$$w = \frac{8627.508}{80953676.18} = +0.00011$$

Compensación en X.

- 0.00014 (- 1939.10) + 0.00011 (- 600.46) = + 0.21	X <sub>1</sub> = - 1938.89
» (- 1644.10) + » » (- 1145.70) = + 0.11	X <sub>2</sub> = - 1643.99
» (- 893.84) + » » (- 1872.50) = - 0.08	X <sub>3</sub> = - 893.92
» (+ 320.17) + » » (- 1781.40) = - 0.24	X <sub>4</sub> = + 319.93
» (- 288.61) + » » (- 2435.20) = - 0.22	X <sub>5</sub> = - 268.83
	- 0.22
	- 4425.70

Compensación en Y

- 0.00014 (- 600.46) - 0.00011 (- 1939.10) = + 0.29	Y <sub>1</sub> = - 600.17
» (- 1145.50) - » » (- 1644.10) = + 0.34	Y <sub>2</sub> = - 1145.36
» (- 1872.50) - » » (- 893.84) = + 0.35	Y <sub>3</sub> = - 1872.15
» (- 1781.40) - » » (+ 320.17) = + 0.21	Y <sub>4</sub> = - 1781.19
» (- 2435.20) - » » (- 288.61) = + 0.37	Y <sub>5</sub> = - 2434.83
	+ 1.56
	- 7833.70

**217. Croquis de la Poligonal.**—El croquis es un dibujo hecho en el terreno desde cada estación de poligonal con el objeto de identificar fácilmente los detalles que deben representarse en el plano.

Se hará en escala  $1/5000$  en papel milimétrico.

En estos croquis debe anotarse con la aproximación que permite la escala; los vértices de la poligonal, la configuración de la costa, la topografía del terreno de acuerdo con el patrón de signos convencionales y aclarando con leyendas cuando el operador no tenga suficiente habilidad para el dibujo.

Para la configuración de la costa se tendrá las siguientes normas.

1) Desde la poligonal se tirarán cotas horizontales al nivel de las pleamares, marcado por las mareas.

2) Estas cotas se espaciarán de 100 en 100 ms., aumentándose su densidad en costas muy sinuosas o cuando el detalle del trabajo lo exija o disminuyéndola en caso contrario.

3) Cuando en los vértices de poligonal el ángulo hacia el mar es mayor de  $180^\circ$  se tomará una cota horizontal en la bisectriz o sobre líneas radiales cuando la magnitud lo exija.

4) Cuando el ángulo hacia el mar en el vértice de poligonal es muy pequeño, lo que significa mucha sinuosidad se tiran las cotas aunque se crucen.










En estos croquis se dibujarán además los montículos, cerros, quebradas, lagunas, arboledas, casas, aguadas, arroyos, playas, restingas, islotes, rocas, etc., que desde la poligonal deben situarse con tangentes y visuales, (método intersecciones).

Los arroyos que desembocan en los tramos de poligonal serán levantados hasta media milla hacia su vertiente y dibujados en el croquis.

Sea la poligonal AB (fig. 208); al hacer estación en A, con cero en B, hacemos las lecturas correspondientes a las visuales  $f_A$  y  $e_A$  para situar los islotes E y F. Al hacer estación en 1, hacemos la lectura  $k_1$ ; al hacer estación en 2 hacemos las lecturas correspondientes a las visuales  $k_2$ ,  $f_2$ , y  $l_2$  y la tangente a la punta R,  $T_2$ ; en la estación 3, la visual  $i_3$  común a los islotes I, I'; la tangente  $m_3$  al nacimiento de la falda izquierda del monte M. las correspondientes a la parte más elevada y la del nacimiento de la falda derecha. En la estación 4, las tangentes correspondientes a la punta N,  $n_4$  y a la punta R,  $r_4$ ; las visuales  $i_4$ ,  $f_4$  a los islotes I, I'. En el vértice 5 se hacen las lecturas correspondientes a las tangentes al monte M y la visual a la parte más elevada  $m_5$  y además la poligonal radial 5  $a_5$ , 5  $b_5$ , ... para determinar el contorno de la punta R. Al recorrer el lado 5-6 además de las cotas  $q_1$   $p_1$  y  $q_3$   $p_3$  a la playa, desde el punto  $q_2$  a la distancia 5  $q_2$  se tomará la cota  $p_2$   $q_2$  que sirve para situar la casa marcada en el plano. En la estación 6 hará la lectura correspondiente a la tangente a la punta R,  $T_6$ . Desde la estación 7 obtendremos para situar E, la visual  $e_7$ . En la estación B las visuales  $e_B$  y  $f_B$ . En la estación 9 la tangente a la punta T,  $t_9$  y a la punta de la restinga H;  $h_9$ .

En el formulario de la pág. 299 se han puesto algunos datos que se refieren a las tangentes y visuales de la fig. 208.

# REGISTRO DE TANGENTES Y VISUALES

Estación	Cero en	Croquis del ángulo	Punto visado	LECTURAS CÍRCULO HORIZONTAL		Círculo vertical	Distancias	Elevación del punto visado sobre el terreno	OBSERVACIONES
				Nonio I	Nonio II				
A	B		F	319°30'00"		92°30'			
			E	324°46'30"		92°00'			
1	A		K	98°15'00"		horiz.			
2	1		K	36°45'30"		"			
			F	81°55'30"		"			
2	2		E	85°02'00"		"			
			R	152°54'00"		"			
3	2		1P	66°15'30"		"			
			M	155°02'00"		85°30'			
			M	162°47'00"		80°15'			
			M	174°02'30"		78°10'			
			M	186°10'00"		87°40'			

NOTAS: F, piedra exterior del arrecife.—E, parte de más adentro del arrecife.—K, piedra cerca de la costa. La visual desde 2 a la punta R es tangente a la parte más saliente de la misma.—1P, dos piedras juntas cercanas a la costa.—M, elevación importante.—La primera y última visual son tangentes al nacimiento de las faldas, la segunda y tercera son visuales a dos picos puntiagudos de la cima.

**218. Situación de puntos auxiliares por intersecciones.**— En el trabajo del detalle topográfico puede necesitarse determinar la posición de nuevos puntos y según las condiciones en que se encuentra el operador será conveniente el uso de algunos métodos que se exponen en los problemas siguientes:

**Problema 1.**—Conocidas las coordenadas de tres vértices A, B y C, que pueden ser unos de poligonal y otros de triangulación no ligados directamente; determinar la distancia, azimut y ángulos entre ellos.

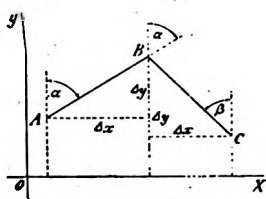


Fig. 219.

$$AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$BC = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$$

$$Z(AB) = \alpha$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tan \sigma &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} Z(BC) &= 180 - \beta \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tan \beta &= \frac{\Delta x'}{\Delta y'} \end{aligned} \right.$$

$$ABC = 180 - [Z(BC) - Z(AB)]$$

**Problema 2.**—Con la posición de A y B, determinar la posición de C, midiendo los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

$$AC = AB \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}; \quad BC = AB \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

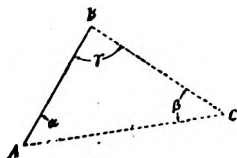


Fig. 220.

Este problema suele presentarse cuando siendo A y C puntos situados cerca de la costa, donde puede llegarse fácilmente; B es un vértice interior de la triangulación al que por falta de elementos de movilidad es dificultoso llegar.

**Problema 3 de Hansen.**—Sea AB el lado conocido y C un punto cuya posición queremos determinar sirviéndonos de otro punto auxiliar D.

Los ángulos medidos son:  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ; calcularemos  $x_1, x_2, y_1, y_2$

con lo que tendremos todos los ángulos del cuadrilátero para efectuar su compensación y cálculo.

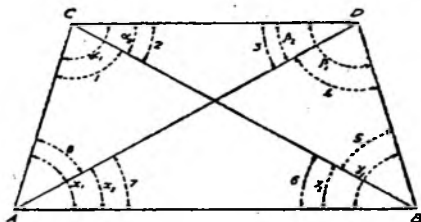


Fig. 221.

$$(1) \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 = 180^\circ - (\alpha_2 + \beta_1) \\ \delta_1 - \delta_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_2) \end{cases}$$

Haciendo

$$\tan \varphi = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{AC \sin (\beta_1 - \beta_2)}{AD \sin (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1 \sin (\beta_1 - \beta_2)}{\sin \beta_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2)}$$

y

$$\tan \varphi = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{DB \sin (\alpha_1 + \alpha_2)}{BC \sin (\beta_1 - \beta_2)} = \frac{\sin \beta_1 \sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin \alpha_2 \sin (\beta_1 - \beta_2)}$$

y siendo

$$\frac{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2}{\sin \gamma_2} = \tan \varphi + 1$$

$$\frac{\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2}{\sin \gamma_2} = \tan \varphi - 1$$

y teniéndose

$$\frac{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2}{\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2} = \frac{\tan \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2)}{\tan \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$\frac{\tan \varphi + 1}{\tan \varphi - 1} = - \frac{\tan \varphi + \tan 45^\circ}{1 - \tan \varphi \tan 45^\circ} = - \tan (\varphi + 45^\circ)$$

$$\tan \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) = - \tan (\varphi + 45^\circ) \tan \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) \quad (2)$$

Análogamente se obtendría

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\operatorname{tang}(\psi + 45^\circ) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \quad (2)$$

Con estas fórmulas (1) y (2) se obtendrá  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  y se podrá deducir el valor de cada uno de los ángulos 1, 2, 3, ... 8 para calcular el cuadrilátero, con la cual se obtiene las coordenadas de C y D.

En el caso de la figura

$$Z(A C) = Z(A B) - (8 + 7)$$

$$Z(B D) = Z(B A) + (5 + 6)$$

y con las longitudes de A C y B D se obtiene las coordenadas buscadas

#### EJEMPLO—De Cálculo de ángulos

$$\alpha_1 = 88^\circ 16' 01'' . 0 \quad \beta_1 = 120^\circ 56' 22'' 0$$

$$\alpha_2 = 25 - 27 - 56 . 6 \quad \beta_2 = 55 - 57 - 43 . 4$$

#### Cálculo de $p_1$ e $p_2$

$$p_1 - p_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1) = 35^\circ 35' 41'' . 4$$

$$\alpha_1 = 88^\circ 16' 01'' . 0 \quad \log \operatorname{sen} = 1.999 80 13$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 64 - 58 - 38 . 6 \quad \log \operatorname{sen} = 1.957 19 57$$

$$\beta_2 = 55 - 57 - 43 . 4 \quad \operatorname{colog} \operatorname{sen} = 0.081 60 57$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 62 - 48 - 04 . 4 \quad \operatorname{colog} \operatorname{sen} = 0.050 89 02$$

$$\gamma = 50 - 51 - 43 . 1 \quad \log \operatorname{tang} = 0.089 49 29$$

$$\gamma + 45^\circ = 95 - 51 - 43 . 1 \quad \log \operatorname{tang} = 0.998 55 98$$

$$\frac{1}{2}(p_1 - p_2) = 16 - 47 - 50 . 7 \quad \log \operatorname{tang} = 1.479 81 79$$

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_2) = 71 - 12 - 58 . 3 \quad \log \operatorname{tang} = 0.468 57 77$$

$$p_1 = 89^\circ 00' 49'' 0$$

$$p_2 = 54^\circ 25' 07'' 6$$

#### Cálculo $x_1$ y $x_2$

$$x_1 - x_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_2) = 35^\circ 40' 15'' 6$$

$$\beta_1 = 120^\circ 56' 22'' 0 \quad \log \operatorname{sen} = 1.935 54 11$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 62 - 48 - 04 . 4 \quad \log \operatorname{sen} = 1.949 10 98$$

$$\alpha_2 = 25 - 27 - 56 . 6 \quad \operatorname{colog} \operatorname{sen} = 0.366 56 09$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 64 - 58 - 38 . 6 \quad \operatorname{colog} \operatorname{sen} = 0.042 80 41$$

$$\psi = 62 - 56 - 44 . 2 \quad \log \operatorname{tang} = 0.291 8; 59$$

$$\psi + 45^\circ = 107 - 56 - 44 . 2 \quad \log \operatorname{tang} = 0.489 62 85$$

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2) = 17 - 53 - 07 . 8 \quad \log \operatorname{tang} = 1.508 81 47$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 44 - 55 - 50 . 3 \quad \log \operatorname{tang} = 1.938 44 32$$

$$x_1 = 62^\circ 40' 58'' 1$$

$$x_2 = 27^\circ 00' 42'' 5$$



Los ángulos del cuadrilátero son

$$\begin{array}{ll} 1 = \alpha_1 - \alpha_2 = 62^\circ 48' 04'' 4 & 5 = \gamma_1 - \gamma_2 = 33^\circ 35' 41'' 4 \\ 2 = \alpha_2 = 25^\circ 27' 56'' 6 & 6 = \gamma_2 = 54^\circ 25' 07'' 6 \\ 3 = \beta_2 = 55^\circ 57' 43'' 4 & 7 = \gamma_3 = 27^\circ 00' 42'' 5 \\ 4 = \beta_1 - \beta_2 = 64^\circ 58' 35'' 6 & 8 = x_1 - x_2 = 35^\circ 46' 15'' 6 \end{array}$$

Con estos elementos se hará la compensación y su cálculo.

**Problema 4.**—Es análogo al anterior. Conociendo el lado AB y medido los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , en C y D, hay que calcular los ángulos  $x_1, x_2, y_1, y_2$  para tener todos los ángulos del cuadrilátero.

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1) \\ x_1 + x_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_2) \end{cases}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{\text{sen } y_1}{\text{sen } y_2} = \frac{\text{sen } \alpha_2 \text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\text{sen } \beta_2 \text{sen}(\beta_1 + \beta_2)}$$

$$\text{tang } \psi = \frac{\text{sen } x_1}{\text{sen } x_2} = \frac{\text{sen } \beta_1 \text{sen}(\beta_1 + \beta_2)}{\text{sen } \alpha_1 \text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Además.

$$\frac{\text{sen } y_1 - \text{sen } y_2}{\text{sen } y_2} = \text{tang } \varphi - 1$$

$$\frac{\text{sen } y_1 + \text{sen } y_2}{\text{sen } y_2} = \text{tang } \varphi + 1$$

Siendo

$$\frac{\text{sen } y_1 - \text{sen } y_2}{\text{sen } y_2 + \text{sen } y_2} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (y_1 - y_2)}{\text{tang } \frac{1}{2} (y_1 + y_2)}$$

y

$$\frac{\text{tang } \varphi - 1}{\text{tang } \varphi + 1} = \frac{\text{tang } \varphi - \text{tang } 45^\circ}{1 + \text{tang } \varphi \text{ tang } 45^\circ} = \text{tang } (\varphi - 45^\circ)$$

$$(2) \quad \text{tang } \frac{1}{2} (y_1 - y_2) = \text{tang } \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \text{ tang } (\varphi - 45^\circ)$$

Análogamente

$$(2) \quad \text{tang } \frac{1}{2} (x_1 - x_2) = \text{tang } \frac{1}{2} (x_1 + x_2) \text{ tang } (\psi - 45^\circ)$$

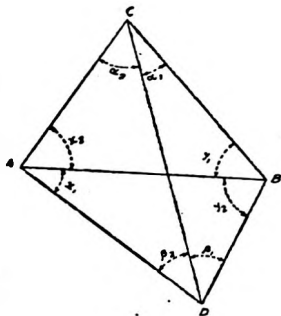


Fig. 222.

Calculados los lados del cuadrilátero, con los azimutes deducidos con los ángulos y el  $Z$  (AB), se tendrá las coordenadas de los vértices C y D.

**Problema 5.**—Conocida la posición de 3 puntos A, B y C; determinar la de D haciendo estación en cada uno de los vértices conocidos.

Se miden los ángulos

$$\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2, \beta_2$$

Como debe tenerse

$$Z(BD) = Z(BC) + \gamma_2 = Z(BA) - \gamma_1$$

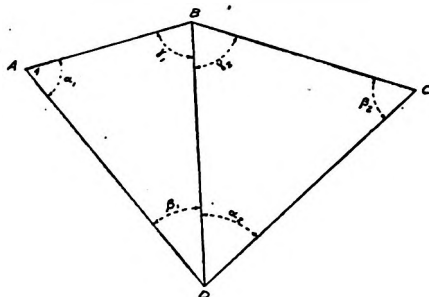


Fig. 223.

si esto no se verifica se reparte la diferencia por igual en los ángulos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .

Se deduce  $\beta_1$  y  $\alpha_2$  con las relaciones siguientes:

$$\beta_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \gamma_1)$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - (\gamma_2 + \beta_2)$$

Como la longitud de los lados AB y BC es conocida, debe cumplirse la ecuación de lados:

$$x^n = \frac{\Sigma \log \text{sen } \beta - \Sigma \log \text{sen } \alpha + \log \frac{BC}{AB}}{\Sigma D \alpha + \Sigma D \beta}$$

Esta situación con comprobación en los trabajos hidrográfi-

cos es útil para determinar de estaciones de sondajes, apoyo de poligonales, etc.

*Ejemplo :*

$$\log AB = 4.1867661$$

$$\log BC = 4.0772232$$

$$Z (BC) = 125^{\circ} 17' 38'' 0$$

$$Z (BA) = 246^{\circ} 14' 00'' 0$$

$$\alpha_1 = 88^{\circ} 16' 01'' 0$$

$$\gamma_2 = 64^{\circ} 58' 41'' 6$$

$$\gamma_1 = 55^{\circ} 57' 46'' 4$$

$$\beta_2 = 88^{\circ} 00' 39'' 4$$

Hallaremos los valores de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que llenen la condición de azimut.

$$Z (BC) = 125^{\circ} 17' 38'' 0$$

$$Z (BA) = 246^{\circ} 14' 00'' 0$$

$$\gamma_2 = 64^{\circ} 58' 41.6$$

$$\gamma_1 = 55^{\circ} 57' 46.4$$

$$Z (BL) = 190^{\circ} 16' 19'' 6$$

$$Z (BD) = 190^{\circ} 16' 13'' 6$$

$$\text{Correc. } \gamma_2 = -3'' 0$$

$$\text{Correc. } \gamma_1 = -3'' 0$$

$$\gamma_2' = 64^{\circ} 58' 38'' 6$$

$$\gamma_1' = 55^{\circ} 57' 43'' 4$$

$$Z (BD) = 190^{\circ} 16' 16'' 6$$

$$Z (BD) = 190^{\circ} 16' 16'' 6$$

Obtenemos los ángulos

$$\beta_1 = 180^{\circ} - 144^{\circ} 13' 44'' 4 = 35^{\circ} 46' 15'' 6$$

$$\alpha_2 = 180^{\circ} - 152^{\circ} 59' 18'' 0 = 27^{\circ} 00' 42'' 0$$

El cálculo del acuerdo de lados da

	0.0000		0.0000
$\log \text{sen } \alpha_1 = \overline{1.8998013}$	007	$\log \text{sen } \beta_1 = \overline{1.7668190}$	293
$\log \text{sen } \alpha_2 = \overline{1.6572202}$	413	$\log \text{sen } \beta_2 = \overline{1.9997383}$	007
$\overline{1.6570215}$	420	$\overline{1.7665573}$	300
		$\overline{1.6570215}$	420
$\Sigma \log \text{sen } \beta - \Sigma \log \text{sen } \alpha =$		0.1095558	720
$\log \frac{BC}{AB} =$		$\overline{1.8904573}$	
		$\overline{1.9999951}$	
$x'' = -10 \frac{0.0000069}{0.0000720} = -10 \times 0'' 09 = -0'' 9$			

Luego hay que restar  $0'' 9$  a los ángulos  $\alpha$  y sumar  $0'' 9$  a los  $\beta$ . Los dos valores de BD calculados con los triángulos ABD y BCD estarán en concordancia, y con el azimut deducido de AB y BC se obtendrá las coordenadas del punto D.

**Problema 6. — De la carta.** — Consiste en medir los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  desde el punto a situar  $M$  que subtiene dos lados determinados por tres puntos conocidos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . La condición para que no sea indeterminado el problema, es que estos cuatro puntos no estén sobre una misma circunferencia y cuanto más se alejen de esta posición mejor serán las circunstancias de la observación.

Las posiciones relativas de los cuatro puntos más convenientes, están indicadas en la (fig. 224); la 1.<sup>a</sup> los tres puntos co-

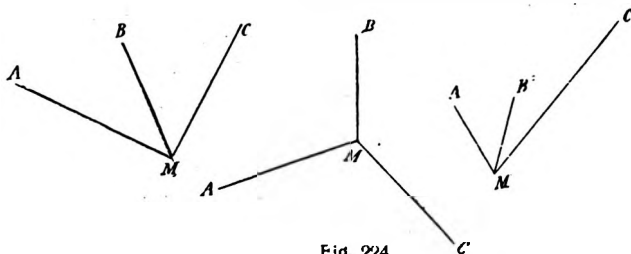


Fig. 224.

nocidos están próximamente en línea recta; la 2.<sup>a</sup> es interna al círculo que pasa por los tres puntos y la 3.<sup>a</sup> dos de ellos están muy próximos a  $M$  y el tercero alejado.

La solución del problema está en determinar la longitud y azimut de la línea  $BM$  (fig. 225) para obtener las coordenadas de  $M$ .

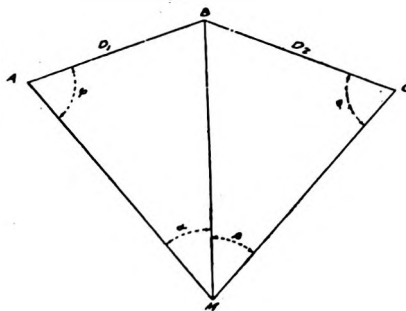


Fig. 225.

Conocidas las distancias  $D_1$  y  $D_2$ , los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , y los azimutes  $Z(BA)$  y  $Z(BC)$  y por lo tanto el ángulo  $ABC$ , de la figura se tiene

$$BM = D_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} = D_2 \frac{\sin \psi}{\sin \beta}$$

ó

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{D_1 \sin \beta}{D_2 \sin \alpha} = \frac{1}{\tan \lambda}$$

y siendo

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \psi - \sin \varphi} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = \frac{1 + \tan \lambda}{1 - \tan \lambda}$$

como  $\tan 45^\circ = 1$

$$(1) \quad \tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cotg (45^\circ + \lambda)$$

siendo

$$(2) \quad \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 180^\circ - \frac{ABC + \alpha + \beta}{2}$$

Con (1) y (2) deducimos  $\varphi$  y  $\psi$ , y podemos calcular los triángulos  $ABM$  y  $BCM$ .

La doble determinación del lado  $BM$  comprueban los cálculos hechos, pero no la exactitud de la situación.

Calculados los triángulos se obtiene el azimut  $Z(BM) = Z(BC) + CBM = Z(BA) - ABM$ , con el azimut de  $BM$  y su longitud se pasa de las coordenadas de  $B$  a las de  $M$ .

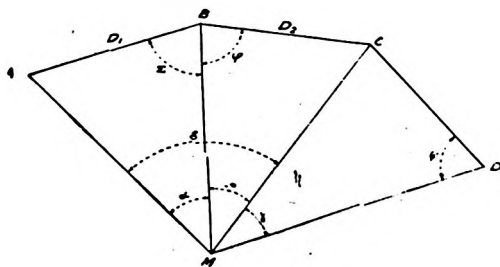


Fig. 223

Como comprobación puede medirse el ángulo  $\gamma$  con un cuarto

punto; se combinarán tres de los vértices de manera que den una solución conveniente.

En el caso de la figura el punto M está muy próximo a la circunferencia que pasa por A, B y C; convendrá tomar el par de ángulos  $\beta$  y  $\gamma$  para hacer un cálculo de la posición de M y otro par  $\delta$  y  $\gamma$  para otro cálculo. Como coordenadas definitivas se toma el promedio.

También puede calcularse la longitud de BM y los ángulos  $\varphi$  y  $\psi$  resolviendo el problema con los ángulos  $\beta$  y  $\gamma$ ; luego, calcular el triángulo ABM cuyos elementos conocidos son  $D_1$ ,  $\alpha$ ,  $ABC - \varphi = \zeta$ . Este nuevo valor de BM y su azimut nos

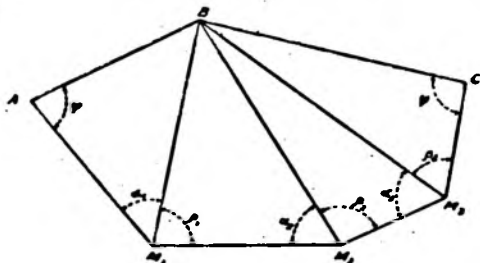


Fig. 227

dará un nuevo valor para las coordenadas de M que se promedian con las anteriores.

*Problema 7 de la carta ampliado.*—Sean A, B, C tres puntos de posición conocida; para situar  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  midiendo los ángulos

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$$

se tendrá análogamente

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{D_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}{D_1 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3} = \frac{1}{\tan \lambda}$$

y como en el caso del problema simple

$$(1) \quad \tan \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \tan \frac{1}{2} (\varphi + \psi) (\cotg 45^\circ + \lambda)$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} (\varphi + \psi) = 180^\circ - \frac{ABC + \Sigma \alpha + \Sigma \beta}{2}$$

## CAPÍTULO XVIII.

### ALTIMETRÍA

**219. Generalidades.**—Se llama *altitud* de un punto, la distancia de este punto, contada sobre la vertical, a una superficie de referencia que se define generalmente como la superficie media del mar, supuesta prolongada sobre el continente.

Se llama *diferencia de nivel* entre dos puntos la distancia de uno de estos puntos, contada sobre la vertical a la superficie de nivel que pasa por el otro.

La *superficie de nivel* es una superficie normal en cada punto de la tierra a la vertical del lugar, es decir a la dirección de la gravedad; para dos puntos A y B (fig. 228) son A b y B a, siendo a y b la intersección de cada una de estas superficies, que pasa por cada uno de los puntos, con la vertical del otro; estas superficies no son paralelas.



Fig. 228.

Si partiendo de A seguimos la superficie A b, encontraremos que la diferencia de nivel es B b =  $h'$ ; si partimos de B siguiendo la superficie B a que pasa por el, la diferencia de nivel será A a =  $h$ .

Si se admite que todas las superficies de nivel, supuesta esférica la tierra, son paralelas, ellas serán equidistantes en todos sus puntos y la diferencia de nivel entre dos de ellos, A y B; (fig. 229) será la misma, sea que se siga el camino A b o B a

La diferencia de altitud puede determinarse de tres maneras, según el mayor o menor grado de precisión que se desee obtener.

1.º La nivelación geométrica o de precisión, que se ejecuta con nivel y miras que hemos estudiado en el Capítulo XII, siguiendo instrucciones especiales para el servicio de nivelación;

puede alcanzarse una precisión de algunos centímetros para puntos distantes 400 o 500 kms.

2.º La nivelación geodésica, por medio de la cual se calcula la diferencia de altitud de un punto B con relación a otro A; conociendo el ángulo  $ZAB$ , distancia zenital de B visto desde A y la distancia AB. Midiendo convenientemente la distancia zenital para puntos distantes 50 kms. puede alcanzarse resultados cuya exactitud sea de algunos decímetros.

3.º La nivelación barométrica, ejecutada con el barómetro de mercurio o aneroide, basada en la ley de decrecimiento de la presión atmosférica con la altura.

Este método da resultados cuya exactitud es muy variable según el valor de la altitud y las condiciones atmosféricas del momento; esta exactitud varía desde algunos metros a varios decámetros.

**220. Influencia de la esfericidad de la tierra.** — Si A y B (fig. 229) son dos puntos cuya diferencia de nivel se quiere determinar, siendo  $AB_0$  y  $Bb$  las trazas de las esferas concéntricas que pasan por ellos, la diferencia de nivel es  $Ab$ .

Si en D colocamos un anteojo cuyo eje óptico sea horizontal, siendo  $Dd$  la traza de la superficie esférica paralela a  $Bb$

$$Ab = AD - bD = AD - Bd$$

donde  $Bd$  es la altura leída en una mira colocada verticalmente en B, si la visual hubiese seguido la trayectoria curvilínea  $Dd$ . Pero esta es rectilínea y tangente en D, luego será  $DC$  y a la lectura de la mira corresponderá la graduación del punto C.

$$Ab = BB_0 = AD - (BC - dC),$$

$dC$  es el error debido a la esfericidad de la tierra. Con-

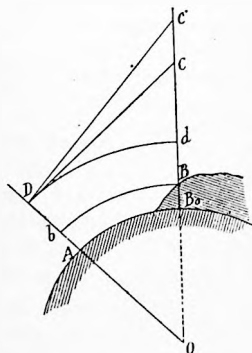


Fig. 229.



giendo en O, centro de la tierra los radios D A y C B<sub>0</sub>, se deduce de la figura

$$d C = \frac{D^2 C^2}{2 O d + C d}$$

Llamando D la distancia D C y R el radio de la tierra, pudiendo despreciarse C d como sumando de 2 O d

$$d C = \frac{D^2}{2 R}$$

Substituyendo el valor del radio medio de la tierra se tiene para

$$\begin{array}{ll} D = 35 \text{ ms.} & d C = 0.1 \text{ mm.} \\ D = 100 \text{ } & d C = 0.8 \text{ } \\ D = 200 \text{ } & d C = 3.1 \text{ } \end{array}$$

valores que no son despreciables en la práctica cuando se hace una nivelación de precisión.

**221. Influencia de la refracción atmosférica.**— Esta tiene por efecto elevar el punto C a C' (fig. 229) podemos poner

$$C C' = D \text{ tang } C D C'$$

El ángulo de refracción C D C' se ha determinado experimentalmente que es igual a 0.08 del ángulo formado en el centro de la tierra A O B.

$$C C' = D \text{ tang } (0.08 A O B)$$

como el valor del ángulo de refracción es muy pequeño

$$C C' \approx D \cdot 0.08 A O B = 0.08 \frac{D^2}{R}$$

El desnivel A b teniendo en cuenta la corrección por refracción y esfericidad, llamando I = A D la altura del anteojo es

$$A b = I - d B = I - [B C' - (d C + C C')]$$

reemplazando d C y C C' por su valor

$$A b = I - B C' + 0.56 \frac{D^2}{R}$$

**222. Anulación de la influencia de la refracción y la esfericidad.**— Si se coloca el instrumento entre dos puntos A y B, la diferencia de nivel es (fig. 230).

$$Ab = Ac - Be = (AC - Cc) - (BE - Ee) = AC - BE - (Cc - Ee)$$

$$A b = [ A C - B E ] - \left( 0.56 \frac{D_1^2}{R} - 0.56 \frac{D_2^2}{R} \right).$$

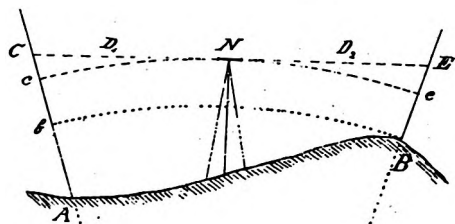


Fig. 230

En el caso, que siempre se debe tratar de verificar que  $D_1 = D_2$ , la corrección es nula.

**223. Nivelación geométrica.**—Es la que se efectúa con los instrumentos estudiados en el Capítulo XII.

Es *simple* cuando por medio de una sola estación se determina el desnivel entre dos puntos A y B suficientemente cercanos (fig. 231).

$$d - N = a' A - b B.$$

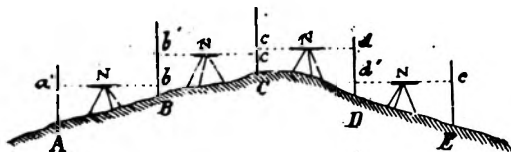


Fig. 231

Cuando es mucho el desnivel o la distancia entre los puntos A y E es muy grande, se hace varias estaciones intermedias y la nivelación se llama *compuesta*. De la figura, obtenemos

$$d N(A - B) = a' A - b B$$

$$d N(B - C) = b' B - c C$$

$$d N(C - D) = c' C - d D$$

$$d N(D - E) = d' D - e E.$$

Sumando

$$dN(A - E) = (a'A + b'B + \dots d'D) - (bB + cC + \dots eE).$$

La diferencia de nivel es la suma de los *golpes de espalda* menos la suma de los *golpes de frente*.

En el Capítulo XII, se indicó la manera de efectuar la nivelación entre dos puntos, según el instrumento que se utiliza y también se indicó la forma de registrar los valores leídos en la mira, agregaremos aquí que es indispensable medir las distancias que separan el instrumento de las miras, distancia que en la planilla de la pag. 173, están registradas en la columna 3. En la 3ª se ponen las distancias parciales medidas sobre el terreno con la cinta entre las estacas sobre las que se apoyan las miras: en la 3b estas distancias reducidas a la horizontal D, lo que en general se hace por la relación que liga la distancia parcial D' y la diferencia de altura h. § 137

$$D = \sqrt{D'^2 - h^2}.$$

La mayoría de los anteojos de nivel tienen hilos estadimétricos; las distancias parciales obtenidas, estando el anteojo horizontal nos dá la distancia corregida directamente.

Con las distancias parciales se obtiene la distancia total al origen, este resultado se pone en la columna última.

La altura o depresión de cada punto con respecto al plano de referencia se obtiene, combinando la diferencia de nivel de cada punto con el anterior y la cota del mismo, el resultado se anota en la columna 7.

**224. Ordenes de nivelación geométrica.**—La nivelación de una zona comprende poligonales de diversos ordenes, convenientemente dispuestas.

En la nivelación de 1º. orden se emplean simultáneamente dos miras que se colocan a distancias nunca mayores de 170 ms., debiendo estacionarse el nivel a igual distancia de las miras con una aproximación de un metro.

El instrumento perfectamente rectificado se protege de la influencia del sol y del viento con una sombrilla. Se emplea el nivel a burbuja independiente haciéndose todas las operaciones que aseguran la eliminación de los errores instrumentales.

Algunas miras están graduadas en su cara anterior y poste-



División de Hidrografía, que están de acuerdo con el objeto de la nivelación.

Por la línea que debe pasar la nivelación se colocarán previamente y a distancia conveniente, una serie de piquetes, estos llevan en la parte superior un tornillo o clavo de cabeza esférica sobre el que se apoya la mira; esta debe ser mantenida bien vertical, para eliminar los errores que introduciría su inclinación.

La nivelación geométrica solo se usa en los trabajos hidrográficos para referir directamente los ceros de las reglas de mareas entre sí, en algunos casos, y para referirlas a puntos fijos en tierra para su posterior colocación si quiere ampliarse o comprobar un trabajo. Excepcionalmente será necesario obtener mayor precisión que la que se obtiene con una nivelación de 2.º orden.

**225. Nivelación geodésica o topográfica.**—Instalado un teodolito en A, cuyo eje del anteojo esté a una altura  $A a = l$ , midiendo el ángulo  $\alpha$ , que la visual a B forma con la horizontal, tenemos:

$$B H = D \tan \alpha.$$

La diferencia de nivel entre A y B es:

$$d N = l + D \tan \alpha.$$

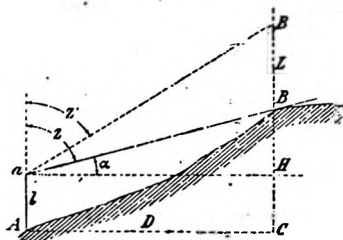


Fig. 232.

Para evitar cambios en el signo de  $\alpha$  y el tener en cuenta si el ángulo ha sido medido en elevación, como en el caso de la figura o en depresión; se mide el ángulo zenital  $Z$ , y

$$d N = l + D \cotg Z.$$

Si la señal visada tiene una altura  $B B' = L$  y  $Z'$  es el ángulo zenital correspondiente  $d N = l + D \cotg Z' - L$ .

Si  $B B' = l$ , visando un punto de la señal que tenga sobre el terreno la misma altura  $l$  que el instrumento.

$$d N = D \cotg Z'.$$

**226. Nivelación taquimétrica.**—En las planillas de poligonal taquimétrica anotamos la lectura de la mira correspondiente al hilo del medio  $L = A O$ , el ángulo  $\alpha$  y la altura  $l$  del instrumento.

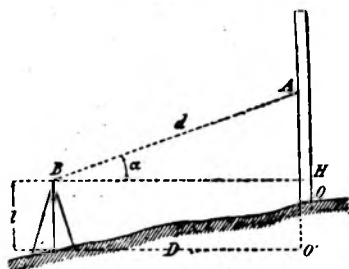


Fig. 233.

La distancia  $d$  medida con el anteojo se reduce a la horizontal  $D$ , con la fórmula ya estudiada

$$D = d \cos^2 \alpha$$

o con las tablas taquimétricas.

La diferencia de nivel  $O O'$  tiene por valor

$$\begin{aligned} d N &= A O' - A O = l + D \tan \alpha - L \\ &= l + d \sen \alpha \cos^2 \alpha - L \end{aligned}$$

Las tablas taquimétricas también facilitan este cálculo.

Cuando el instrumento está colocado en terreno más elevado que la mira, la fórmula es

$$d N = L + d \sen \alpha \cos \alpha - l$$

**227. Influencia de la esfericidad de la tierra y de la refracción.**—Cuando los puntos A y B (fig. 234), cuya diferencia de nivel se quiere determinar están muy lejos, la horizontal en *a* encuentra a la vertical de B en H, la corrección a sumar representada por H *c*, debida a la esfericidad de la tierra es, llamando D la distancia A C

$$H\ c = \frac{D^2}{2R}$$

La refracción tiene por efecto elevar el punto desde B a B', la corrección a restar es B B', cuyo valor hemos determinado

$$B\ B' = 0.08 \frac{D^2}{R}$$

La diferencia de nivel es por lo tanto

$$dN = aA + Hc - BB' + HB'$$

$$dN = l + \frac{D^2}{2R} - 0.08 \frac{D^2}{R} + D \cotg Z$$

$$dN = l + 0.42 \frac{D^2}{R} + \cotg Z$$

Hay tablas especiales que tienen tabulados los valores D cotg Z y  $0.42 \frac{D^2}{R}$  en función de D y Z.

Para dar una idea del valor de  $0.42 \frac{D^2}{R}$  y tenerlo en cuenta según la precisión que se desea obtener en la medida de las alturas damos los siguientes

$$D = 1.000 \text{ ms.}$$

$$0.42 \frac{D^2}{R} = 0.5 \text{ ms.}$$

$$D = 5.000 \text{ } \rangle \quad \rangle = 1.7 \text{ } \rangle$$

$$D = 10.000 \text{ } \rangle \quad \rangle = 6.6 \text{ } \rangle$$

$$D = 15.000 \text{ } \rangle \quad \rangle = 14.8 \text{ } \rangle$$

En el caso que en B haya una señal, y la visual dirigida desde *a* lo sea a su extremo, habrá que tener en cuenta su altura L para obtener el desnivel.

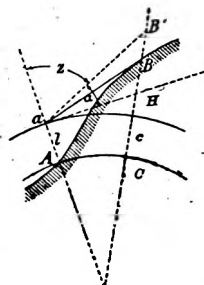


Fig 234.

**228. Horas convenientes para la observación.**—El valor del coeficiente de refracción es muy variable, según sea la humedad, temperatura, presión atmosférica y la naturaleza del terreno donde se trabaja; arenosa, boscosa, tierras cultivadas o no, etc. Es indispensable observar a horas convenientes, cuando la temperatura es más estable, es decir cerca del máximo de temperatura diurna, aunque entonces las imágenes son un poco ondulantes; es necesario no observar jamás con las imágenes fijas de la mañana o de la tarde, pues en esos momentos el valor de la refracción varía muy rápidamente. Todo lo ventajoso que es observar ángulos horizontales a estas horas, es inconveniente para observar ángulos zenitales. Las horas más apropiadas para la observación de estos últimos es entre 11 y 14.

**229. Diferencia de nivel por distancias zenitales reciprocas.**—Si A y B son dos puntos suficientemente cercanos para poder suponer que las verticales del lugar A Z y B Z' son paralelas, siendo D la distancia horizontal A H, la diferencia de nivel, es

$$dN = BH = D \cotg \alpha.$$

Si los ángulos zenitales han sido observados simultáneamente, las condiciones de refracción son las mismas y podemos suponer que el ángulo que le corresponde  $r$  es igual. Los ángulos zenitales medidos, serán

$$ZAB' \text{ y } Z'BA'.$$

De la figura se deduce

$$\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}(Z' - Z)$$

luego

$$dN = D \tan \frac{1}{2}(Z' - Z)$$

Las observaciones deben hacerse en horas consideradas co-

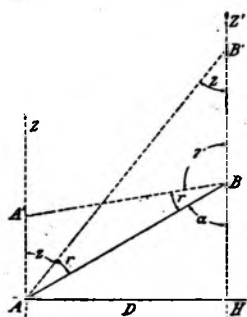


Fig. 235



mo convenientes para la medida de ángulos zenitales; aunque no se hagan el mismo día son aceptables para combinarlas con tal que se hagan a la misma hora mas o menos y en condiciones atmosféricas análogas, de sol, nebulosidad, etc.

Conviene repetir las observaciones en un gran número de días y después combinarlas entre ellas, para obtener un resultado cuya medida corresponda al estado medio de la atmósfera durante el período de observación.

La distancia a que puede considerarse que tiene poca influencia la esfericidad de la tierra y puede, por lo tanto, aplicarse la fórmula anterior es 40 km.; fuera de este límite, debe emplearse la fórmula completa

$$d N = \frac{D \operatorname{sen} \frac{1}{2} (Z' - Z)}{\cos \frac{1}{2} (Z' - Z + C)}$$

230. Diferencia de nivel por dos distancias zenitales.--Sean (figura 236), C el centro de la tierra y C Z, C Z' las verticales de los puntos A y B

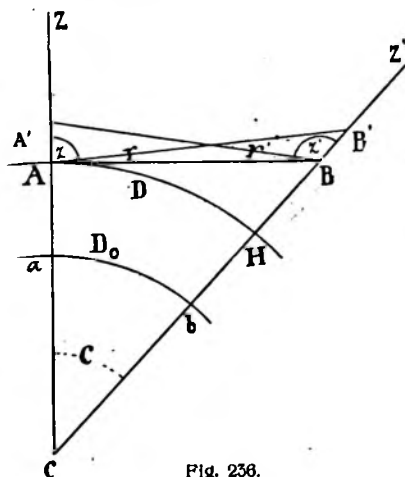


Fig. 236.

cuya diferencia de nivel se busca, y supongamos que desde cada uno se

haya medido la distancia zenital del otro, distancias que llamaremos  $z$  y  $z'$ , por efecto de la refracción atmosférica, sabemos que los rayos visuales que parten de A y B forman con la línea entre ambos puntos los ángulos  $B'AB = r$  y  $A'BA = r'$ . La diferencia de nivel BH se podrá calcular conocidos dichos ángulos  $z, z'$  y la distancia horizontal D entre ambos puntos, distancia que, en general, es de magnitud tal que el ángulo C será inferior a  $1^\circ$ .

El triángulo ABH que puede sin error sensible considerarse como rectilíneo en la hipótesis que

$$C \lesssim 1^\circ, \text{ da la relación } HB = D \frac{\sin BAH}{\sin ABH}$$

$$\text{pero } BAH = 180^\circ - (z + r) - \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = 90^\circ - (z + r) + \frac{C}{2} \text{ y}$$

$ABH = z + r - C$ , substituyendo tenemos

$$HB = \frac{D \cos \left(z + r + \frac{C}{2}\right)}{\sin (z + r - C)}$$

además del triángulo ABC,  $z + r + z' + r' = 180^\circ + C$  (I), o

$$90^\circ + \frac{C}{2} = \frac{z + r}{2} + \frac{z' + r'}{2}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} BAH &= \frac{z' - z}{2} + \frac{r' - r}{2} \text{ y} \\ ABH &= z + r - \frac{C}{2} \frac{z + r}{2} - \frac{z' + r'}{2} + 90^\circ = \\ &= \frac{z - z'}{2} + \frac{r - r'}{2} + 90^\circ - \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Si las dos observaciones han sido ejecutadas en condiciones semejantes puede aceptarse que la refracción en A y B será la misma, es decir,  $r = r'$  y por lo tanto

$$BAH = \frac{z' - z}{2}; ABH = \frac{z - z' - C}{2} + 90^\circ \text{ y}$$

$$HB = \frac{D \sin \frac{1}{2}(z' - z)}{\cos \frac{1}{2}(z' - z + C)} \quad (II),$$

en la que C se calcula por la relación  $\operatorname{tg} C = \frac{D_0}{R}$ , siendo C pequeño

$C \approx \frac{D_0}{R \sin 1''}$  y sabemos que  $D_0$  se puede determinar por la relación



Como comprobación del cálculo debe tenerse

$$dN(A - e) - dN(A - D) = dN(e - D).$$

**232. Métodos de nivelación.**—Cuando se quiere determinar la diferencia de nivel entre los puntos A, B, C... etc., sea mediante una nivelación geométrica o geodésica se puede proceder de distintos modos.

1.º Si los puntos están suficientemente cercanos que desde uno de ellos B se ven todos los demás, colocando el instrumento en este punto hallaremos la diferencia de nivel de todos los demás respecto a B, luego deduciremos la diferencia de nivel entre ellos, este es el método de *radiaciones*. (Fig. 258).

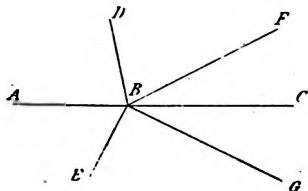


Fig. 258

2.º Se puede determinar la diferencia de nivel de D con A, F con D, C con F, G con C, E con G y A con E.

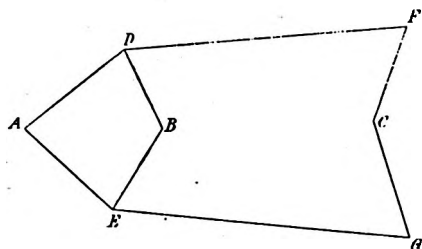


Fig. 259

La diferencia de nivel resultante para A respecto a si mismo debe ser cero, si no lo es, la cantidad que resulte será el error de la nivelación, el que debe estar dentro de la tolerancia establecida según el orden de la nivelación.

Estando determinada la diferencia de nivel entre D y E se hallará la diferencia entre B y D y entre B y E, el resultado que se obtenga debe ser concordante con el obtenido por la poligonal A D ..... E A.

Este método es el de *poligonal*, es el que se usa en la nivelación de precisión.

3.º El método de nivelación por radiaciones es rara vez empleado solo, en general todos los puntos a acotar no se ven

desde una misma estación; es necesario entonces hacer varios centros de radiación A, B, C .... que se unen por una poligonal, fig. 240.

Cuando el instrumento está instalado en B se halla por radiación la diferencia de nivel de B con D, H, E, I; con el instrumento en C, con F, G, Y, K.

La línea A, B, C .... que es la base del trabajo determina

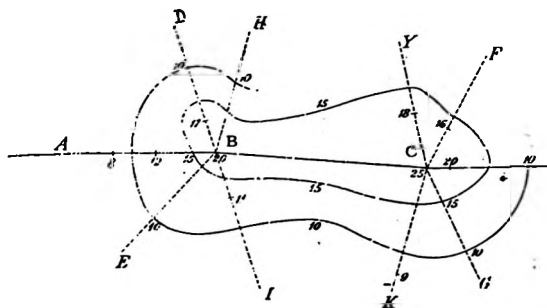


Fig. 240

un perfil del terreno que se llama *perfil longitudinal*, intersección del terreno con la línea vertical que lo recorre según A B C. Las líneas H B I, D B I, H B E, etc., determinan los *perfiles transversales* para completar la representación del terreno. Si marcamos las cotas de los diferentes puntos de estos perfiles y unimos los de igual cota, tendremos las *líneas de nivel* y su examen indica inmediatamente la elevación o depresión del terreno. En la figura se han trazado las curvas de nivel correspondientes a 10 y 15 m.

Este método de nivelación es el más empleado en hidrografía, el perfil longitudinal, línea base o poligonal de la nivelación, es la línea poligonal que se lleva a lo largo de la costa. La diferencia de nivel entre los vértices de la poligonal se determina mediante ángulos zenitales. Las líneas transversales o radiaciones están constituidas por los puntos interiores de la costa a los que se toman ángulos zenitales desde los vértices de la poligonal, con objeto de determinar su altura. La diferencia de nivel obtenida mediante la poligonal topográfica y de nivelación

entre los vértices extremos de la misma, debe ser igual a la diferencia de nivel obtenida directamente entre los mismos vértices al hacer la triangulación mediante la medida de distancias zenitales reciprocas. Cuando no se tenga este elemento de comprobación, se halla la diferencia de nivel en el vértice de partida y en de llegada, con la superficie del mar, haciendo la observación con el mismo estado de la marea, en bajamar o pleamar.

## CAPITULO XIX.

### RELEVAMIENTO CON INSTRUMENTOS ESPECIALES

#### RELEVAMIENTO TAQUIMETRICO

**233. Fórmulas.**—Sea  $O(X.Y.Z.)$  el sistema de ejes coordenadas con centro en el punto de estación del instrumento  $O$ , el plano  $ZY$  coincide con el plano meridiano y el  $XY$  con el horizontal; sea  $O'(X'Y'Z')$  un sistema de ejes paralelos al anterior que pasa por el punto  $O'$  de intersección del eje secun-

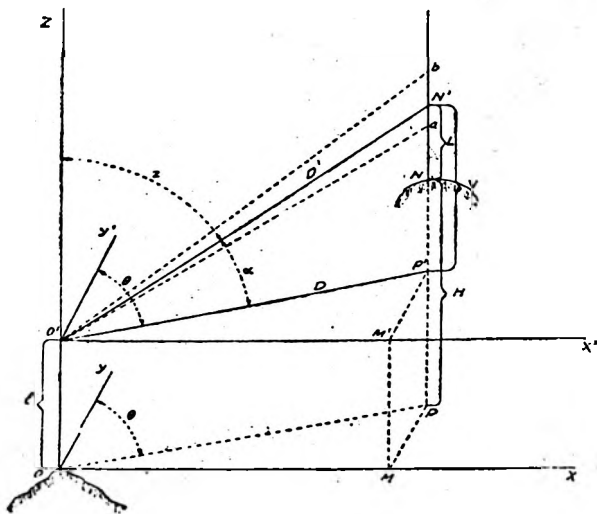


Fig. 241

dario con el eje del anteojo, a una distancia,  $OO' = l$  sobre el plano horizontal que pasa por  $O$  y que tomamos como plano de referencia.

En otro punto  $N$  del terreno colocamos verticalmente una

mira y con el anteojo desde  $O'$  medimos la distancia estadimétrica  $ab$  y consideramos su promedio  $N'$  como la lectura correspondiente al hilo del medio con lo que tenemos la longitud de mira  $NN' = L$ , sobre el círculo vertical se mide el ángulo zenital  $Z O' N' = z$  el horizontal  $P' O N' = \alpha$ .

Sobre el círculo horizontal del instrumento se mide el ángulo  $Y' O P' = \theta$  siendo  $P'$  la proyección de  $N$  sobre el plano  $X' Y'$

Las coordenadas horizontales de  $N$  serán

$$D = \left( \frac{ab}{\omega} \right) \sin^2 z = D' \sin^2 z = D' \cos^2 \alpha \quad (1)$$

$$x = OM = O' M' = D \sin \theta \quad (2)$$

$$y = PM = P' M' = D \cos \theta \quad (3)$$

También se obtiene de la figura

$$v = P' N' = D \cotg z = D \tan \alpha \quad (4)$$

Luego la altura  $NP = H$ , del punto  $N$  sobre  $O$  será

$$H = l + v - L \quad (5)$$

Las fórmulas (1) a (5) son llamadas *taquimétricas* y los valores observados o medidos directamente,  $l$ ,  $D'$ ,  $\theta$ ,  $L$ ,  $z$  o  $\alpha$ , son llamados *números generadores*.

El ángulo  $\theta$  siempre debe medirse de izquierda a derecha y de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  para obtener el signo de  $x$  e  $y$ . El signo de  $H$  depende del resultado de  $l + v - L$ ;  $l$  y  $L$  siempre son positivos y  $v$  es positivo para  $z < 90^\circ$  o  $\alpha$  sobre el horizonte y negativo para  $z > 90^\circ$  o  $\alpha$  debajo del horizonte. El signo positivo de  $H$  indica que  $N$  está sobre el horizonte de  $\theta$  y el negativo que irá por debajo.

**234. Métodos de cálculos.** Obtenidos los números generadores, para determinar las coordenadas de un punto puede emplearse el cálculo logarítmico, emplear tablas taquimétricas o gráficas e instrumentos para ese objeto. Sobre el primer procedimiento no se insistirá.

Las tablas taquimétricas son de varios tipos: unas, se emplean para los círculos con graduación centesimal y otras para la graduación sexagesimal. Algunas tablas solo sirven para el cálculo de la distancia horizontal  $D$  y dan el valor de



$v = D \tan z$  que sirve para obtener  $H$ ; otras tablas además de estos valores dán los de  $x$  e  $y$ .

*Tablas de Jordán.*—Se usan con instrumentos de graduación sexagesimal, el argumento angular es la inclinación sobre el horizonte  $z$  y la distancia estadimétrica medida  $D'$  entre 10 y 250 ms. Dá los valores de  $D$  y  $v$ .

$$D = D' \cos^2 \alpha$$

$$v = D \tan \alpha = D' (1/2 \sin 2\alpha)$$

Para  $D'$  entre 10 y 100 ms.; los valores de  $v$  están dados para  $\alpha$  entre  $0^\circ$  y  $30^\circ$  de  $3'$  en  $3'$ ; los valores de  $D$  para  $\alpha$  de  $1^\circ$  en  $1^\circ$  hasta los  $10^\circ$ , de  $30'$  en  $30'$  hasta los  $20^\circ$  y de  $20'$  en  $20'$  hasta los  $30^\circ$ .

Para  $D'$  entre 100 y 175 ms.; los valores de  $v$  están dados para  $\alpha$  entre  $0^\circ$  y  $20^\circ$  de  $2'$  en  $2'$ ; los valores de  $D$  para  $\alpha$  de  $30'$  en  $30'$  hasta los  $10^\circ$  y de  $20'$  en  $20'$  hasta los  $20^\circ$ .

Para  $D'$  entre 175 y 250 ms.; los valores de  $v$  están dados para  $\alpha$  de  $1'$  en  $1'$  entre  $0^\circ$  y  $10^\circ$ ; los valores de  $D$  para  $\alpha$  de  $30'$  en  $30'$  hasta los  $5^\circ$  y de  $20'$  en  $20'$  hasta los  $10^\circ$ .

La variación de  $\alpha$  hasta los  $30^\circ$  para  $D' < 100$ , hasta  $20^\circ$  para  $D'$  entre 100 y 175 y hasta  $10^\circ$  entre 175 y 250 está de acuerdo con lo que en general resulta en la práctica, las visuales más inclinadas se tienen para los puntos más cercanos.

Cuando se usan instrumentos que dan el ángulo zenital  $z$ , hay que obtener previamente el ángulo horizontal  $\alpha = 90^\circ - z$ , para tener el argumento de la tabla.

Para distancias mayores de 250 ms. se halla  $1/2 D'$  o  $1/3 D'$ , se entra en la tabla y se obtiene los valores correspondientes de  $v$  y  $D$ , estos multiplicados por 2 o 3 dan el resultado definitivo.

*Tablas de Iadanza.*—Las hay para división sexagesimal y centesimal. Contiene los productos de los números enteros de 1 a 9 por  $\cos^2 u$  y por  $\sin u \cos u$  y se aplican al cálculo de  $D$  y  $v$  reemplazando  $u$  por  $\alpha$ ; y de  $x$  e  $y$  reemplazando  $u$  por  $\frac{u}{2}$ .

Se utilizan las fórmulas siguientes:

$$\text{Reemplazando } \left\{ \begin{array}{l} D = D' \cos^2 \alpha = D' \cos^2 u \\ u \text{ por } \alpha \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v = D' \tan \alpha = D' \sin \alpha \cos \alpha = D' \cos u \sin u \end{array} \right.$$

$$\text{Reemplazando } \left\{ \begin{array}{l} x = D \sin \theta = 2 D \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 D \sin u \cos u \\ u \text{ por } \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = D \cos \theta = 2 D \cos^2 \frac{\theta}{2} - D = 2 D \cos^2 u - D \end{array} \right.$$

Para efectuar el cálculo se descompone  $D'$  y  $2 D$  en unidades, decenas y centenas y se obtiene de la tabla los valores correspondientes que sumados dan el resultado final.

Así: para  $D' = 234 \text{ ms.}$ ,  $\alpha = 4^\circ$  y  $\theta = 86^\circ$

se tendrá

$$\begin{aligned} D &= (2 \cos^2 4^\circ) 100 + (3 \cos^2 4^\circ) 10 + (4 \cos^2 4^\circ) = 232.9 \\ v &= (2 \sin 4^\circ \cos 4^\circ) 100 + (3 \sin 4^\circ \cos 4^\circ) 10 + (4 \sin 4^\circ \cos 4^\circ) \end{aligned}$$

Las coordenadas  $x$  e  $y$  se obtienen con la distancia hallada,

$$2 D = 465.8 \text{ y } \frac{\theta}{2} = 43^\circ.$$

$$\begin{aligned} x &= (4 \sin 43^\circ \cos 43^\circ) 100 + (6 \sin 43^\circ \cos 43^\circ) 10 + \\ &\quad + (5 \sin 43^\circ \cos 43^\circ) + (8 \sin 43^\circ \cos 43^\circ) \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (4 \cos^2 43^\circ) 100 + (6 \cos^2 43^\circ) 10 + \\ &\quad + (5 \cos^2 43^\circ) + (8 \cos^2 43^\circ) \frac{1}{10} = 232.9 \end{aligned}$$

*Tablas gráficas.*— La representación geométrica de las funciones

$$D = D' \sin^2 z$$

$$v = D' \sin z \cos z$$

ha servido para la construcción de instrumentos autoreductores y la preparación de tablas gráficas.

El Ingeniero Orlandi adoptó la solución siguiente para la formación de la Tabla Taquipantométrica.

Sobre  $OA = D'$  como diámetro se describe una semicircunferencia; sea  $OB$  la recta que forma con la vertical el ángulo  $z$ , se tiene

$$OP = OB \sin z = OA \sin^2 z = D' \sin^2 z = D$$

$$BP = OB \cos z = OA \sin z \cos z = D' \sin z \cos z = v$$

Suponiendo una serie de semicircunferencias tangentes a OT y diámetro OA', OA''... etc. y un haz de rectas con centro en O, para una distancia  $D' = OA''$  y distancia zenital,  $z''$ , siguiendo la circunferencia con diámetro OA'', en la intersección con la recta que forma el ángulo  $z''$ , hallamos el punto B'' y con el cuadrículado gráfico obtendremos  $OP'' = D$  y  $B''P'' = v$ .

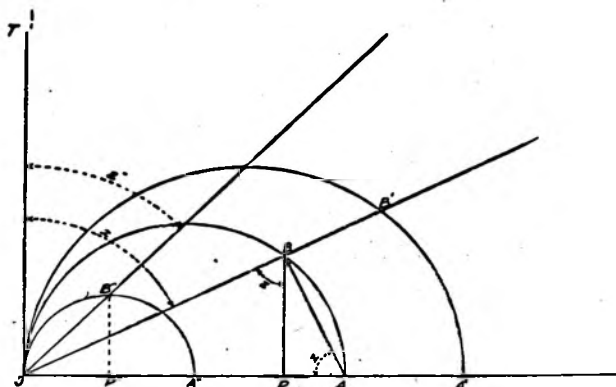


Fig. 242.

Sobre la circunferencia correspondiente a  $2D$ , doble de la distancia horizontal hallada  $y$  en la intersección con la recta del haz cuyo ángulo es  $\frac{1}{2}\theta$  tendremos en el segmento paralelo a OT

$$x = D \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

Y sobre el eje OA, el segmento que nos dé el valor de  $2D \cos^2 \frac{\theta}{2}$  con el que se deduce

$$y = 2D \cos^2 \frac{\theta}{2} - D$$

El autor ha hecho modificaciones en el trazado gráfico; así, el haz convergente en el punto O está reducido a un cuarto

de cuadrante y adoptando diversas escalas, para D la más pequeña y para  $v$  la más grande y los arcos de circunsferencia se transforman en arcos de elipse.

**235. Unión de las estaciones.**—Las estaciones consecutivas deben unirse entre sí para poder referir todas las coordenadas al punto tomado como origen.

Esta unión puede hacerse de distintas maneras y su aplicación no queda únicamente limitada al método taquimétrico, es también extensiva a la plancheta.

*Método Moinot, directo o punto atrás.* En la aplicación de este método las dos estaciones consecutivas deben ser visibles entre sí y estar a una distancia inferior al límite máximo del alcance útil que proporciona el anteojo dentro de la exactitud fijada. Si A y B son las dos estaciones, colocando el instrumento en A y la mira en B se tendrá la distancia reducida a la horizontal  $AB = D_{AB}$  y el ángulo zenital  $Z_{AB}$ ; el azimut  $\theta_{AB}$  se puede obtener con la declinatoria o apoyándose sobre un lado de la triangulación AC cuyo azimut  $\delta$  es conocido y midiendo el ángulo CAB y también, al iniciar el trabajo por la observación directa.

Después se llevará el instrumento a B y la mira en A, midiéndose la distancia horizontal  $BA = D_{BA}$ , como definitiva se toma el promedio con  $D_{AB}$ ; también se mide  $Z_{BA}$ , que será diferente de  $Z_{AB}$ ; a la primera corresponde el valor  $v_{BA}$  y al segundo  $v_{AB}$ , se tendrá

$$H = l_A + v_{AB} - L_B = l_B + v_{BA} - L_A$$

Siendo  $l_A$  y  $l_B$  las alturas del anteojo sobre el suelo cuando se ha hecho estación en A y B,  $L_A$  y  $L_B$  la lectura de mira que corresponde al hilo del medio cuando se ha puesto en A y B. Si en ambas estaciones se ha procedido de manera que  $l_A = l_B$  y  $L_A = L_B$ , las distancias zenitales  $Z_{AB}$  y  $Z_{BA}$  deben ser iguales y no siéndolo se toma el promedio como definitivo.

Con la distancia horizontal y el azimut  $\theta_{AB}$  se calculan las coordenadas de B respecto a A.

Al hacer estación en B, ya conocido el azimut  $\theta_{BA} = 180^\circ + \theta_{AB}$  se coloca el cero de uno de los nonios en esta graduación antes de apuntar a A, se gira el limbo para hacer esta opera-

ción y se fija bisectando A, con esto el limbo tendrá sus graduaciones orientadas.

Si la orientación en B se hace con la declinatoria, al hacer la lectura correspondiente a A se tendrá el azimut  $\theta'_{BA}$ ; la diferencia  $\Delta\theta = \theta'_{BA} - \theta_{BA}$  es la corrección que debe aplicarse a todos los azimutes observados desde B para que queden referidos al meridiano de A.

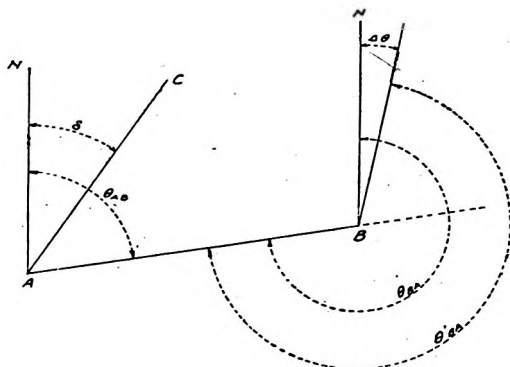


Fig. 245.

**Método Porro o indirecto.** Se emplea cuando las dos estaciones no son visibles entre sí, consiste en hacer estación en dos puntos A y B colimando y haciendo las lecturas completas sobre dos puntos M y N.

Con estación en A se tendrá

$$D_{AM}, \theta_{AM}, H_A^M, D_{AN}, \theta_{AN}, H_A^N$$

y con estos elementos se calculará

$$x_{AM}, y_{AM}, x_{AN}, y_{AN}$$

y se deducirá el azimut en MN

$$\tan \theta_{MN} = \frac{x_{AN} - x_{AM}}{y_{AN} - y_{AM}}$$

Haciendo estación en B con el círculo orientado con la declinatoria se tendrá

$$D_{BM}, \theta_{BM}, H_B^M, D_{BN}, \theta_{BN}, H_B^N$$

y con estos elementos se calculará

$$x_{BM}, y_{BM}, x_{BN}, y_{BN}$$

y

$$\tan \theta'_{MN} = \frac{x_{BN} - x_{BM}}{y_{BN} - y_{BM}}$$

La diferencia  $\Delta \theta = \theta_{MN} - \theta'_{MN}$  nos dá la corrección de las orientaciones tomadas en B aplicándole su signo.

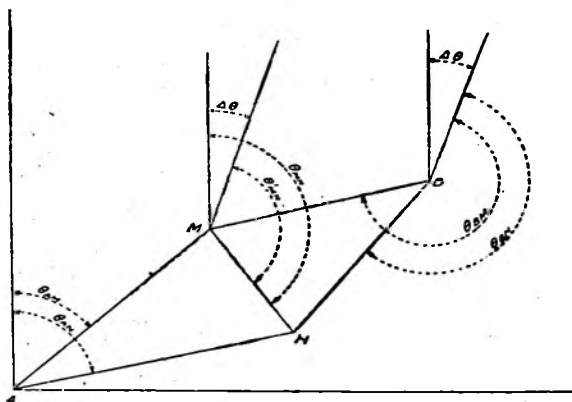


Fig. 244.

Con el azimut corregido de  $\theta_{BM} + \Delta \theta$  y  $\theta_{BN} + \Delta \theta$  se calcula nuevamente las coordenadas de M y N respecto a B y finalmente se tendrá las coordenadas de B respecto a A.

$$x_{AB} = x_{AM} - x_{BM} = x_{AN} - x_{BN}$$

$$y_{AB} = y_{AM} - y_{BM} = y_{AN} - y_{BN}$$

para la diferencia de nivel se tiene

$$H_A^B = H_A^M + H_B^M = H_A^N + H_B^N$$



$$AP = D_{AM} \cos (\theta_{AB} - \theta_{AM})$$

$$PB = D_{BM} \cos (\theta_{BM} - \theta_{BA})$$

$$AB = AP + BP$$

Además

$$H_A^B = H_A^M + H_B^M$$

Ea vez de calcular la distancia AB para obtener con ella y  $\theta_{AB}$  las coordenadas de B respecto a A; puede calcularse con  $D_{AM}$  y  $\theta_{AM}$  y con  $D_{BM}$  y  $\theta_{BM}$ , este último corregido

$$x_{AM}, y_{AM}, x_{BM}, y_{BM}$$

Luego

$$x_{AB} = x_{AM} - x_{BM}$$

$$y_{AB} = y_{AM} - y_{BM}$$

Como comprobación puede elegirse otro punto N, del otro lado de la línea AB y se obtendrá análogamente la distancia AB o las coordenadas.

**236. Operaciones sobre el terreno.**—Se harán una serie de estaciones principales A, B, C — A que serán los vértices de una poligonal cerrada y que estarán unidos entre si casi siempre con el método mixto; el cierre de la poligonal permitirá la compensación azimutal y de las coordenadas.

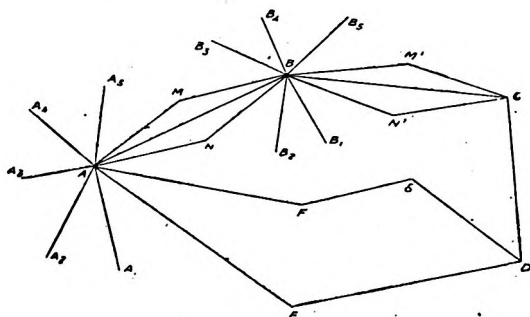


Fig. 246.

Instalado el instrumento en A se nivelará y orientará con la declinatoria o apoyándose en una línea de azimut conocido, se



harán las lecturas correspondientes a una mira que en  $M$  y  $N$  tendrán un portamira, estos puntos se marcan con un piquete porque habrá que repetirlo cuando se haga estación en  $B$ .

Desde la estación  $A$  se determinan los números generadores de varios puntos  $A_1, A_2, A_3 \dots$  los que sean necesarios para situar todos los detalles topográficos y obtener el relieve del suelo.

Se lleva el instrumento a  $B$ , se nivela y orienta su círculo horizontal con el azimut  $180^\circ + \theta_{AB}$  o con la declinatoria, en cuyo caso habrá que hacer la corrección correspondiente para referir los azimutes medidos en  $B$  al meridiano adoptado para  $A$ , se determinan las distancias  $BM$  y  $BN$  para la unión de las estaciones y se determinarán los números generadores para una serie de puntos  $B_1, B_2, B_3 \dots$  que complejen la topografía.

Los puntos  $M'$   $N'$  que servirán para unir  $C$  con  $B$  se marcarán con un piquete para repetirlos cuando se haga estación en  $C$ .

Si con el número de puntos batidos desde las estaciones principales no se completa el relieve del terreno, puede hacerse una poligonal secundaria  $AFGD$  por el interior del polígono.

La celeridad del trabajo depende de la práctica del observador y de los portamiras por la forma de manejar los instrumentos a su cargo y por la acertada elección de los puntos del terreno que deben ser los mas importantes para obtener su representación. Habrá señales convenidas con los portamiras para que estén atentos cuando se les observa, para trasladarse cuando se hayan terminado las operaciones en el punto en que están, etc.

Para el registro de ángulos, distancias horizontales y zenitales, cálculo de coordenadas y su compensación, pueden emplearse los formularios usados para el cálculo de poligonales y situación de puntos porque este trabajo no difiere de aquel sino con el método de determinar la distancia.

#### **RELEVAMIENTO CON LA PLANCHETA**

Este trabajo puede hacerse apoyándose sobre los vértices de una poligonal principal o secundaria; midiendo una base, orientándola y haciendo una triangulación gráfica; o en estacio-

nes independientes sobre los vértices de triangulación o puntos ligados a esos vértices.

**237. Desarrollo en poligonal.**— Sean A, B, C, ... vértices de una poligonal hecha a cinta o taquímetro, ya compensada y de la que se conoce los azimutes y distancia horizontal de los lados AB, BC, CD.

Se hace estación con la plancheta en A, se orienta el tablero se gira el anteojo hasta que quede apuntado a B, se traza en el canto de la regla la línea  $aB$  y sobre ésta se toma  $ab$  que en la escala adoptada es igual a la longitud real AB.

Luego se lleva la plancheta a B y se centra de manera que el punto  $b$  coincida con la vertical de B, se coloca la regla según  $ba$  y se gira la plancheta hasta que el anteojo biceste a A desde B; luego se apunta a C, se traza la línea  $bC$  y se toma la longitud  $bc$  que en escala representa la distancia BC; repitiendo las operaciones en C y D se tendrá  $abcd$  que representa gráficamente en la escala adoptada a la línea poligonal ABCD.

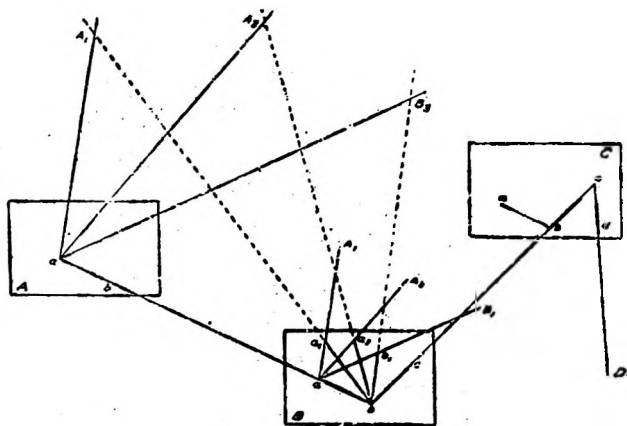


Fig. 247.

Si los vértices recorridos no son los de una poligonal previamente hecha directamente, se orientará el primer lado AB con la declinatoria u observando el azimut y se medirán las distancias AB, BC, CD ... con una cinta o con el anteojo

estadimétrico de que están provistas casi todas las planchetas, en esta forma se hará simultáneamente la poligonal y el relevamiento. Este modo de trabajar no es generalmente empleado porque después de cerrada la poligonal, al hacer la compensación y modificar la situación de los puntos  $a, b, c, d \dots$  en el tablero, quedan modificadas todas las situaciones de los demás puntos y el dibujo de la topografía se altera; no teniendo una poligonal previa es preferible hacer un recorrido a los vértices de la misma para trazarla independientemente, cerrarla y compensarla; después se volverán a recorrer las estaciones para hacer el levantamiento de detalle.

Para situar sobre el tablero otros puntos  $A_1, A_2, A_3 \dots$  se emplea el método de intersecciones; cuando se está en estación en A se apunta a  $A_1, A_2, B_1 \dots$  y se trazan las líneas  $a A_1, a A_2, a B_1 \dots$ ; cuando se hace estación en B se trazarán las líneas correspondientes a las visuales  $B A_1, B A_2, B B_1$ , que son  $b A_1, b A_2, b B_1 \dots$  que cortarán a las visuales correspondientes trazadas desde  $a$  en los puntos  $a_1, a_2, b_1, \dots$  que son la respectiva representación gráfica de los puntos  $A_1, A_2, B_1 \dots$ . Con las distancias  $AA_1, AA_2, BB_1$ , sacadas de la escala del gráfico y los ángulos zenitales respectivos se obtendrá la cota de esos puntos.

**238. Triangulación gráfica.**—Sean A, B, C, D  $\dots$  puntos que se quieren unir topográficamente trabajando con la plancheta, entre dos de ellos A y B se mide la distancia sobre el terreno y la orientación, este lado se toma como base.

Se hace estación en A, se orienta el tablero y apuntando el anteojo a B se traza la línea  $a B$  sobre la que se toma la longitud  $a b$  igual en escala a la distancia medida AB; también se apunta a C y se traza la línea  $a C$ .

Trasladada la plancheta a B se centra el punto  $b$  sobre la vertical de B, se gira el tablero con la regla apoyada en  $a B$  hasta que quede apuntado a A; luego, se apunta a C y en el corte de  $a c$  con  $b C$  en  $c$ , se tendrá la situación gráfica de C. También se traza la línea  $b D$ . Repitiendo la observación en C se tendrá los triángulos gráficos  $abc, bcd, \dots$  que representen los triángulos del terreno. En cada una de las estaciones

se trazan las visuales que sean necesarias para situar los detalles topográficos por el método de intersecciones.

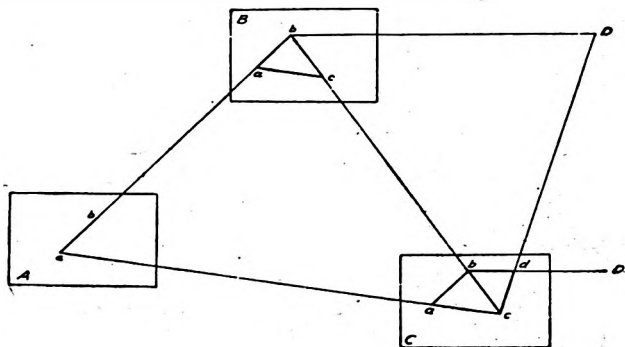


Fig. 248.

**239. Método general.**—*Relevamiento con la brújula.*—Se hace el relevamiento con la brújula en la misma forma que se efectúa con un teodolito y con la diferencia de que las orientaciones son referidas directamente a la dirección del meridiano magnético o verdadero.

Si ABCD... son vértices de una poligonal, se medirán las distancias AB, BC, CD... y se hará estación en A orientando el círculo de manera que el origen de sus graduaciones quede en coincidencia con el extremo N de la declinatoria, en este caso la poligonal quedará orientada respecto al meridiano magnético; si se coloca la línea de fé de la aguja de manera que indique la declinación magnética del lugar, el cero de la graduación del círculo quedará sobre el meridiano verdadero.

Si en A no puede hacerse estación, puede elegirse un punto cualquiera de la alineación AB, en A<sub>1</sub>, por ejemplo, para medir la orientación de la línea.

No es necesario hacer estación en todos los vértices de la poligonal, basta hacerlo alternativamente, y es esta la ventaja del empleo de este método para trabajos rápidos; haciendo estación en B se obtendrá la orientación de BA y BC; luego haciendo estación en D, la de DC y DE.

Si quiere medirse los ángulos entre dos lados consecutivos se tendrá que  $\sphericalangle ABC = Z_{BC} - Z_{BA}$ ; pero en C el  $\sphericalangle BCD = 360^\circ - (Z_{CB} - Z_{CD})$ , es decir, que hay que tomar el suplemento a  $360^\circ$  de la diferencia de azimutes.

El levantamiento a brújula puede ser aplicado a reconocimientos y cuando el número de vértices es muy grande y en este último caso presenta la ventaja de no apoyarse las medidas de las orientaciones sobre el lado anterior y no hay por lo tanto acumulación de errores.

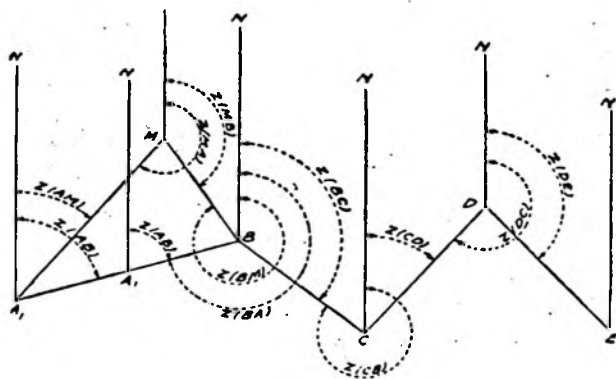


Fig. 249.

En el relevamiento rápido de una zona pueden situarse los puntos que se quieren fijar en el plano midiendo sus orientaciones con respecto a dos puntos de la poligonal: un punto M puede situarse desde A y B midiendo los azimutes  $Z_{AM}$  y  $Z_{BM}$  pero más aplicable es el sistema de medir las orientaciones desde el mismo punto que se trata de situar, es decir, hacer estación en M y medir las orientaciones  $Z_{MA}$  y  $Z_{MB}$ , después desde A y B se trazan las marcaciones  $180^\circ + Z_{MA}$  y  $180^\circ + Z_{MB}$ , el corte de estas líneas nos da la situación en M.

Para buscar sobre el terreno un punto determinado del mismo, por ejemplo M, se obtiene del plano el azimut  $Z_{MA}$ , el observador se traslada en esta dirección hasta estar sobre el azimut  $Z_{MB}$  que también lo habrá obtenido del plano.

## CAPITULO XX.

### FOTOGRAMETRIA

**240. Generalidades.**—En una cámara fotográfica el objetivo forma sobre el plano del vidrio esmerilado, que se reemplaza después por la placa sensible, una verdadera perspectiva del panorama que abarca el campo útil de la cámara. Estas perspectivas pueden servir para hacer un levantamiento topográfico, de ellas puede deducirse los elementos de una triangulación y los detalles de la planimetría y nivelación.

Los levantamientos fotográficos presentan ventajas sobre todo en los parajes montañosos y de difícil recorrido pues, permiten abreviar la estadía en el terreno.

El pasaje de la fotografía a la representación en el plano está basada en los principios de la *perspectiva plana* o de la *perspectiva cilíndrica*, según la clase del aparato usado.

La *perspectiva plana* se emplea en los aparatos más usados y tiene un campo restringido por lo que es necesario multiplicar las vistas y es a veces difícil encontrar en ellas los puntos de referencia necesarios. Una aplicación de esta perspectiva es la *estereofotogrametría*.

La perspectiva cilíndrica tiene mucho más campo y en una sola fotografía se puede, con ciertos aparatos, obtener la vista panorámica en toda la vuelta del horizonte o por lo menos la mitad de esa vuelta.

**241. Fotodeolitos.**—El principio del método en que se basa el uso de este instrumento es el que sigue: Sea (O) el punto de vista (fig. 250) o centro óptico de la lente objetiva que dá la perspectiva sobre el plano vertical RSQT, P la proyección de O sobre el mismo plano y HN la traza del plano horizontal que pasa por OP.

Sea  $a$  y  $d$  puntos de la vista,  $a'$  y  $d'$  sus proyecciones sobre la línea del horizonte  $HN$ , el ángulo  $a' O d'$  es el ángulo planimétrico de las direcciones  $OA$  y  $OD$ , y

la relación  $\frac{a' a''}{O a'} = \frac{a a'}{O a'}$  es

la pendiente de la visual  $OA$ ; para el punto  $D$  será

$\frac{d d'}{O d'}$ , la primera positiva

y la segunda negativa, es decir, que  $A$  está sobre el plano horizontal que pasa por  $O$  y  $D$  está por debajo.

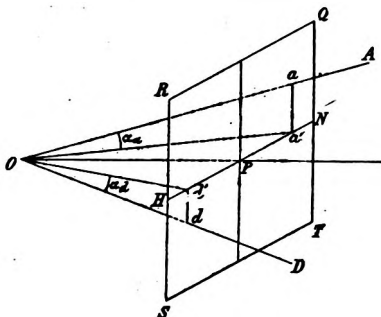


Fig. 250.

El punto  $P$  se considera

centro de un eje de coordenadas, estas serán para  $A$ :

$$P a' = x, a a' = y$$

De la figura 251 se obtiene

$$\text{tag } a' O P = \text{tag } \theta = \frac{x}{f}$$

$$O a' = \frac{f}{\cos \theta}$$

$$\text{tag } \alpha_a = \frac{a a'}{O a'} = \frac{y}{f} \cos \theta = \frac{y}{y a^2 + f^2}$$

y conociendo las distancias  $OA, OB, \dots$  a los puntos del terreno medidas desde el punto de estación, obtendremos la cota de los mismos multiplicando esa distancia por  $\text{tag } \alpha$ .

La fig. 251 es la figura 250 cuando se ha rebatido sobre el plano horizontal alrededor de  $HN$ , al plano vertical de la vista.

Si  $A$  y  $B$  (fig 252) son dos estaciones, extremidades de una base, vértices de una triangulación o de una poligonal; será suficiente tomar desde cada una de ellas una vista fotográfica de tal manera que tengan puntos comunes.

Trazando después sobre el papel la base  $AB$  reducida a escala, los puntos  $A$  y  $B$  serán las proyecciones sobre el plano

de dibujo de los puntos de vista, construyendo los ángulos  $\beta$  y  $\alpha$  iguales a los observados con el instrumento, la intersec-

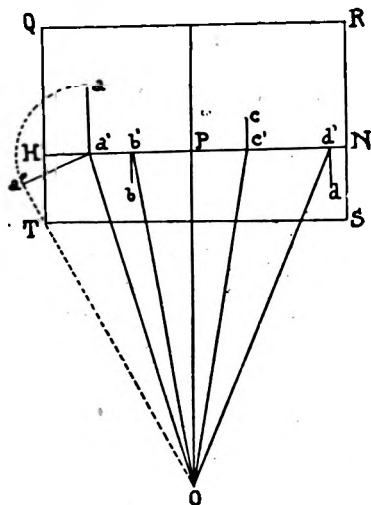


Fig. 251.

ción  $a''$  nos dá la posición en el dibujo del punto elegido en

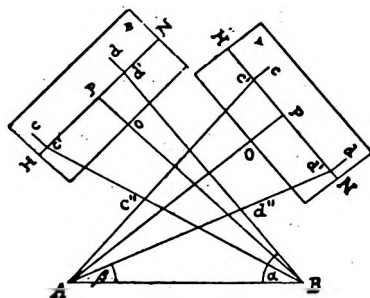


Fig. 252.

el terreno al que se refieren los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . La recta  $B a''$



debe pasar por el pie  $d'$  de la fotografía de D en la placa B, la que orientaremos teniendo en cuenta la distancia  $P d'$  medida en la misma, la distancia focal  $BP$  y la condición de ser  $HN$  perpendicular a  $PB$ ; en forma análoga se orienta la fotografía A.

Para un punto del terreno C, fotografiado en  $c$ , hallamos los pies de las perpendiculares  $c'$  en ambas fotografías, uniendo  $c'$  con B y A respectivamente, la intersección  $c''$  es la proyección horizontal en el plano de dibujo de C.

A  $c''$  es la distancia; en escala, de  $c''$  al centro de estación A, la pendiente es  $\text{tang } \alpha_c = \frac{c c'}{f} \cos c' A P$  y la cota de  $c$  será  $A C \text{ tang } \alpha_c$ , los ángulos planimétricos son

$$c'' A d' = c' A d' \text{ y } c'' B d'' = c' B d'.$$

Entre los instrumentos que permiten aplicar este método está

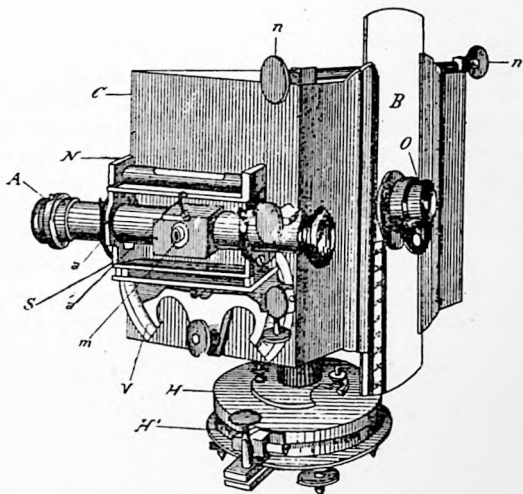


Fig 253.

el fototeodolito Laussedat que se compone de una cámara C, a la que se agrega un anteojo A, el nivel N, el limbo vertical

V y el azimutal H H'. El nivel sirve para poner vertical el vidrio despulido y la placa fotográfica. El anteojo y el limbo sirven para medir el azimut del centro de la imagen, azimut que permite orientar las fotografías; dos pares de índices imprimen sobre la placa los puntos que determinan las líneas centrales cuya intersección es la proyección del punto de vista sobre la placa. Con la cámara perfectamente nivelada una de esas líneas coincide con la horizontal y la otra con la vertical,

La dirección del horizonte sobre la placa se obtiene con el nivel Jardinet, formado por un tubo chato parcialmente lleno de mercurio, con forma de marco y colocado en contacto con la placa, la fotografía de los meniscos da la dirección de la horizontal.

Cuando el campo vertical de la cámara es insuficiente, por lo que es necesario extenderlo sobre o debajo de la línea del horizonte, la placa B de aluminio, en la cual está montado el objetivo, puede desplazarse verticalmente accionando los tornillos  $m$  y  $n$ , la graduación colocada al lado del marco permite conocer el desplazamiento correspondiente que debe darse a la línea del horizonte en la fotografía.

**242. Cilindrografo.**—Las generatrices del cilindro que recibe la perspectiva se suponen verticales. Sea una fotografía desarrollada sobre el plano (fig. 254) en  $P P'$ ,  $h h'$  la línea del horizonte y  $O O' = f$  la distancia focal que es igual al radio del cilindro.

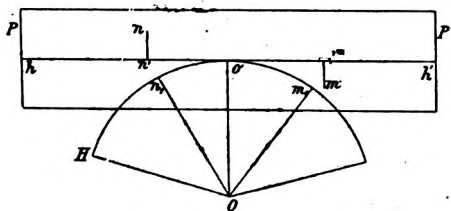


Fig. 254.

El ángulo planimétrico de dos direcciones  $O M$  y  $O N$  o  $m_1$  o  $n_1$  está medido por el  $\frac{\text{arco } m_1 n_1}{f} = \frac{m' n'}{f}$  y la pendiente

es igual a  $\frac{m m'}{f}$ ; en otros terminos, el azimut de una dirección O M, contado desde una dirección inicial O H, la misma para todos los puntos, es proporcional a la longitud  $h m'$  medida sobre la línea del horizonte y la pendiente es igualmente proporcional a la distancia  $m m'$  de la imagen del punto a la línea del horizonte.



Fig. 255.

Análogamente al empleo de la perspectiva plana, se hará estación en los extremos A y B de una base y se medirán los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  que la línea base forma con las visuales desde A y B a un punto común en ambas fotografías.

El aparato que se emplea para obtener las perspectivas cilíndricas es el *cilindrografo*, aparato panorámico que da en una sola vista casi la mitad del horizonte. La película sensible está contenida en un chasis cilíndrico y recibe la impresión luminosa mediante un objetivo P que gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro óptico; este movimiento de rotación se hace a mano. El aparato, montado sobre tornillos nivelantes, esta provisto de dos niveles perpendiculares entre sí,

de una brújula, la pinula  $m$  y dos índices que se imprimen en la película para determinar la línea del horizonte.

**243. Estereofotogrametría.**—Al tratar el empleo de las perspectivas planas, las fotografías tomadas desde A y B (fig. 252) están en planos verticales y perpendiculares a las direcciones A P y B P; la solución de los problemas fotogramétricos, tanto gráficos como analíticos, se simplifican mucho cuando las dos vistas se encuentran en el mismo plano vertical y como por otra parte mirando las dos fotografías en el estereoscopio se produce el conocido efecto de relieve, se puede disponer de un modelo del terreno que facilita la tarea de identificación de puntos y la elección de objetos característicos.

El principio del método es el siguiente; sean (fig. 256),  $H_1$  y

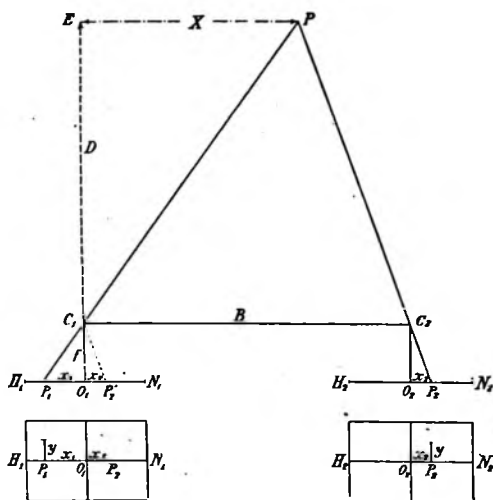


Fig. 256.

$H_2$  las placas fotográficas situadas en un mismo plano vertical,  $B$  la distancia entre los puntos principales  $\rho_1$  y  $\rho_2$ ;  $C_1$  y  $C_2$  los

centros del objetivo y  $f$  la distancia focal. Para un punto  $P$  del terreno, tendremos las imágenes proyectadas sobre la línea del horizonte,  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente en cada placa; sean  $x_1$  y  $x_2$  las distancias horizontales, medidas en la misma, al punto principal; de la semejanza de los triángulos formados, se tiene

$$D = \frac{B f}{x_1 - x_2}; \quad X = \frac{D x_1}{f}$$

midiendo la distancia a la línea del horizonte  $y$ , la pendiente es  $\tan \alpha = \frac{y}{f}$  y la cota del punto  $Y = D \frac{y}{f}$ .

La dificultad está en colocar las dos placas en el mismo plano vertical, sin mayor diferencia que algunos segundos, esta cuestión es la que resuelven los detalles con que se construyen los instrumentos fotográficos destinados a estas operaciones.

Para medir exactamente las coordenadas  $x$ ,  $y$ , en las placas fotográficas se colocan estas en un aparato al que su autor el doctor Pulfrich dió el nombre de comparador y cuyo principio se expone a continuación.

Un marco  $K$ , provisto de dos punteros  $m_1$  y  $m_2$  (fig. 257), montados sobre una varilla  $w$  está sobrepuesto a la vista estereoscópica.

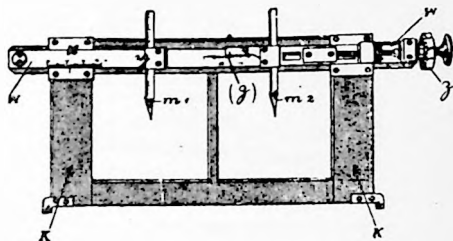


Fig. 257.

Llevado el índice  $m_1$ , sobre un punto de la placa izquierda, en los nonios  $x$  e  $y$  se tendrán las coordenadas  $x_1$  e  $y_1$  de cualquier punto de esa placa; después por medio del tornillo micrométrico  $z$  se lleva el índice  $m_2$  al punto idéntico de la

placa derecha, con la medida de las vueltas del tornillo se obtendrá la diferencia de coordenadas ( $x_1 - x_2$ ) es decir la paralaje estereoscópica.

Estas tres lecturas son suficiente para obtener los elementos necesarios para calcular D, X e Y y hacer la situación del punto en el plano respectivo.

El doctor Pulfrich perfeccionó su primer modelo y la (fig. 258) indica uno de estos aparatos perfeccionados.

M es un microscopio binocular con el que se observa las vistas  $V_1$  y  $V_2$ , cada ocular lleva en el centro una señal índice que sirve para bisectar los puntos de la placa, estas están sostenidas en el marco que es movable y conectado a las escalas, los índices quedan fijos.

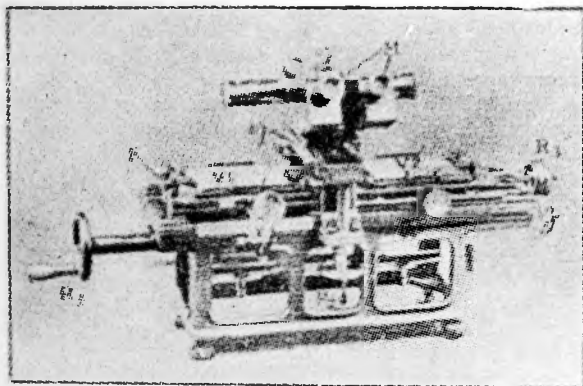


Fig. 258.

Con las ruedas  $R_1$  y  $R_2$  se mueve el marco K en sentido horizontal y vertical hasta que un punto de la vista izquierda  $V_1$  quede cubierto con el índice del ocular izquierdo; en las escalas  $x$  e  $y$  se leen la abscisa y ordenada del punto elegido de la placa izquierda. Con la rueda  $R_3$  se mueve horizontalmente la placa derecha, desplazamiento que medido en la escala  $z$  da la diferencia de abscisa ( $x_1 - x_2$ ).

El trabajo del estereocomparador no permite el aprovechamiento completo de la vista estereoscópica porque sacando de ellas las coordenadas de un gran número de puntos no se tendrá una representación tan fiel como la que se obtendría de una representación gráfica obtenida en conexión con el recorrido de los puntos de la vista por los índices; se debe al Capitán von Orel la solución de este problema mediante el estereoautógrafo Orel.

En el estereoautógrafo mediante el movimiento simultáneo de las tres ruedas  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  se desliza una marca sobre el terreno, esa marca transmite mecánicamente sus desplazamientos a un lápiz que dibuja la proyección de su recorrido. La dificultad para cumplir este trabajo es que  $(x_1 - x_2)$  es casi siempre de un valor pequeño con relación a la distancia focal del fototeodolito y lo que daría intersecciones muy agudas, esto fué subsanado por von Orel transformando la ecuación.

$$D = \frac{B \times f}{x_1 - x_2}$$

en la idéntica

$$D = \frac{B \ m \times \frac{f}{m}}{x_1 - x_2}$$

Con esta transformación se acortó la distancia  $f$  en la relación  $1/m$  y se alargó la base  $B$  a representar en la escala del plano en la misma relación  $m$ .

El estereoautógrafo es un estereocomparador igual a la fig. 258 en el que faltan las tres escalas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . A las tres ruedas  $R$  corresponden tres reglas sobre las que van montadas otras dos articuladas, la combinación de estos movimientos acciona el lápiz que hace el plano que se quiere dibujar, según la forma como se trabaja con el aparato se tendrá las curvas de nivel del terreno o la proyección del mismo sobre un plano horizontal.

Después que Orel construyó su aparato, han sido contruidos otros más perfeccionados, entre ellos el del doctor Pulfrich.

Ultimamente se ha construido un aparato que dá toda la

exactitud requerida para un plano topográfico en el Instituto Geográfico Militar bajo la dirección del Ingeniero José Limeses.

**244. Empleo de la fotogrametría en la hidrografía.**—Últimamente se ha tratado mucho emplear el método fotogramétrico en los levantamientos de costas, los resultados obtenidos no justifican su uso dentro de la tolerancia que se permite en la precisión de los trabajos hidrográficos.

Solo en reconocimientos de costas, cuando se quiere situar aproximadamente ciertos detalles interesantes desde el punto de vista militar o de la navegación puede ser útil su empleo, porque desde a bordo puede conseguirse elementos para el plano que no podrían obtenerse en tierra.

La principal aplicación de la fotogrametría a la hidrografía es en las vistas y descripción de las costas, pasos y semáforos para completar las cartas marinas y derroteros. Estas vistas deben servir para que el navegante al acercarse a una costa la reconozca con más facilidad; los puntos notables de la misma deben estar marcados en la vista y también indicado su azimut tomado desde a bordo, en el punto que se tomó la vista. Este punto también debe estar marcado en la carta para que el navegante al acercarse a la costa se coloque en sus inmediaciones y ella se le presente en la forma dibujada en la vista.

No usando la fotogrametría, para obtener esta vista es necesario hacer un croquis, lo más aproximado posible, con el buque parado; con un sextante se miden los ángulos entre los puntos notables y además se toma el azimut de uno de ellos para que todas las direcciones queden orientadas; luego con una escala arbitraria y el croquis se reconstruye la vista. Esto no resulta muy exacto por cuanto por el viento o la corriente el buque no queda parado y hay errores en la medida de los ángulos; la fotogrametría presenta la ventaja de obtener vistas instantáneas cuya precisión es suficiente para el resultado propuesto.

El método a emplearse puede ser uno de los siguientes:

1) Si solo quiere obtenerse una vista para reconocer la costa, desde un punto del mar donde se sitúa el buque con los métodos de navegación costanera se saca una fotografía con un fototeodolito o con un cilindrografo, luego se deducen los án-



gulos planimétricos entre todos los puntos notables, debiéndose haber medido el azimut de uno de ellos.

2) Si se quiere situar en la carta puntos notables en tierra y completar la topografía, desde las posiciones A y B donde se sitúa el buque se sacan las fotografías, para orientarlas se mide el azimut, desde ambas estaciones, que tiene un punto común de las dos fotografías.

3) Si se emplea la estereofotogrametría se instalan a bordo sobre una base lo más larga posible los dos aparatos fotográficos de manera que sus placas queden en el mismo plano vertical, se toman las fotografías de la costa simultáneamente situando el buque y determinando la orientación del mismo, para orientar la base. En otros casos se tienen en tierra dos puntos situados y orientados exactamente, entonces mediante las fotografías se deduce la situación y orientación de la base.

Las aplicaciones (2) y (3) solo son factibles en parajes de costas montañosas o altas, cuando se trabaja muy cerca de ellas, en canales y bahías chicas.

**245. Aereofotogrametría.**—La aplicación de la fotogrametría tomando las vistas con el eje óptico de la cámara fotográfica fuera de la horizontal fué sugerida para la solución del problema topográfico cuando el terreno es muy poco accidentado ó demasiado quebrado para que desde un punto cualquiera del del mismo pueda abarcarse una zona extensa.

Por su rapidéz este método fué principalmente empleado durante la guerra para perfeccionar las cartas existentes de las zonas donde se combatía; es decir, se empleó en el *perfeccionamiento de cartas existentes* de escala reducida 1:100.000 y 1:20.000. El nuevo problema que se trata de resolver es el levantamiento de *cartas nuevas* obteniendo de la aereofotogrametría todos los elementos para su construcción sin que haya que hacer operaciones previas de triangulación ó poligonación.

Las operaciones para colocar en el plano los puntos de la fotografía es lo que se constituye la *restitución* y los métodos empleados para ello caracteriza el desarrollo de la fotogrametría en 3 facces por algunos de los métodos siguientes:

1) La de la restitución geométrica.

2) La de la fotorestitución.

3) La de la restitución estereomecánica.

*La restitución geométrica* se basa en la propiedad geométrica de los haces armónicos considerando la posición relativa de la fotografía del terreno con la superficie terrestre que representa, está supuesta en un plano horizontal; esta operación es posible cuando pueden distinguirse en la fotografía cuatro puntos situados en el plano mediante un trabajo topográfico previo.

Con los cuatro puntos individualizados en la placa y situados en el terreno pueden trazarse dos figuras correlativas; haciendo cuadrículas ó haces de rectas prolongando dos de sus lados convergentes y utilizando la intersección de los diagonales, ó mediante la aplicación gráfica de los principios de los haces armónicos tomando como vértice del haz uno de los puntos conocidos; todos los puntos detallados en la fotografía se transportarán al plano de acuerdo con la posición relativa en ambas cuadrículas.

Disponiendo de cuatro puntos en la placa fotográfica y en el plano no se tiene en cuenta la posición del aparato fotográfico ni de sus ejes, tampoco es necesario conocer su distancia focal; cuando solo se dispone de tres puntos, para reducir el problema al caso anterior, es necesario determinar sobre el plano la intersección de la prolongación del eje óptico del objetivo para lo que debe emplearse la distancia focal conocida. La resolución de este problema se efectúa por el cálculo o por los métodos de la geometría descriptiva o por construcción estereométrica empleando para ello cartulina y alambres.

*La fotorestitución* fue empleada principalmente en la reconstrucción aereotopográfica de guerra, ella permite transportar con rapidéz el contenido de la fotografía al plano por medio de un aparato de proyección especial con el que puede proyectarse la fotografía aérea sobre una pantalla que se ajusta para obtener que la proyección forme una figura análoga á la del plano colocado en la misma pantalla, ésta puede cubrirse con papel sensible y en este caso se obtiene una nueva fotografía corregida o la pantalla puede ser un vidrio despolido y en este caso se dibuja la proyección de la placa.

*La restitución estereomecánica* es la faz actual de la aereo-

fotogrametría y ella tiende a alcanzar la verdadera y completa restitución topográfica mediante un sistema mecánico, resolviendo este problema en toda su amplitud mediante la aplicación a la fotografía aérea del principio de restitución esteoscópica ya aplicando al estereoaquígrafo de Orel. Por ahora no se ha encontrado un sistema que permita obtener los pares de fotografías aéreas que satisfagan a las condiciones que se hacen para el levantamiento estereofotogramétrico, se han hecho algunos ensayos para resolver este problema y es de esperar que se llegará a una solución conveniente basada en la referencia a puntos del terreno previamente determinados, esto es en otros términos, que se necesita una triangulación previa.

Con los métodos de restitución estereomecánica se ha buscado también una solución que permita prescindir del desarrollo previo de una triangulación, sustituyendo esta con una triangulación aérea, con la que el problema aereofotogramétrico se simplificaría mucho alcanzando un máximo de rendimiento en sus aplicaciones militares e industriales: pero, los métodos aereofotogramétricos que tienen aplicación práctica efectiva tienen necesidad de una triangulación previa del terreno la que provee los elementos que sirven de base a la restitución permitiendo establecer la posición del punto de vista y la orientación de la placa en el espacio y recurriendo a los principios estereofotogramétricos oportunamente adaptados se podrá seguir un procedimiento análogo al usado con las vistas tomadas en tierra de manera de obtener automáticamente una verdadera restitución topográfica aérea.

Cualesquiera que sea el procedimiento de restitución empleado, él se basa en la obtención de la proyección de las coordenadas de los puntos de la placa sobre el plano horizontal y vertical que pasó por el punto de vista. Una fotografía queda perfectamente caracterizada cuando se conoce: el *ángulo de inclinación* de la placa, que es igual al ángulo formado por el eje óptico del objetivo con su proyección sobre el plano horizontal y el *ángulo de rotación* que es aquel que debe girar la recta que une las marcas laterales de la placa alrededor del punto principal, esto es del eje óptico, para que aquella recta sea paralela al horizonte de la placa; además, debe conocerse

el *ángulo de orientación*, esto es la dirección azimutal del plano que contiene el eje óptico; con estos elementos se calculan todas las incógnitas de una vista fotográfica: coordenadas planas, situación del punto de vista, ángulo de dirección y elevación, etc.

Los ángulos, horizontal y vertical, pueden calcularse mediante las coordenadas de cada punto medidas con un compás en la placa, una simplificación de este trabajo fueron los diagramas gráficos o método de las isopentas difundido por Hegershoff y que consiste en el uso de abacos sobre los cuales se leen inmediatamente los ángulos verticales y horizontales por medio de una regla o por interpolación en tablas preparadas previamente.

Luego se perfeccionaron los fotogoniómetros que consisten en un teodolito con una cámara fotográfica provista de un objetivo igual al usado para tomar la fotografía en la cámara. Se coloca la placa a una distancia del objetivo igual a la que la imagen tenía, cuando se tomó la fotografía. A la cámara se le puede dar la inclinación que tenía cuando se tomó la fotografía y al porta placa una rotación igual al ángulo de rotación que tiene en el mismo instante.

Habiéndose dado a la placa la inclinación y rotación que tenía al tomarse las fotografías, los rayos que parten de un punto de la misma harán el mismo recorrido, pero en sentido inverso, que hicieron cuando partiendo del terreno impresionaron la placa y podrá medirse para cualquier punto en la misma el ángulo horizontal y vertical tal como puede medirse dichos ángulos en el terreno con lo que se podrá determinar sus coordenadas y altura sea por el cálculo o el dibujo.

Para obtener la orientación de la placa y la posición del punto de vista se han usado niveles de mercurio, indicadores pendulares e instrumentos basados en sistemas giroscópicos, pero con ellos no se ha alcanzado la precisión requerida; los métodos que principalmente se usan para hallar estos elementos son los siguientes:

En el procedimiento Fisher se considera nulo el ángulo de rotación, con un valor aproximado de la inclinación obtenida

con un nivel de mercurio, se determina con el fotogoniómetro los ángulos horizontales y verticales de puntos situados en el terreno; con estos elementos se obtiene los valores aproximados de una primera corrección por inclinación y orientación, se repite la operación hasta obtener la precisión que se desea. El método del doctor Pulfrich se basa en el de Fisher y parte del principio de que aquellas correcciones deben solo considerarse para la determinación de los ángulos horizontales y verticales y tiende a obtener estos valores exactamente mediante el cálculo haciendo con el fotogoniómetro una sola observación al principio.

El método del profesor Hugershoff se basa en la determinación de las coordenadas del punto de vista por la resolución de una pirámide cuyo vértice es el mismo punto de vista y cuya base la constituyen tres puntos conocidos del terreno; la resolución de este problema en el espacio ha sido tratado por Finsterwalder, Wermiker y Hugershoff en forma gráfica, numérica, gráfico-numérica y con el sistema óptico-mecánico, solo nos ocuparemos brevemente de este último por tener aplicación en la restitución automática que será la única forma de empleo práctico de la aerofotogrametría.

En el procedimiento óptico-mecánico de Hugershoff se pone el anteojo fotogoniométrico en el ángulo vertical que corresponde a un punto fijado, después de haber inclinado el portaplaca en una cantidad aproximadamente igual al ángulo de inclinación que tenía la cámara fotográfica en el instante que se obtuvo la fotografía. Luego se hace girar la placa alrededor del eje vertical del fotogoniómetro hasta que el punto que se considera entre el campo visual del anteojo, la corrección se hace variando en parte la inclinación de la placa y en parte el ángulo de rotación de la misma hasta que el punto quede bien colimado con el centro de los hilos del retículo del anteojo. Se repite la operación con otro punto y volviendo sobre el primero se verifica que se mantenga la colimación.

Si esto no sucede, se corrige alternativamente hasta obtener que ambos puntos queden en el cruce de los hilos del retículo, cuando al anteojo se le dá el ángulo vertical que a cada uno corresponde, entonces la placa estará perfectamente orientada

en el espacio y como control podrá establecerse la colimación de un tercer punto, en estas condiciones se obtiene directamente del fotogoniómetro el ángulo de inclinación y rotación de la placa.

Con las coordenadas planas del punto de vista y la de los puntos fijos se tendrá el valor azimutal de la orientación con que se sacó la fotografía sirviéndose de los ángulos horizontales formado por las líneas que unen la proyección del punto de vista con las proyecciones de los puntos conocidos.

Los métodos de restitución expuestos y en los que en la combinación del cálculo gráfico o numérico con el empleo del fotogoniómetro se obtiene los elementos para la construcción del plano son largos y por esta razón han sido abandonados, como lo fué en la fotogrametría terrestre los métodos de intersección, para ser reemplazados por el método aereoestereo-fotogramétrico. Hugershoff aprovechó dos fotografías tomadas sucesivamente durante el vuelo y en las cuales una parte del terreno es común a los dos; después de hallar los elementos de orientación para cada una se colocan en dos fotogoniómetros en la posición que se encontraban al tomar las fotografías y se observa las imágenes con un telemetro estereoscópico, por medio de un índice que se encuentra en el microscopio binocular del telemetro.

Se puede obtener la colimación de un punto conocido del terreno girando los fotogoniómetros alrededor de su eje vertical y los reflectores externos del telemetro alrededor de un eje horizontal. Si el movimiento de los fotogoniómetros para la colimación de un mismo punto se trasmite a un sistema mecánico se podrá realizar una restitución análoga a la del estereo-autógrafo Orel aunque las fotografías estén inclinadas, sin que tengan sus ejes paralelos y sin que las placas esten en el mismo plano vertical.

Los procedimientos y aparatos mencionados suponen que en cada placa haya por lo menos tres puntos apropiados, cuyas coordenadas y altura deben ser conocidas, para la resolución del problema de la carta en el espacio, y dado que cada placa refleja únicamente pocos kilómetros cuadrados de superficie, esto significa que los puntos fijados en el terreno deben estar

determinados en considerable densidad lo que no es un inconveniente para los países donde se quiere aprovechar la aereo-fotogrametría para poner al día la cartografía completándola cuando ya se dispone de muchos puntos determinados; pero si debe hacerse previamente una triangulación y poligonación completa antes de iniciar los levantamientos aéreos se perderá la ventaja principal que es la rapidez de este método.

Actualmente se ensayan procedimientos con lo que se pretende resolver la triangulación aereofotogramétrica con lo que se tendría un método completo para el levantamiento de costas de regiones que no han sido previamente relevadas.

**246. Empleo de la aereofotogrametría en la hidrografía.**— La aereofotogrametría ha sido ensayada en los trabajos hidrográficos para determinar la línea de costa y sus bancos y situar los bajofondos que han escapado a los medios ordinarios de investigación.

Las fotografías se toman en fajas paralelas a la costa, la primera de manera que comprenda casi igualmente una parte de tierra y otra del mar, las siguientes sobre el agua en fajas paralelas y de manera que cada una de ellas abarque la mitad de la parte del mar que tiene la consecutiva más próxima a la costa. Si es necesario se toman fotografías en fajas normales a la línea de la costa cerca de las puntas o donde zonas de pequeña profundidad penetran en el mar.

Para la restitución de las fotografías de la costa se usaran los métodos usados de la aereofotogrametría y para el mar se usará el método de prolongación fotográfica que consiste en situar cuatro puntos característicos del fondo o la superficie del mar, en la fotografía de la faja N.º 1 que abarca parte de la costa con puntos conocidos, con esos cuatro puntos que son comunes con la fotografía de la faja N.º 2 consecutiva se situarán otros cuatro puntos de éstas y así sucesivamente.

Las condiciones meteorológicas favorables para obtener fotografías destinadas al estudio de los fondos marinos son aquellos en que el mar está en calma y en días de sol, esté con una altura 41° a 55°; un viento aun débil produce una marejadilla que impide la formación de la imagen del fondo.

Con aguas transparentes es posible obtener la fotografía del

fondo del mar pero con aguas turbias que tienen en suspensión arena o fango habrá que utilizar las particularidades de la imagen de la superficie del mar y descubrir las variaciones de profundidad por las corrientes y remolinos que producen los bajo fondos y que son registrados en las fotografías, en esta forma se han descubierto bajo fondos que estaban 7 m. debajo del plano de reducción y en 10 a 15 m. de profundidad; las horas convenientes para estas fotografías corresponden generalmente al principio de la creciente o al final de la bajante, en el instante del máximo de corriente ésta se generaliza demasiado para que se pueda obtener del registro de los remolinos indicaciones netas de las profundidades.

En las fotografías de la costa sacadas en baja mar puede determinarse hasta donde descubre el mar, las rocas que velan y la línea de pleamares caracterizada por la línea mas alta de rezagos del mar.

De las fotografías de los fondos marinos puede obtenerse indicaciones sobre su naturaleza por su distinta coloración, las partes claras corresponden a arena, pedregullo y conchilla y las oscuras a fondos de roca, éstas últimas aparecen como manchas, la parte más oscura corresponde a la cúspide de la roca y algunas fotografías muestran de una manera notable que la disminución de la oscuridad de la mancha corresponde al aumento progresivo de la profundidad.

No todas las manchas oscuras significan la existencia de bajo fondos, es necesario comprobarlo pues en las placas aparecen manchas debidas a defectos de las mismas.

En las experiencias hechas por Volmat se ha distinguido nitidamente el fondo hasta 17 m. de profundidad debajo del plano de reducción de sondajes, en fotografías tomadas en buenas condiciones de iluminación y con mar en calma.

El empleo de la fotografía aérea para un levantamiento de la costa o los fondos marinos no tiene un valor práctico apreciable pero será muy útil como medio auxiliar para efectuar un reconocimiento, sobre todo en los sitios donde haya islotes, piedras que velan, etc; en realidad las fotografías proveen una representación de la coloración del fondo y no la profundidad y su principal aplicación consistirá en descubrir los bajo fondos que no han sido encontrados con la sonda, las manchas que se presentan en la fotografía será una excelente guía para la busca de rocas.

---



## CAPITULO XXI.

### OBSERVACIONES ASTRONÓMICAS

**247. Generalidades.**—Para las necesidades de la Hidrografía es imprescindible determinar por observaciones absolutas las coordenadas geográficas de un vértice de la triangulación y el azimut de uno de los lados de la misma. Las coordenadas de los demás vértices y azimutes de los demás lados se obtienen con las fórmulas establecidas con el Cap. XVI.

El instrumentó con que se observa debe ser cuidadosamente verificado, si se trata de un teodolito debe determinarse el valor angular de las divisiones de sus niveles para hacer las correcciones correspondientes por el error de verticalidad del eje principal.

Además, los teodolitos deben instalarse sobre un pilar de mampostería suficientemente enterrado para que sea estable y conviene que esté aislado del piso donde se mueve el observador.

Cuando interviene la altura de los astros suele emplearse el sextante en su medida, se necesitan entonces dos observadores, uno que tome la altura con el sextante en el horizonte artificial y otro que simultáneamente con la observación de aquella, vise al astro con el antejo de un teodolito, para obtener el ángulo que forma esa visual con una dirección en el terreno determinada por el punto de estación y una mira.

#### AZIMUT

**248.**—Si conocemos la dirección de la línea meridiana en uno de los vértices de la triangulación, midiendo el ángulo horizontal entre esa línea y uno de los lados de la triangulación convergente en ese vértice, tendremos orientada la red. No

sería práctico tomar como referencia las señales de los vértices de los triángulos, por las dificultades para colimarlas en todas las condiciones de tiempo; se instala cerca del lugar de observación, 500 o 1000 metros, una mira o señal luminosa nocturna, midiéndose con toda exactitud el ángulo formado en el vértice de observación por la dirección de esa mira con la de los vértices de la triangulación, mediante ese ángulo se pasa del azimut de la mira, al azimut de los lados de la red.

Además se determinará el azimut aproximado de la línea pilar-mira  $Ap$  y cuando se tenga que hacer una observación de estrella se calculará el azimut aproximado de esta  $Ae$  para el instante de la observación; si  $Lm$  es la graduación del círculo hori-

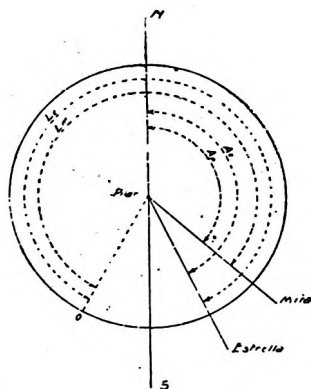


Fig. 259.

zontal correspondiente a la mira,  $L_n$  es la que corresponde al  $N$  verdadero y  $L_e = L_m - Ap + Ae$  es la graduación que corresponde a la posición del anteojo que contiene el plano vertical que pasa por la estrella en el instante de la observación.

Si fijamos el valor de  $L_e$ , por ejemplo queremos que la observación sea hecha de manera que cuando se hace la puntería

a la estrella la lectura del círculo horizontal sea  $0^\circ$ , determinaremos

$$L m = L e - (A e - A p).$$

Fijamos el nonio en la graduación  $L m$  y con el movimiento general del círculo horizontal se bisecta la mira, para el instante de la observación a la estrella corresponde la lectura  $L e$ , en este caso  $0^\circ$ , en el círculo horizontal.

Si también se calcula la distancia zenital aproximada de la estrella para ese instante tendremos la graduación del círculo vertical en la que hay que fijar el anteojo para que la estrella se encuentre en su campo.

Esta operación constituye el calaje de la estrella y al tratar cada método se dará un ejemplo.

Reemplazando  $L m$ ,  $A p$ ,  $A e$  y  $L e$  por sus valores exactos deducidos de la observación,  $L_*$ ,  $A_*$ ,  $A_s$  y  $L_s$  se obtendrá el valor del azimut de la mira

$$A_* = A_s + L_* - L_s$$

**249. Circunstancias que determinan la elección de los astros.**—El cálculo del azimut puede hacerse en función del tiempo o de la distancia zenital de un astro, con las siguientes fórmulas:

$$\cotg A \sin t = \sin \varphi \cos t - \tan \delta \cos \varphi.$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A$$

El error  $dA$ , resultante de los errores  $d\varphi$ ,  $dt$  y  $dz$  es

$$(1) \quad dA = \frac{\cos z \sin A}{\sin z} d\varphi + \frac{\cos p \cos \delta}{\sin z} dt$$

$$dA = \cotg z \sin A d\varphi + \frac{\cos p \cos \delta}{\sin z} dt$$

$$(2) \quad dA = \frac{1}{\sin z \tan p} dz - \frac{\cos t}{\sin z \sin p} d\varphi$$

El examen de estas fórmulas muestra.

1.º La condición favorable para determinar el azimut en fun-

ción del tiempo (1), se presenta observando una estrella circumpolar,  $\delta = 90^\circ$ , en el instante de su máxima elongación cuando el ángulo de posición  $p = 90^\circ$  y que simultáneamente  $A$  sea pequeño y  $z$  grande.

La latitud generalmente es conocida con una exactitud tal que, el término correspondiente a  $d\varphi$  puede despreciarse.

$$y \quad dA = \frac{\cos p \cos \delta}{\sin z} dt$$

que se anula para  $p = 90^\circ$ , en el instante de la elongación del astro.

Para  $\sigma$  Octantis estrella de  $89^\circ 12'$  de declinación sur y para latitudes de  $30$  a  $55^\circ$ , considerando  $\cos p = 1$  que es su máximo valor

$$dA_{30} = 0,016 dt \quad , \quad dA_{55} = 0,025 dt$$

1<sup>a</sup> de error en el tiempo dará

$$dA_{30} = 0'' 22 \quad , \quad dA_{55} = 0'' 37$$

Para el sol, considerando el valor medio de la declinación  $\delta = 0^\circ$  para  $z$  el caso más favorable en que  $z = 90^\circ$  y cuando resulta  $p = 90^\circ - \varphi$  suponiendo

$$\varphi = 45^\circ \quad y \quad dt = 1^s$$

$$dA = 10''.$$

Por esta causa las observaciones de sol no se prestan para la orientación de una red topográfica.

2.<sup>o</sup> La condición favorable para la determinación del azimut en función de la altura (2) se presenta también cuando  $p = 90^\circ$ , es decir en la elongación:

Para los astros que no son circumpolares, tang  $p$  es máximo para  $A = 90^\circ$ , cuando el astro está en el vertical primario.

En la práctica, por razones de exactitud y facilidad de observación la determinación del azimut siempre se efectúa en función de tiempo.

**250. Método de alturas correspondientes.**— Este método consiste en visar un astro en sus dos posiciones  $A$  y  $B$

(fig. 260) simétricas al plano meridiano  $ZO$ ; para estas dos posiciones sabemos que las alturas son iguales.

Se instala el teodolito en un punto despejado y una vez perfectamente rectificado, se visa el punto elegido como señal, leyendo la lectura correspondiente  $\theta_0$  del círculo horizontal; gírese en seguida el círculo alidada de modo a tener el astro en el campo del anteojo, y llevándolo por los tornillos de coincidencia a la colimación del astro por el cruce de los hilos del retículo, léase sobre el círculo horizontal la graduación  $\theta_1$  correspondiente.

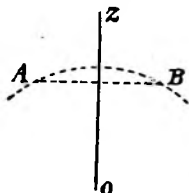


Fig. 260.

Unos minutos antes de la hora en que la estrella, después de haber culminado por el meridiano, ocupará la posición simétrica A, se rectifica la nivelación del instrumento si fuere necesario y moviendo el círculo alidada, se dirige el anteojo en la dirección del astro, *sin alterar su inclinación*. Con ayuda del tornillo de coincidencia del círculo alidada, se sigue el movimiento de la estrella colimada con el hilo vertical, hasta el momento en que ella lo esté nuevamente en el cruce de los hilos; en este instante la altura de la estrella siendo exactamente la misma que en el momento de la primera observación, la estrella ocupa la posición simétrica respecto al meridiano que sobre el círculo corresponde a una lectura  $\theta_2$ . Si el anteojo hubiera podido apuntarse directamente sobre el meridiano, la lectura correspondiente hubiera sido  $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  y por lo tanto el azimut verdadero  $\theta$  que corresponde a la dirección de la señal de referencia, será

$$\theta = \theta_0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

Para asegurarse de que durante el transcurso de las operaciones el círculo horizontal se ha mantenido en una posición invariable, después de la segunda observación del astro, efectúase una nueva colimación de la señal que nos debe proporcionar una lectura igual a la primera  $\theta_0$ . Si se obtuviera una lectura  $\theta'_0$ , será necesario corregir el ángulo  $\theta_2$  por la

divergencia  $\theta_0 - \theta'_0$ , es decir, habrá que substituir  $\theta_2$  por  $\theta_2 + (\theta_0 - \theta'_0)$ .

Las observaciones antedichas, se suponen efectuadas con teodolito central; con un excéntrico deberíamos proceder según el método de dobles visuales, debiendo en este caso en la primera observación, anotar las lecturas azimutal  $\theta_1$  y zenital  $Z_1$  que corresponden a la visual anteojo a la derecha y las  $\theta'_1, Z'_1$  anteojo a la izquierda. En la 1.ª visual de la segunda observación se lee el ángulo azimutal  $\theta'_2$  correspondiente a la segunda distancia zenital  $Z'_1$  del anteojo que habrá permanecido invariable, y en la 2.ª visual después de haber fijado el anteojo marcando una distancia zenital  $Z'_1$ , se observa el ángulo azimutal  $\theta_2$  que al astro corresponde. El ángulo que dará la dirección meridiana es evidentemente

$$\frac{\theta_1 + \theta'_1 + \theta'_2 + \theta_2}{4}$$

Si el astro que se observa es el sol, es necesario tener en cuenta su variación en la declinación en el intervalo  $T' - T$  entre las dos observaciones. Siendo  $A'$  y  $A$ , en valor absoluto, el azimut del sol en la observación al E y W respectivamente;  $\delta$  la declinación a medio día verdadero y  $\Delta \delta$  la variación de la declinación entre la primera y segunda observación;

$$(\delta - \frac{1}{2} \Delta \delta) \quad \text{y} \quad (\delta + \frac{1}{2} \Delta \delta)$$

son los valores de la declinación para la 1.ª y 2.ª observación; tendremos

$$\sin(\delta - \frac{1}{2} \Delta \delta) = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A'$$

$$\sin(\delta + \frac{1}{2} \Delta \delta) = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A$$

y restándolos

$$2 \cos \delta \sin \frac{1}{2} \Delta \delta = 2 \cos \varphi \cos h \sin \frac{1}{2} (A + A') \sin \frac{1}{2} (A - A')$$

por ser pequeño  $\Delta \delta$  así como  $(A' - A)$  en valor absoluto, puede reemplazarse el seno del arco multiplicado por  $\sin 1''$  y se tendrá

$$A' - A = \frac{\Delta \delta \cos \varepsilon}{\cos \varphi \cos h \sin A}$$

siendo

$$\frac{\cos \delta}{\sin A} = \frac{\cos h}{\sin t}$$

$$A' - A = \frac{\Delta \delta}{\cos \varphi \sin t}$$

como valor de  $t$  se toma la mitad de la diferencia entre los tops correspondientes a cada observación:  $t = \frac{1}{2} (T' - T)$  y

$$A' - A = \frac{\Delta \delta}{\cos \varphi \sin \frac{1}{2} (T' - T)} \equiv 2 C$$

Si  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las lecturas azimutales correspondientes a cada observación, las lecturas correspondientes a los azimutes iguales serían

$$\theta_1 \text{ y } \theta_2 \pm (A' - A)$$

y la lectura correspondiente al meridiano es el promedio

$$\frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \pm \frac{1}{2} (A' - A) = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \pm C$$

donde

$$C = \pm \frac{\Delta \delta}{2 \cos \varphi \sin \frac{1}{2} (T' - T)}$$

Se considera el signo + cuando la dirección del limbo crece de izquierda a derecha y el signo — cuando es al contrario.

Si bien es cierto que este método es independiente del tiempo y de la altura del astro, siempre convendrá la elección de estrellas circumpolares por ser mayor la variación de su azimut, lo que exige menos intervalo entre la observación al E y O, por lo tanto, mayor probabilidad de que la variación de las condiciones atmosféricas no malogren la observación.

Conviene hacer el programa de observación, para lo cual es

suficiente calcular la hora aproximada del paso por el meridiano.

$$H_s \text{ del paso} = \alpha_*$$

$$H_m \text{ del paso} = \alpha_* - \alpha \odot$$

251. *Ejemplo.*—La noche del 25 de Julio, en latitud  $40^\circ S$  se quiere observar correspondientes de estrellas que culminen desde 11h a 13h.

$$\alpha \odot_m \text{ el 25 de Julio} = 8h 09^m$$

$$H_m \text{ del paso} = 11h \text{ a } 13h = \alpha_* - \alpha \odot_m$$

$$\alpha_* = (11 \text{ a } 13) + 8h 09^m = 19h 09^m \text{ a } 21h 09^m.$$

De las efemérides sacamos las estrellas circumpolares que tengan la ascensión recta calculada.

	$\alpha$	$\delta$
B A C . 6632	19h 20 <sup>m</sup>	54° 29' S
$\alpha$ Octantis	19 22	89 15
Lacaille 8094	19 40	81 24
$\iota$ Sagitario	19 49	42 05
$\gamma$ Pavonis	20 00	66 24
$\alpha$ Pavonis	20 18	57 00
$\beta$ Pavonis	20 37	66 30

Con el objeto de tener la estrella en el campo del antejo, para no equivocarla en la observación, conviene calcular su altura y azimut aproximado en el instante de la observación.

La hora del paso de  $\iota$  Sagitario es

$$19h 49^m - 8h 09^m = 11h 40^m$$

si la observamos al E a 9h, su horario  $t = 11h 40^m - 9h = 2h 40^m$ , calculamos  $h$  con la fórmula

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \cos \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

obtenemos  $h_v$  que corregida por refracción nos da la altura aparente  $h_a$  que tendrá la estrella en el momento de la observación. Luego calculamos el azimut

$$\text{sen } A = \frac{\cos \delta}{\cos h} \text{sen } t.$$

Conocido el azimut aproximado  $A$  del astro, si el de la mira, también aproximado es  $A_m$ ; el ángulo que en el instante de la observación hará el plano vertical del astro con el plano vertical de la mira será  $A_m - A = B$  y la lectura correspondiente en el círculo azimutal para que el antejo esté en el plano vertical que pasa por el astro, siendo  $I_m$  la que corresponde a la mira, será  $I = I_m \pm B$ .

Procediendo análogamente para cada estrella haremos una planilla donde estén anotadas, la hora  $t$ , la altura  $h$  y la lectura del círculo azimutal  $I$  correspondiente a cada observación.



Las lecturas del círculo vertical deben hacerse con un solo nonio, poniendo su índice en una graduación entera del limbo para esperar el instante de la observación, esa lectura no es la medida del ángulo zenital, pues está afectada de todos los errores instrumentales, pero hay que tener en cuenta que, no interesa su valor absoluto sino que el anteojo esté en la misma posición cuando se observa el astro al E y O.

**252. Observaciones extrameridianas.** — Entendemos por extrameridiana la observación de un astro en un momento dado anotando su dirección angular horizontal y zenital, el azimut se calcula para el momento de la observación del astro con los siguientes elementos conocidos: la latitud del lugar  $\varphi$ , la declinación  $\delta$  y los observados; 1.º, la altura verdadera  $h$  del astro, es decir, la observada corregida por refracción y paralaje; en este caso se emplea la fórmula

$$\cos A = \operatorname{tg} h \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{sen} \delta \sec h \sec \varphi.$$

2.º, con el horario  $t$  del astro en el momento de la observación; este método es preferible por dar mayor precisión (249). El horario se obtiene de la hora sidérea o media local dada por un cronómetro.

*Observación del Sol.* — Empleando este astro es necesario reducir las observaciones hechas sobre los bordes al centro; cuando se utiliza la altura habrá que corregir esta por el semidiámetro o hacer la observación como se indicó en (86) para eliminar esta corrección.

La reducción al centro de las observaciones azimutales puede eliminarse como se indicó en (80) y (86) por doble visual o emplear la siguiente corrección.

Sea  $ZCE$  el triángulo esférico cuyo vértice son el zenit  $Z$ , el centro del sol  $C$  y el arco tangente  $ZE$  a uno de los bordes; la corrección azimutal por el semidiámetro  $Q$  será el ángulo  $z$ .

De la figura se obtiene:

$$\operatorname{tg} Q = \operatorname{sen} (90 - h') \operatorname{tg} z,$$

y por ser  $z$  y  $Q$  pequeños

$$z = Q \sec h'.$$

El valor de la corrección es  $\pm Q \operatorname{sen} h'$  correspondiendo el



Fig. 261.

signo + o — según el borde observado y el sentido de la graduación del círculo.

*Observación de estrellas.*  $\sigma$  Octantis. — Debe elegirse estrellas circunpolares y entre ellas para nuestro hemisferio conviene  $\sigma$  Octantis; estrella de magnitud 5.5 y  $81^{\circ} 12'$  de declinación sur, deduciendo el azimut por observación del tiempo desde que un error en este elemento tiene muy poca influencia sobre el azimut (249).

El empleo de esta estrella presenta la ventaja de que en una noche de observación puede hacerse una serie completa de 3 observaciones en círculo  $0^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$  y  $120^{\circ}$  y cada observación con anteojo derecha e izquierda para eliminar el error de colimación y excentricidad.

El método de trabajo que ha continuación se expone es aplicable a la observación de cualquier astro y las correcciones que por inclinación del eje principal debe hacerse a las lecturas azimutales (63) también deben aplicarse en cualquier otro método de observación.

1.º *Calaje de la estrella.* — El horario aproximado  $t$  para la hora local  $H_m^I$  en que se observará, se obtiene hallando la  $H_s^I$  que corresponde a la  $H_m^I$  con la fórmula  $t = H_s^I - \alpha_*$ . La  $H_s^I$  se obtiene de un cronómetro que da la  $H_m^I$  aplicándole la longitud del lugar  $w$ .

El azimut y distancia zenital se calcularán con las fórmulas que dan su valor en función de  $\varphi$ ,  $\delta$  y  $t$ .

Tratándose de  $\sigma$  Octantis se empleará la siguiente tabla gráfica. La distancia zenital es igual a  $90^{\circ} - \varphi +$  corrección en valor absoluto (la da la tabla *a*) que se saca en función del horario aproximado.

El azimut  $A_e$  se obtiene de la tabla *b* con el horario y la latitud.

2.º *Observación.* — Debe emplearse un buen teodolito cuidadosamente rectificado y dotado de un nivel a caballete sensible con el valor de una graduación bien calculada.

Para cada puntería a la estrella se medirá la inclinación  $Z$  del eje principal con el nivel a caballete, para lo cual se dejará que la burbuja tome su posición de equilibrio haciendo la pri-

mera lectura inmediatamente después de la observación, luego se invierte el nivel y se repite la lectura del mismo después de hacer la lectura de los nonios.

# *Tablas gráficas para el calage de o Octantis*

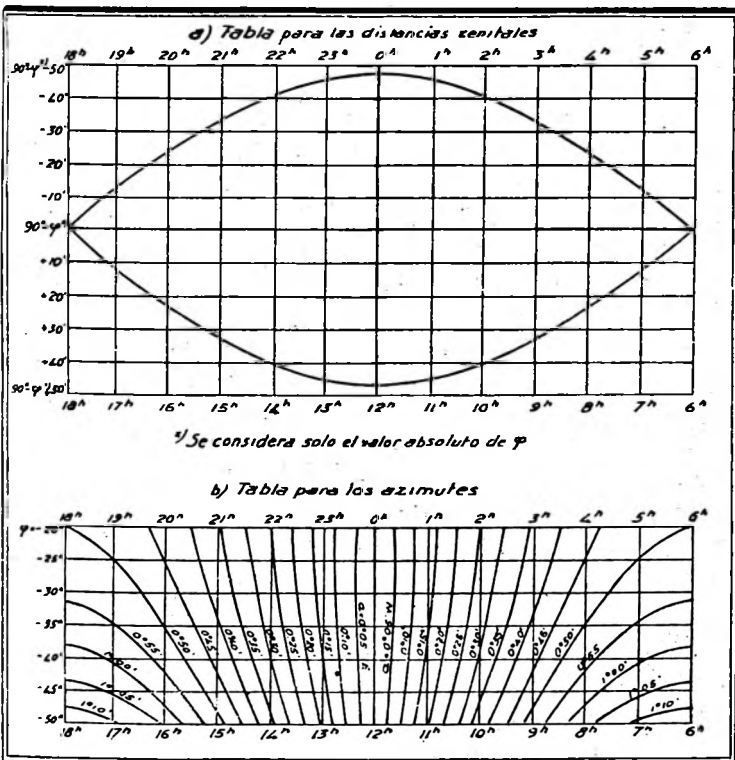


Fig. 262.

El número de punterías al astro será por menos dos : una con anteojo derecha y otra con anteojo izquierda, en el caso de

hacerse mayor número, se harán en número igual con el anteojo en ambas posiciones.

Las lecturas de la mira también se harán en ambas posiciones del anteojo, pero como para la mira  $Z = 90^\circ$ , el error proveniente de la inclinación del eje principal es nulo por lo que no se medirá esa inclinación.

3.º *Cálculos*.—Con la serie de tops  $T$  tomados se calculan los horarios  $t$  correspondientes a cada observación y luego los azimutes  $A$  que corresponde a cada tops.

El azimut de la mira es

$$A_m = A_s + L_m + l \cotg Z - L_s + i \cotg z + 0^\circ 32' \frac{\cos \varphi}{\sin Z}$$

donde el último término es la corrección por *aberración diurna*.

Aplicando esta fórmula a cada una de las observaciones se tendrá un control del azimut en la medida del resultado.

253. *Ejemplo*  $\varphi = 41^\circ 03' 32''$  S. — Septiembre 23/1922.

Se dispone de un reloj arreglado a hora sidérea local. Azimut aproximado Pilar - Mira,  $A_p = 105^\circ 00'$  S W.  $H_s^1$  de la observación 0h 20m.

Horario de la estrella para la hora de la observación.

$$t = H_s^1 - \alpha_s = 0h 20m - 19h 36m = 4h 44m$$

1) *Calaje*. — De las tablas gráficas se obtiene con  $\varphi = 41^\circ$  y  $t = 4h 44m$ :

$$Z = 90^\circ - \varphi + \text{correc} = 48^\circ 57' - 15' = 48^\circ 42'$$

El azimut aproximado de la estrella para esa hora es  $0^\circ 58'$  S W, queriendo que la graduación  $L_e = 121^\circ$  sea la que corresponde a la lectura del círculo horizontal cuando el anteojo está apuntado a la estrella; tendremos.

$$L_m = 121^\circ - (0^\circ 58' - 103^\circ 00') = 225^\circ 02'$$

Fijando un nonio en la graduación  $225^\circ 02'$  y llevando el anteojo a bisectar la mira con el movimiento general del círculo, la graduación  $121^\circ$  corresponderá aproximadamente a la lectura horizontal del anteojo apuntado a la estrella.

2.º *Observación*. — El cuadro siguiente da una serie de observaciones completas y sucesivas indicando las operaciones que deben hacerse.

*Nota*. — La doble observación puede también hacerse en el orden siguiente:

$$A D \left\{ \begin{array}{l} \text{Mira} \\ \text{Estrella} \\ \text{Estrella} \\ \text{Mira} \end{array} \right. \quad A I \left\{ \begin{array}{l} \text{Mira} \\ \text{Estrella} \\ \text{Estrella} \\ \text{Mira} \end{array} \right.$$

En vez de dos punterías seguidas a la estrella y sus correspondientes tops puede hacerse un número mayor. El promedio de las dos lecturas de la mira, hechas con anteojo derecha, se aplica a los azimutes de la estrella observada con anteojo en la misma posición; análogamente se procede con las observaciones con anteojo a la izquierda.

2) Observación.—Círculo en 120°.

	A D	A I
Bisección de la Estrella y Top.	0h 12m 45s . 14	0h 26m 18s . 94
Lectura del nivel.	15.4 — 44.0	45.2 — 16.4
Inversión del nivel.		
Lectura del círculo horizontal.	121° 05' 02" 12 .11 18 17 <u>58</u>	121° 05' 04" 02 02 3.27 28 <u>119</u>
Lectura del nivel.	121° 07' 29" 0	121° 08' 59" 5
Bisección de la mira.	44.7 — 16.0	15.1 — 43.8
Lectura del círculo horizontal.	223° 10' 00" 22 22 29 25 <u>97</u>	223° 05' 04" 08 08 01 03 <u>20</u>
	223° 10' 48" 5	223° 09' 10" 0
Inversión del anteojo.	A I	A D
Bisección de la mira.		
Lectura del círculo horizontal.	223° 05' 04" 09 08 03 05 <u>25</u>	223° 10' 00" 22 25 28 29 <u>104</u>
	223° 09' 12" 5	223° 10' 52" 0
Bisección de la estrella y Top.	0h 25m 20s . 74	0h 37m 38s . 94
Lectura del nivel.	15.2 — 43.9	44.7 — 16.0
Inversión del nivel.		
Lectura del círculo horizontal.	121° 05' 05" 36 24 20 20 <u>90</u>	121° 05' 04" 13 14 21 19 <u>67</u>
Lectura del nivel.	121° 08' 45" 0	121° 09' 53" 5
	45.2 — 11.5	15.5 — 44.1

5) *Corrección por nivel.*—Estando la mira en el horizonte  $Z = 90^\circ$  y la corrección por inclinación del eje principal es nula.

Para corregir cada una de las observaciones de la estrella tomaremos un mismo valor para la distancia zenital  $Z = 48^\circ 09$ ,  $\cotg Z = 0.895$ .

En el nivel empleado, una graduación del mismo vale  $5''$  de arco.

De las lecturas de nivel se deduce la inclinación en cada caso

$$\alpha = \frac{m' + m}{2} \quad (\S 11)$$

	$i^p$	$i''$	$i \cotg Z$
1	0.32	1"60	1"43
2	0.65	5.25	2"91
3	0.67	3.25	3"00
4	0.27	1.35	1"21

#### 4) Cálculo del azimut de la estrella.

$H_s^1$	0h 12m 43s 84	0h 23m 20s 74	0h 26m 18s 94	0h 37m 33s 94
$\alpha_s$	19.36.55.19	19.36.55.19	19.36.55.19	19.36.55.19
$t_s$	4.35.50.65	4.46.25.55	4.49.23.75	5.00.43.75
$\log (\cotg \delta \operatorname{tag} \varphi)$	$\overline{2.0770215}$	$\overline{2.0770215}$	$\overline{2.0770215}$	$\overline{2.0770215}$
$\log \cos t$	$\overline{1.5550877}$	$\overline{1.4990573}$	$\overline{1.4817563}$	$\overline{1.4078064}$
$\log x$	$\overline{3.6521192}$	$\overline{3.5760788}$	$\overline{3.5587778}$	$\overline{3.4848279}$
$x$	0.0042867	0.0037673	0.0036206	0.0030537
$1-x$	0.9957133	0.9962327	0.9963794	0.9969463
$\log (\cotg \delta \sec \varphi)$	$\overline{2.2595657}$	$\overline{2.2595657}$	$\overline{2.2595657}$	$\overline{2.2595657}$
$\log \operatorname{sen} t$	$\overline{1.9700383}$	$\overline{1.9772258}$	$\overline{1.9790569}$	$\overline{1.9853117}$
$\log (1-x)$	$\overline{2.2296040}$	$\overline{2.2367915}$	$\overline{2.2386226}$	$\overline{2.2448774}$
$\log \operatorname{tag} A$	$\overline{1.9981343}$	$\overline{1.9983606}$	$\overline{1.9984247}$	$\overline{1.9986718}$
	$\overline{2.2314697}$	$\overline{2.2384309}$	$\overline{2.2401979}$	$\overline{2.2462056}$
A (S W)	0° 58' 34" 41	0° 59' 31" 19	0° 59' 45" 74	1° 00' 35" 63

#### 5) Cálculo del azimut de la mira.

$A_s$	0° 58' 34" 41	0° 59' 31" 19	0° 59' 45" 74	1° 00' 35" 63
$L_M$	223.10.00.50	223.10.00.50	223.10.01.00	223.10.01.00
$A_s - L_M$	224.08.34.91	224.09.31.69	224.09.46.74	224.10.36.68
$i \cotg z$	121° 07' 29" 00	121° 08' 45" 00	121° 08' 59" 50	121° 09' 33" 50
$L_s$	+ 1.45	+ 2.91	+ 3.00	+ 1.21
$A_s - L_M - L_s$	105° 01' 04.48	105° 00' 43" 71	105° 00' 44" 24	103° 01' 01.97
Aberr	0.32	0.32	0.32	0.32
L	105.01.04.80	105.00.44.10	105.00.44.56	105.01.02.29
	- 9.63	+ 9.63	+ 9.63	- 9.63
$A_M$	105.00.55.17	105.00.53.73	105.00.54.19	105.00.52.66
$L_1 =$	84" 80	$L_2 =$	44" 10	
$L_4 =$	62.29	$L_3 =$	44.56	
$1+4 =$	127.09	$2+3 =$	88.66	
$\frac{1+4}{2} =$	63.59	$\frac{2+3}{2} =$	44.33	
$\frac{2+3}{2} =$	44.33			
$2 \Sigma =$	19.26			
$\Sigma =$	9.63			

254. Azimut por elongaciones. — Cuando la distancia de una estrella E al polo (fig. 263), es más grande que la altura polar,

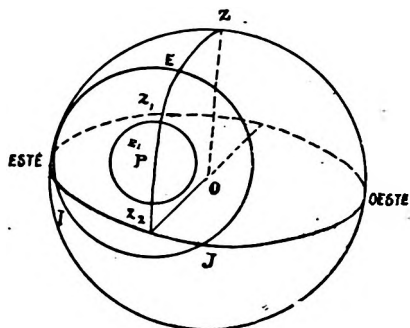


Fig. 263.

su trayectoria corta al horizonte en dos puntos I y J, y el astro es sólo visible en la parte superior de su órbita, teniendo un orto y un ocaso. Las estrellas tales como E<sub>1</sub>, cuya distancia al polo es inferior a la altura polar, no desaparecen jamás del horizonte; se llaman circumpolares y por su lento movimiento azimutal, son las que se usan cuando se calcula el azimut por la observación de la mayor elongación.

La mayor elongación tiene lugar cuando el ángulo de posición es recto, y por lo tanto las fórmulas conocidas de dicho triángulo, se reducen a las siguientes:

$$\text{sen } h = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \delta} \quad (1)$$

$$\text{sen } A = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} \quad (2)$$

$$\cos t = \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \delta} \quad (3)$$

Se ve que, para que la mayor elongación sea posible, es



necesario que  $\delta$  y  $\varphi$  siendo del mismo signo, se tenga  $\delta > \varphi$  a fin de que  $\sin h$  sea positivo y  $< 1$ .

En el instante de la mayor elongación, el movimiento en azimut es tanto mas insensible, cuanto más próximo al polo del observador se encuentre el astro; de manera que en este caso la observación puede hacerse con la mayor exactitud; por consiguiente, este método debe ser preferido a los demás, siempre que se use un teodolito para el trazado de la meridiana, o para hallar el azimut de una determinada dirección.

Para prepararse a la observación, es útil conocer por lo menos aproximadamente, la hora de la mayor elongación que obtenemos por la fórmula (3). Puede sin embargo observarse con toda precisión, sin ese previo conocimiento; para esto se seguirá el astro con el anteojo del teodolito, de tal manera, que permanezca siempre colimado por el hilo vertical del retículo, hasta que el movimiento en azimut que va disminuyendo insensiblemente, llegue a anularse y la estrella parezca no tener movimiento en ese sentido y si sólo en el de su altura, es decir, que permanezca un momento en coincidencia con el hilo vertical, sin que se le imprima al anteojo movimiento alguno. Al cabo de un pequeño lapso de tiempo, se verá que el astro deja de estar colimado por el hilo vertical y que inicia un movimiento azimutal en sentido contrario al antes observado, estaremos entonces en el instante de la mayor elongación, y la graduación del círculo horizontal es la que corresponde a su azimut. Sumando o restando a dicha lectura, el valor del azimut verdadero deducido por la fórmula (2), se tendrá la graduación correspondiente al meridiano.

En el hemisferio norte, la estrella polar es utilizada con preferencia a las demás circumpolares, pues se la puede observar con el anteojo del teodolito todo el año, tanto de día como de noche.

**255. Ejemplo.**—El 25 de Julio de 1914 quiere observarse una elongación de  $\alpha$  Octantis,  $\varphi = 40^\circ$  S.

Haremos un cálculo preliminar.

$\log \sin \varphi = 1.80806$	$\log \tan \varphi = 1.92381$	$\log \cos \delta = 2.12647$
$\text{colg} \sin \delta = 0.00003$	$\text{colg} \tan \delta = 2.12651$	$\text{colg} \cos \varphi = 0.11574$
$\log \sin h = 1.80809$	$\log \cos t = 2.05052$	$\log \sin A = 2.24221$
$h = 40^{\circ} 00'$	$t = 5^{\text{h}} 56^{\text{m}} 19^{\text{s}} \text{ W}$	$A = 1^{\circ} 00'$
	$\alpha_x = 19 \ 22$	
	$H_s = 25 \ 18 \ 19$	
	$\alpha_o = 8 \ 08$	
	$H_m = 17 \ 09 \ 19$	

La elongación al O se efectuará a 5<sup>h</sup> 0<sup>m</sup> am. del día 26, la elongación al E a 5<sup>h</sup> 16<sup>m</sup> 41<sup>s</sup>.

Siempre convendrá elegir un par de estrellas cuya elongación se produzca con pequeño intervalo de tiempo para observar una con el anteojo a la derecha y otra con anteojo a la izquierda, para eliminar en el promedio los errores residuos instrumentales.

La observación de elongaciones al E y O de la misma estrella tiene el inconveniente que exige mucho tiempo y la variación de las condiciones atmosféricas puede nualograr la observación, conviene por eso elegir dos estrellas; una cuya elongación se produce al O y otra que con pequeño intervalo de tiempo elonga al E.

## CAPITULO XXII.

### LATITUD

**256. Circunstancias favorables para la determinación de la latitud.**—La relación entre un error  $d\varphi$  y los errores  $dz$  y  $dt$ , se obtiene diferenciando respecto a  $\varphi$ ,  $z$  y  $t$  la expresión

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

lo que dá

$$d\varphi = -\frac{dz}{\cos A} + \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{\cos A \sin z} dt.$$

Esta relación muestra que las condiciones para determinar la latitud, midiendo distancias zenitales, son tanto más favorables, cuanto más el azimut del astro y en consecuencia su horario, se aproxima a  $0^\circ$  o  $180^\circ$  y cuanto mayor es la distancia zenital.

En particular, en el meridiano, un error sobre el horario  $t$  no tiene influencia sobre la latitud y el error que proviene de la medida de la distancia zenital,  $\frac{dz}{\cos A}$  adquiere el valor mínimo.

Para una estrella polar,  $\delta$  difiere poco de  $90^\circ$  y  $\cos \delta$  de  $0^\circ$ ;  $A$  difiere poco de  $0^\circ$  y  $\cos A$  de 1 luego; adquieren los coeficientes de  $dz$  y  $dt$  un valor mínimo.

De estas consideraciones deducimos que para una estrella de pequeña declinación la circunstancia favorable es observarla en la proximidad del meridiano; las estrellas polares pueden observarse en cualquier instante.

**257. Observaciones meridianas. Método Sterneck.**—La primera operación consiste en colocar lo más exactamente posible el antejo del teodolito, después de haber sido este rectificado, en el plano meridiano.

Si se ha determinado el azimut de la mira, no habrá sino que colocar el antejo de manera que, forme su plano vertical con el plano de la mira, un ángulo igual al azimut.

Si no se tiene el azimut de la mira exactamente calculado,

se colocará el anteojo en el meridiano observando correspondientes de una estrella circumpolar.

La lectura correspondiente al zenit instrumental debe haber sido cuidadosamente observada, la que llamaremos  $l_0$ , observando el paso de una estrella, paso cuya hora media aproximadamente conocemos, haremos la lectura  $l$  en el círculo vertical, la distancia zenital es

$$z = l - l_0$$

y la latitud

$$\varphi = \delta \pm z.$$

La lectura del zenit instrumental  $l_0$ , en general, está afectada de un error  $\epsilon$  que se llama *error de zenit*; para eliminarlo

conviene observar, con poco intervalo de tiempo, la culminación de otra estrella después de haber girado el instrumento  $180^\circ$  sobre su eje principal.

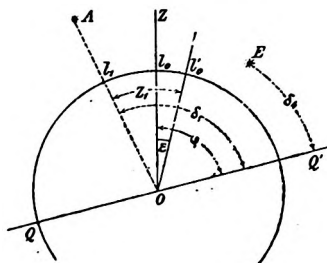


Fig. 264.

Sea OZ (fig. 264) el zenit verdadero del observador, al que corresponde una lectura  $l_0$ , suponemos el instrumento bien nivelado, el eje principal del teodolito coincide con OZ;

debido al error  $\epsilon$  en la lectura del zenit instrumental tomamos como origen la lectura errónea  $l'_0$ .

La distancia zenital medida para un astro A será: N/E, cara al Norte, círculo al Este

$$z_1 = l_1 - l'_0.$$

La distancia zenital exacta

$$z_1 - \epsilon,$$

la latitud

$$N/E \varphi_1 = \delta_1 - (z_1 - \epsilon).$$

Si giramos el instrumento de manera que el círculo vertical quede al Oeste y observamos el paso de otra estrella B, la distancia zenital medida será

$$z_2 = l_2 - l_0'.$$

La exacta

$$z_2 + \epsilon.$$

La latitud

$$N/W \quad \varphi_2 = \delta_2 - (z_2 + \epsilon).$$

Tomando el promedio como valor definitivo

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \frac{z_2 + z_1}{2}$$

queda así eliminado el error de zenit.

La misma doble observación se repite para otro par de es-

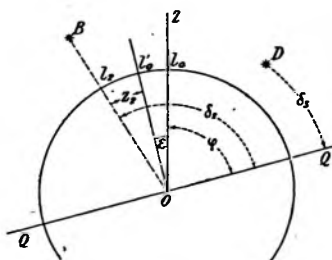


Fig. 265

trellas que culminen del otro lado del zenit del observador y que tengan aproximadamente la misma distancia zenital.

Con esto se anula el error cometido en el cálculo de la refracción porque esta entra en la media con signo contrario, también se anula el error de nivel y el debido a la flexión del antejo que representa la influencia de la gravedad sobre el eje del antejo y que descomponiéndola según el mismo y una perpendicular, esta última proporcional a  $\sin z$  es la única que se debe considerar y que queda anulada en el promedio de observaciones simétricas respecto al zenit.

Sean los astros D y E cuyas declinaciones son respectivamente  $\delta_3$  y  $\delta_4$ , las distancias zenitales afectadas de error de zenit;  $z_3$  proximately igual a  $z_1$  y  $z_4$  a  $z_2$ .

Deducimos de las figuras 264 y 265

$$S/W \quad \varphi_3 = \delta_3 + (z_3 - e)$$

$$S/E \quad \varphi_4 = \delta_4 + (z_4 + e)$$

combinando

$$\varphi_1 \text{ y } \varphi_3, \varphi_2 \text{ y } \varphi_4$$

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2} + \frac{z_3 - z_1}{2}$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_4}{2} = \frac{\delta_2 + \delta_4}{2} + \frac{z_4 - z_2}{2}$$

siendo el valor definitivo de la latitud

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4}$$

Esta combinación de las observaciones, de manera que la mitad de ellas son hechas con círculo al Este y la otra mitad con círculo al Oeste, al mismo tiempo que la mitad de ellas culminan al Norte y la otra mitad al Sud, siendo equizenitales tomadas dos a dos, es la base del método de Sterneck.

Para anular el error de graduación se repite las observaciones en cuatro posiciones del círculo, para lo que se hace coincidir el zenit con las graduaciones  $0^\circ$   $90^\circ$   $45^\circ$  y  $135^\circ$ .

Puede observarse los cuatro grupos en una noche con lo que se tiene un resultado que satisface la precisión requerida en trabajos hidrográficos; una determinación mas completa de la latitud consiste en observar cuatro noches para una misma graduación del zenit, tres grupos de cinco estrellas, detalles completos de este trabajo se encontrarán en la determinación de la latitud de Puerto Deseado N°. 110 R de P. N.

El valor de la declinación se obtiene de las efemérides o catálogos, su valor hay que reducirlo para el instante de la observación teniendo en cuenta la época para la cual ha sido dada.

Si se observa un par de estrellas solamente, conviene elegir las posiciones correspondientes a  $z_1$  y  $z_3$  o  $z_2$  y  $z_4$ .

258. *Ejemplo.*—En la latitud aproximada  $\varphi = 46^\circ$  queremos observar para la determinación de la latitud, entre 8h 30m y 10h 00 el 5 de Octubre de 1921.

1.º Programa de observación. — La  $H_g^1$  del paso de una estrella es igual a la ascensión recta de la misma.

Para las horas medias que se quiere observar

$$H_g^1 = H_m^1 + \alpha \odot_m$$

$$\alpha_s = 8 \text{ h } 37 \text{ m} + 12 \text{ h } 45 \text{ m} = 21 \text{ h } 20 \text{ m}$$

$$\alpha_s = 10 \text{ h } 02 \text{ m} + 12 \text{ h } 45 \text{ m} = 22 \text{ h } 45 \text{ m}$$

De las efemérides se sacarán las estrellas que tengan por ascensión recta los valores comprendidos entre 21 h 20 m y 22 h 45 m y que tengan en su culminación  $z < 35^\circ$ , (en caso necesario este límite puede ampliarse a  $45^\circ$ ) para lo que la declinación debe estar comprendida entre  $(\varphi - z)$  y  $(\varphi + z)$  o sea  $-46^\circ - 35^\circ = -81^\circ$  y  $-46^\circ + 35^\circ = -11^\circ$ , se obtiene el valor de  $z$  y se prepara la siguiente lista

Estrella	Mag.	$\alpha$	$\delta$	$Z$
$\gamma$ Pavonis . . . . .	4.3	21h 20 <sup>m</sup>	-63°43'	19°51'
$\epsilon$ Capricorni . . . . .	3.9	21.22	22.45	-23.07
$\nu$ Octantis . . . . .	3.7	21.32	77.44	31.52
$\gamma$ Capricorni . . . . .	3.8	21.36	17.01	-28.51
$\theta$ P. Australis . . . . .	5.2	21.43	31.16	-14.36
$\delta$ Capricorni . . . . .	3.0	21.43	16.29	-29.23
$\mu$ Capricorni . . . . .	5.2	21.48	15.55	-31.57
$\gamma$ Gruis . . . . .	5.2	21.49	37.44	-8.08
$\epsilon$ Indi . . . . .	4.7	21.57	57.05	11.14
$\lambda$ Gruis . . . . .	4.6	22.01	39.55	-5.57
$\iota$ Aquarii . . . . .	4.4	22.02	14.15	-31.57
$\alpha$ Gruis . . . . .	2.2	22.03	47.20	1.28
$\alpha$ Tucanae . . . . .	2.9	22.13	60.39	14.47
$\delta$ Gruis . . . . .	4.0	22.24	43.54	-1.58
$\nu$ Aquarii . . . . .	5.3	22.30	21.07	-24.45
Boss 5831 . . . . .	6.0	22.32	41.00	-4.52
$\Sigma$ P. Australis . . . . .	4.2	22.36	27.27	-18.25
$\beta$ Gruis . . . . .	2.2	22.58	47.18	1.26
$\epsilon$ Gruis . . . . .	3.7	22.44	51.44	5.32
T Aquarii . . . . .	4.2	22.45	14.00	-31.52

De estas se eligen las indicadas en el cuadro siguiente que satisfacen las condiciones ya establecidas. Las estrellas de cada pareja tienen la  $z$  que no difiere en más de  $2^\circ$  y  $1^\circ$  5 las de menos y más de  $15^\circ$  de distancia zenital respectivamente.

*Círculo en 0°.*

Estrella	Mag.		Z	Signo	Lectura del círculo vertical
ν Octantis . . . .	5.7	21h 32 <sup>m</sup> 52 <sup>s</sup>	31° 52'	SE	31° 52'
θ P. Australis . . .	5.2	21—43—06	—14—36	NW	14—36
μ Capricorni . . .	5.2	21—49—02	—31—57	NW	31—57
α Gruis . . . . .	2.2	22—03—19	1—28	SW	358—32
α Tucanae . . . .	2.9	22—13—10	14—47	SE	14—47
δ Gruis . . . . .	4.0	22—24—37	—1—58	NE	358—02
Boss 5831 . . . .	6.0	22—32—17	—4—52	NE	355—08
ε Gruis . . . . .	3.7	22—43—51	5—52	SW	554—08

**2° Observación.**—Se dispondrá de un cronómetro cuyo Estado respecto a la  $H_n^1$  sea conocido; el teodolito exactamente colocado en el meridiano y de un barómetro y termómetro para obtener los argumentos de corrección por temperatura y presión, de la refracción atmosférica.

Debe conocerse el valor angular de una división del nivel del círculo vertical, con el instrumento del ejemplo, una división vale 4"60 y el centro de la burbuja en posición horizontal corresponde a la graduación 20, cuando la burbuja está desplazada a una graduación mayor la corrección por nivel es sustractiva y cuando es menor, aditiva.

El valor de una graduación del nivel se determina para cada día de observación con diez lecturas hechas en la forma siguiente: se echa la burbuja hacia el cero, se hace la lectura de sus extremos y del círculo vertical, enseguida se echa la burbuja hacia el extremo opuesto y se repite las lecturas.

La diferencia de las lecturas del círculo es el valor angular del desplazamiento de la burbuja y de su cociente se deducirá el valor angular de una división.

Con el teodolito listo para la observación y perfectamente nivelado, cuando faltan unos minutos para que la hora sidérea del cronómetro sea igual a la ascensión recta de la estrella que se observará y en cuya distancia zenital se ha apuntado el anteojo, se estará atento al momento que entra en el campo del retículo, se hará la primer lectura del nivel, luego con el tornillo de aproximación del círculo vertical (siempre con tornillo entrante) se va llevando el hilo horizontal del retículo sobre la estrella y cuando esta corta el hilo vertical, es decir que llega al centro del retículo, se dará el Top para que el ayudante anote la hora del cronómetro, enseguida se volverá a leer el nivel. La diferencia entre la  $H_n^1$  obtenida con el cronómetro y la ascensión recta de la estrella, que es la  $H_s$  del paso, da el horario de esta en el instante de la observación; este puede servir en caso necesario para tratarla como circunmeridiana.



El observador se mantendrá lejos del instrumento mientras no observa y tratará de tocarlo únicamente para las manipulaciones de la observación; usará la luz eléctrica lo menos posible y tratará de mantenerla alejada de los niveles.

El intervalo de tiempo para la observación de un grupo conviene que no sea mayor de 1 h. y ellas no deben comenzarse sino 2 hs. después de la puesta del sol.

Al principio y fin de la observación se harán lecturas de la mira con anteojo derecha e izquierda para controlar que no haya error en azimut.

3.º *Cálculos.* — El cuadro siguiente se refiere a la observación y cálculo de  $v$  Octantis.

La refracción se calcula con la fórmula

$$\log v = \log (\alpha \operatorname{tag} z) + \log B + \log T + \log \gamma$$

estos elementos se obtienen de las tablas de Albrecht o Bidschof-Vital; el término  $\log (\alpha \operatorname{tag} z)$  se saca para cada estrella con su distancia zenital; la corrección por temperatura  $T$ , presión atmosférica  $B$  y temperatura del termómetro adjunto  $\gamma$ , se obtiene para el instante medio de la observación y se aplica igualmente a todas las estrellas. También puede observarse cada hora la temperatura y presión desde el principio al final de la observación, luego se construye un gráfico cuyas abscisas son los tiempos y las ordenadas las sumas de los logaritmos de esas correcciones y de él se obtiene el valor de la corrección para el instante de la observación de cada estrella.

Estrella	υ Octantis
Magnitud	3.7 — S/E
α	21h 32m 52s
Z	31° 52'
Top.	21h 32m 21s 5
Nivel 1.º	6.3 — 34.2 — 20.25
» 2.º	6.6 — 34.5 — 20.55
Corr. del nivel	20.40 — 20 = 0.40 0.40 × 4" 60 = 1" 84
Lecturas del círculo	31° 40' 4.25 28 34 33 118
Corr. del nivel	31° 44' 59" 00 — 1.84
Lectura corregida	31° 44' 57" 16
Z =	31° 44' 57" 16
Refracción	+ 36.50
Z <sub>q</sub> =	31.45.33.66
ε =	— 77.44.25.66
φ =	— 45.58.52.00
Termómetro	8° 3
Barómetro	765.0 mm.

El resultado de los cuatro pares de estrellas observadas están en el cuadro siguiente con el cálculo definitivo de  $\phi_0$ .

*Círculo en 0°.*

Estrella		Z	$\varphi$	$\varphi \pm \epsilon$
$\nu$ Octantis	SE	41° 46'	45° 58' 52" 00	45° 51' 45" 16
$\alpha$ Tucanae	SE	14 . 47	53 . 93	47 . 09
$\delta$ Gruis	NE	— 2 . 05	52 . 20	45 . 36
Boss 5131	NE	— 4 . 52	59 . 09	52 . 25
		$\Sigma_E$	17 . 22	
		$\varphi_E$	45° 58' 54" 30	
$\theta$ P. Austral	NW	— 14° 29'	45° 44' 39" 58	45° 51' 46" 42
$\mu$ Capricorni	NW	— 31 . 50	40 . 54	47 . 38
$\alpha$ Gruis	NW	1 . 36	42 . 36	49 . 20
$\epsilon$ Gruis	NW	5 . 59	40 . 01	46 . 85
		$\Sigma_W$	02 . 49	
		$\varphi_W$	45° 44' 40" 62	$\Sigma_N = 191" 41$
$\varphi_E - \varphi_W = 2 \epsilon =$		14 . 13 . 68	$\Sigma_S =$	28 . 30
$\epsilon =$		07 . 06 . 84	$\varphi_N =$	45° 51' 47" 85
$\varphi_E + \varphi_W = 2 \varphi =$		103 . 34 . 92	$\varphi_S =$	45 . 51 . 47 . 07
$\varphi_0 =$		45 . 51 . 47 . 46		92
			$\varphi_0 =$	45° 51' 47" 46
			$\varphi_E - \varphi_S =$	0 . 78

El valor de  $\varphi$  obtenido con círculo en cero, se promediará con  $\varphi$  90°,  $\varphi$  45 y  $\varphi$  135 obtenido con círculo en 90°, 45° y 135°.

259. **Método Horrebow-Talcott.** — En la aplicación de este método se usa un teodolito exéntrico sin inversión sobre los muñones, denominando *telescopio zenital* por que se emplea solo para la observación de distancias zenitales menores de 30° y para las cuales las anomalías de la refracción son insensibles.

La particularidad del instrumento está constituida por la adopción de un microscopio micrométrico al ocular del anteojo con

el hilo móvil horizontal, otros dos hilos fijos y paralelos a aquel colocados en el extremo del campo indica los límites entre los cuales conviene observar sin que las imágenes de las estrellas dejen de ser nítidas, la distancia angular de estos dos hilos es de  $1^\circ$ .

El principio de este método, el anteojo en el meridiano, es medir la diferencia de las distancias zenitales de dos estrellas que culminen a ambos lados del zenit, que sean equizenitales o que sus valores no difieran en más de  $30'$ . El intervalo entre una y otra culminación no será menor de 3 minutos para tener tiempo para manipular el instrumento.

Si la estrella que culmina el Sur es la que primero pasa por el meridiano, se colima en este instante con el hilo móvil; se hace la lectura del nivel y del micrómetro; luego se hace girar el instrumento  $180^\circ$  alrededor de su eje principal, volviendo a poner el anteojo en el meridiano, sin variar la posición recíproca del anteojo y nivel, con el objetivo hacia el Norte se se colima con el hilo móvil la segunda estrella en su culminación repitiéndose la lectura del micrómetro y nivel.

Llamando  $z_r$  la distancia zenital afectada del error de refracción cuando se colimó la primer estrella y  $r_s$  la corrección por refracción que le corresponde

$$z_s = z_r + r_s$$

es la distancia zenital verdadera de la estrella al Sur.

Si la burbuja del nivel permanece centrada después de haber girado el anteojo para apuntar a la estrella al norte, no habrá variación en la inclinación del eje principal del instrumento y en el plano meridiano, pero si se desplaza un ángulo  $\pm \alpha$ , este será el valor de la corrección por inclinación.

Al colimar la estrella al norte habrá que dar al hilo móvil un desplazamiento angular  $\pm \beta$  dado por la diferencia de lecturas del micrómetro en la puntería al S y N, la distancia zenital de la segunda estrella será

$$z_r \pm \alpha \pm \beta$$

y siendo  $r_n$  la corrección por refracción que le corresponde

$$z_n = z_r \pm \alpha \pm \beta$$

luego

$$z_s - z_n = \pm \alpha \pm \beta + r_s - r_n$$

La cantidad  $\pm \alpha \pm \beta$  es conocida cuando se conoce las constantes del nivel y del micrómetro y  $r_s - r_n$  se calcula en función de la distancia media zenital medida y de la diferencia aproximada observada.

Por otra parte

$$\varphi = \delta_s + z_s, \quad \varphi = \delta_n - z_n$$

luego

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_s + \delta_n) + \frac{1}{2}(z_s - z_n)$$

El valor angular de una vuelta del micrómetro se determina por la observación de estrellas polares en la elongación, cuando el movimiento del astro es vertical, puede entonces medirse la variación de la distancia zenital en vueltas del micrómetro correspondiente a intervalos de tiempo dados y por otra parte calcular estas mismas variaciones directamente. Más rápidamente y sin cálculos preparatorios se obtiene el valor angular de una vuelta del micrómetro, midiendo con este la diferencia de distancias zenitales entre estrellas que pasen a breve intervalo por el meridiano y de las que se conozca exactamente el valor de la declinación; se tiene para un mismo lugar

$$z_1 - z_2 = \delta_2 - \delta_1$$

La constante del nivel se determina como antes se ha indicado.

Este método es uno de los más recomendables por su gran simplicidad y alto grado de precisión, la observación es fácil y el cálculo rápido; es independiente de los errores sistemáticos de refracción, de flexión del anteojo y del tiempo, pero la semi-suma de los errores sobre las declinaciones se transmiten íntegramente a la latitud, por esto deben usarse estrellas de declinación bien segura, esto que no es un inconveniente, en el hemisferio norte donde este método es muy usado, hace que no sea ventajoso en nuestro hemisferio para la determinación absoluta de la declinación.

**260. Observación de circunmeridianas.**—Las circunmeridianas son alturas tomadas cuando el astro está muy próximo a su culminación, o sea cuando tienen un horario muy próximo a 0 hora o 12 horas.

Para hallar la latitud con una altura  $h$  circunmeridiana, se halla la diferencia que tendría con la altura en el instante que el astro estuviese en el meridiano; esta diferencia se denomina *reducción al meridiano*.

En la fórmula conocida

$$\sin h = \cos z = \cos (\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{t}{2}$$

siendo  $z_1$  la distancia zenital meridiana

$$z_1 = \varphi - \delta$$

y

$$\cos z_1 - \cos z = 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$2 \sin \frac{1}{2} (z - z_1) \sin \frac{1}{2} (z + z_1) = 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2} \Delta z = \sin \frac{1}{2} (z - z_1) = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin \frac{1}{2} (z + z_1)} \sin^2 \frac{t}{2} = A \sin^2 \frac{t}{2}$$

el segundo miembro se calcula con un valor aproximado

$$\varphi' = z + \delta \text{ y } z_1 \text{ se reemplaza por } z.$$

El ángulo horario se obtiene del top de un cronómetro cuyo estado = E se conoce y la longitud.

El valor de la latitud es

$$\varphi = \delta + z - A \sin^2 \frac{t}{2}$$

el error  $d\varphi$  que corresponde a un error  $dt$  en el horario es

$$d\varphi = -\frac{A}{2} \sin t \cdot dt.$$

Si combinamos una observación al E con otra al O, de la misma estrella u otra estrella que tenga próximamente el mismo horario, siendo de signo contrario el coeficiente de  $dt$ , en la media quedará eliminada su influencia, luego debe observarse pares de estrellas, una a cada lado del meridiano.

Las alturas circunmeridianas, una vez que han sido reduci-

das al meridiano, deben considerarse como el caso de observaciones meridianas y se tendrán en cuenta las indicaciones hechas para eliminar los errores instrumentales cuando se observa con un teodolito.

**261. Latitud mediante la observación de los intervalos en que tres estrellas alcanzan una misma altura. Método de Gauss.**—Este método ofrece la ventaja que no exige el conocimiento de la altura de los astros ni el del Estado del cronómetro y solo el de su marcha diurna.

Cuando las observaciones son hechas en buenas condiciones el resultado alcanza a un alto grado de precisión casi comparable con la que se obtiene en los observatorios por medio de instrumentos fijos.

En la observación puede emplearse el sextante en su pie y el horizonte artificial o el astrolabio de prismas, debiendo tenerse presente que la condición esencial es que las alfileras sean idénticas.

Si no se conoce la marcha del cronómetro con mucha exactitud y no se tienen top telegráficos para determinarla; observando alturas iguales de una misma estrella y de un mismo lado del meridiano durante varias noches, la diferencia entre los tops cronométricos y 24<sup>hs</sup> nos da el valor de la marcha.

**262. Principio del método.**—Sean:

$h$  = altura de las tres estrellas en el momento de ser observadas.

$\varphi$  = latitud.

$E$  = estado absoluto del cronómetro con respecto al tiempo sidero, en el momento de hacer la primera observación; es desconocido.

$T_1, T_2, T_3$  = las horas del cronómetro observadas, las dos últimas corregidas de movimiento con respecto al tiempo sidero, por el intervalo transcurrido desde la primera observación.

$t_1, t_2, t_3$  = los horarios de las estrellas.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  = las ascensiones rectas.

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$  = las declinaciones.

$$\lambda = t_2 - t_1, \quad \lambda' = t_3 - t_1.$$

Siguiendo la práctica constante, las ascensiones rectas se

cuentan del O al E, de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ ; los horarios de E a O, entre los mismos límites; las latitudes y declinaciones de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , positivas las boreales y negativas las australes; el estado absoluto se considera en adelanto y las marchas positivas, si el cronómetro adelanta y negativa en caso contrario.

Si la primera estrella observada tiene el horario  $t_1$  en el momento de su observación, tendrá los horarios

$$t_1 + (T_2 - T_1)$$

$$t_1 + (T_3 - T_1)$$

al efectuarse las observaciones segunda y tercera; como la diferencia de horarios es igual a la diferencia de ascensiones rectas, con signo contrario

$$[t_1 + (T_2 - T_1)] - t_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$[t_1 + (T_3 - T_1)] - t_3 = \alpha_3 - \alpha_1$$

de donde

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda = (T_2 - T_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = t_2 - t_1 \\ \lambda' = (T_3 - T_1) - (\alpha_3 - \alpha_1) = t_3 - t_1 \end{cases}$$

Si se consideran los tres triángulos formados en el zenit, polo elevado y cada una de las estrellas, se tienen las tres ecuaciones fundamentales.

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos t_1$$

$$(2) \quad \text{sen } h = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos (t_1 + \lambda)$$

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta_3 + \cos \varphi \cos \delta_3 \cos (t_1 + \lambda').$$

Tenemos así un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas;  $h$ ,  $\varphi$  y  $t_1$ . Entre la primera y segunda se elimina  $h$  y se obtiene  $\varphi$  en función de la incógnita  $t_1$ ; haciendo lo mismo con la segunda y tercera se obtiene otra ecuación que da  $\varphi$  en función de  $t_1$ , con la anteriormente deducida se elimina  $t_1$  y el valor de la latitud está dado sólo en función de las declinaciones de los astros y las diferencias  $T_3 - T_1$  y  $T_2 - T_1$  observadas.

Diferenciando el sistema (2) se obtiene el valor de los coeficientes diferenciales cuya suma es igual a 0 y  $\pm 1$  (264); su cálculo sirve para comprobación del cálculo en la latitud.

Del análisis de las mismas fórmulas diferenciales se deducen las circunstancias favorables para la elección de los astros;



cuando se trata de determinar la latitud y el tiempo, son aquellas en que los azimútes de los astros difieren  $120^\circ$ , pero si sólo se trata de determinar la latitud, lo más conveniente es que los astros tengan la siguiente posición: *dos azimutes próximos al meridiano a un mismo lado del zénit, y el tercero aproximadamente suplementario al promedio de aquellos.* (265):

263. Deducción de las fórmulas para el cálculo. —Restando de la segunda la primera, y poniendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) + \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) & \text{ en lugar de } \delta_2 \\ \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) - \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) & \text{ en lugar de } \delta_1 \end{aligned}$$

resulta después de algunas transformaciones

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \varphi \sin \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) \cos \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) \\ &- \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) \cos \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) \sin \frac{1}{2} \lambda \sin (t_1 + \frac{1}{2} \lambda) \\ &- \cos \varphi \sin \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) \sin \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) \cos \frac{1}{2} \lambda \cos (t_1 + \frac{1}{2} \lambda) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \sin \frac{1}{2} \lambda \sin (t_1 + \frac{1}{2} \lambda) \cotg \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) \\ &+ \cos \frac{1}{2} \lambda \cos (t_1 + \frac{1}{2} \lambda) \tan \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) \end{aligned}$$

introduciendo las cantidades auxiliares  $m$ ,  $M$  y  $N$ .

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \lambda \cotg \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) &= m \sin M \\ \cos \frac{1}{2} \lambda \tan \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) &= m \cos M \\ \frac{1}{2} \lambda - M &= N \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

resulta

$$\tan \varphi = m \cos (t_1 + N) \quad (4)$$

combinando en la misma forma la primera y tercera, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \lambda' \cotg \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) &= m' \sin M' \\ \cos \frac{1}{2} \lambda' \tan \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) &= m' \cos M' \\ \frac{1}{2} \lambda' - M' &= N' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\tan \varphi = m' \cos (t_1 + N') \quad (6)$$

El problema está reducido a la solución de dos ecuaciones, (4) y (6) con dos incógnitas,  $\varphi$  y  $t_1$ .

Los valores de  $m$  y  $m'$  pueden tomarse siempre positivos, y los de  $M$  y  $M'$  resultan perfectamente definidos, por los signos de sus senos y cosenos. De las (4) y (6) se obtiene:

$$\frac{m' - m}{m' + m} = \frac{\tan [t_1 + \frac{1}{2} (N' + N)]}{\cotg \frac{1}{2} (N' - N)}$$

introduciendo el ángulo auxiliar  $\psi$ , definido por:

$$\tan \psi = \frac{m}{m'}$$

o lo que es lo mismo por

$$\frac{m - m'}{m + m'} = \frac{1 - \tan \psi}{1 + \tan \psi} = \tan (45^\circ - \psi)$$

resulta

$$\tan [i + \frac{1}{2}(N + N')] = \tan (45^\circ - \psi) \cot i (N' - N) \quad (8)$$

Las fórmulas (1), (3) y (8) daran los valores de  $\varphi$  y  $i_1$ .

**264. Análisis del método.**—De la primera fórmula fundamental (2) se obtiene por diferenciación.

$$d h = -\cos A_1 d \varphi - \cos \varphi \sin A_1 d i_1 \quad (1)$$

en donde  $A_1$  es el azimut,  $d i$  el error en el horario, y  $d h_1$ ,  $d \varphi$  los correspondientes errores en altura y latitud.

Siendo

$$i_1 = T_1 + E - \alpha_1$$

tendremos

$$d i_1 = d T_1 + d E \quad (2)$$

sustituyendo este valor en la (1) y procediendo en forma análoga para las otras estrellas, se obtienen las ecuaciones que siguen:

$$\left. \begin{aligned} d h &= -\cos A_1 d \varphi - \cos \varphi \sin A_1 d T_1 - \cos \varphi \sin A_1 d E \\ d h &= -\cos A_2 d \varphi - \cos \varphi \sin A_2 d T_2 - \cos \varphi \sin A_2 d E \\ d h &= -\cos A_3 d \varphi - \cos \varphi \sin A_3 d T_3 - \cos \varphi \sin A_3 d E \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

eliminando en ellas a  $d E$

$$\begin{aligned} (\sin A_1 - \sin A_2) d h &= \sin (A_2 - A_1) d \varphi - \cos \varphi \sin A_2 \sin A_1 (d T_2 - d T_1) \\ (\sin A_2 - \sin A_3) d h &= \sin (A_3 - A_2) d \varphi - \cos \varphi \sin A_3 \sin A_2 (d T_3 - d T_2) \\ (\sin A_3 - \sin A_1) d h &= \sin (A_1 - A_3) d \varphi - \cos \varphi \sin A_1 \sin A_3 (d T_1 - d T_3) \end{aligned}$$

Póngase

$$\sin (A_2 - A_1) + \sin (A_3 - A_2) + \sin (A_1 - A_3) = 2 K$$

y de las sumas de las tres ecuaciones anteriores se deduce

$$\begin{aligned} \frac{d \varphi}{\cos \varphi} &= \frac{\sin A_1 (\sin A_2 - \sin A_3)}{2 K} d T_1 + \frac{\sin A_2 (\sin A_1 - \sin A_3)}{2 K} d T_2 \\ &+ \frac{\sin A_3 (\sin A_2 - \sin A_1)}{2 K} d T_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Eliminando  $d \varphi$  en las ecuaciones (3)

$$\begin{aligned} d E &= \frac{\sin A_1 (\cos A_2 - \cos A_3)}{2 K} d T_1 + \frac{\sin A_2 (\cos A_3 - \cos A_1)}{2 K} d T_2 \\ &+ \frac{\sin A_3 (\cos A_1 - \cos A_2)}{2 K} d T_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Con las (4) y (5) y cualquiera de las (2) se hallan las siguientes más adecuadas para el cálculo logarítmico y en las que se ha agregado el divisor 15 a  $d \varphi$  para que resulte expresada en segundos de arco, cuando  $d T_1$ ,  $d T_2$  y  $d T_3$  lo estén en segundos de tiempo.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi}{15 \cos \varphi} &= \frac{\sin A_1 \cos \frac{1}{2}(A_2 + A_3) \sin \frac{1}{2}(A_3 - A_2)}{K} dT_1 \\
 &+ \frac{\sin A_2 \cos \frac{1}{2}(A_1 + A_3) \sin \frac{1}{2}(A_1 - A_3)}{K} dT_2 \\
 &+ \frac{\sin A_3 \cos \frac{1}{2}(A_2 + A_1) \sin \frac{1}{2}(A_2 - A_1)}{K} dT_3 \\
 dE &= \frac{\sin A_1 \sin \frac{1}{2}(A_2 + A_3) \sin \frac{1}{2}(A_3 - A_2)}{K} dT_1 \\
 &+ \frac{\sin A_2 \sin \frac{1}{2}(A_1 + A_3) \sin \frac{1}{2}(A_1 - A_3)}{K} dT_2 \\
 &+ \frac{\sin A_3 \sin \frac{1}{2}(A_2 + A_1) \sin \frac{1}{2}(A_2 - A_1)}{K} dT_3
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$K = 2 \sin \frac{1}{2}(A_3 - A_1) \sin \frac{1}{2}(A_3 - A_2) \sin \frac{1}{2}(A_1 - A_2)$$

Haciendo la suma de los coeficientes de  $d\varphi$  y  $dE$ , se ve que son respectivamente = a 0 y + 1, lo que sirve para comprobar los cálculos numéricos.

Poniendo

$$a_1 = \sin A_1 \sin \frac{1}{2}(A_2 + A_3) \sin \frac{1}{2}(A_3 - A_2)$$

$$a_2 = \sin A_2 \sin \frac{1}{2}(A_1 + A_3) \sin \frac{1}{2}(A_1 - A_3)$$

$$a_3 = \sin A_3 \sin \frac{1}{2}(A_2 + A_1) \sin \frac{1}{2}(A_2 - A_1)$$

se tiene

$$dE = \frac{a_1}{K} dT_1 + \frac{a_2}{K} dT_2 + \frac{a_3}{K} dT_3$$

y

$$\frac{a_1}{K} + \frac{a_2}{K} + \frac{a_3}{K} = +1$$

Poniendo

$$X = \cotg \frac{A_2 + A_3}{2} \frac{a_1}{K} \cdot 15 \cos \varphi$$

$$Y = \cotg \frac{A_1 + A_3}{2} \frac{a_2}{K} \cdot 15 \cos \varphi$$

$$Z = \cotg \frac{A_2 + A_1}{2} \frac{a_3}{K} \cdot 15 \cos \varphi$$

se tiene

$$d\varphi = -X dT_1 - Y dT_2 - Z dT_3$$

y

$$X + Y + Z = 0.$$

El formulario para este cálculo está arreglado con esta notación.

**265. Circunstancias favorables para la elección de estrellas.**— Al analizar las ecuaciones, se vé que el denominador  $K$  es un máximo cuando las tres diferencias de azimut son  $120^\circ$ ; por lo tanto, esta es la condición favorable para determinar conjuntamente latitud y hora. Se encontrará el observador en condiciones excelentes si ninguna de esas diferencias es inferior a  $90^\circ$  o superior a  $180^\circ$ . Gauss añade la importante advertencia práctica que sigue: claro es que las estrellas cuya altura varía lentamente son tan útiles como las que se elevan o descienden con rapidéz, pues la condición esencial no es tanto que se precise el instante en que la estrella llegue a cierto lugar, como que a la hora que se anote, la estrella no esté sensiblemente distante de aquel círculo de altura.

Podemos, por consiguiente, elegir sin escrúpulo una de las estrellas próximas a su culminación, o bien la Polar, y satisfacer fácilmente la condición anterior. Por otra parte, cumpliendo la primera condición, de grandes diferencias entre los azimutes, alguna de las otras estrellas variará rápidamente de altura.

El Conde de Cañete del Pinar agrega a este análisis de Chauvenet, la consideración de que si la observación está exclusivamente destinada a la determinación de la latitud, lo importante es que  $d\varphi$  tenga el menor valor posible y para ello no basta procurar que el denominador  $K$  sea un máximo, puesto que los numeradores también son función de las variables  $A_1$ ,  $A_2$ , y aún los mismos errores  $dT_1$ ,  $dT_2$ , y  $dT_3$  lo son; por lo cual puede suceder que los valores de las variables que hacen máximo al denominador  $K$ , aumenten considerablemente dichas funciones y que no resulte mínimo el valor de  $d\varphi$ .

Para simplificar, sin tener en cuenta el Estado absoluto y atendiendo exclusivamente a la determinación de la latitud y ya que los errores en la hora  $dT_1$ ,  $dT_2$  y  $dT_3$ , son muy variables; pues es evidente que en el vertical primario donde la velocidad de la estrella en altura es mucha, el error en la hora será muy pequeño; mientras que, cerca del meridiano donde la velocidad vertical es casi insensible, el error probable en la hora puede ser algunos segundos; por esto conviene eliminar el error en la hora, en el cálculo de  $\varphi$ .

Atendiendo a estas consideraciones ha llegado a establecer como condición más favorable para la aplicación del método de Gauss a la observación de la latitud, que las estrellas tengan la siguiente posición: *Dos azimutes próximos al meridiano a un mismo lado del zénit, y el tercero aproximadamente suplementario al promedio de aquellos.*

Por ejemplo.

$$\begin{aligned} A_2 &= 160^\circ & A_1 &= 5^\circ \\ A_3 &= 190^\circ \end{aligned}$$

En la práctica no siempre será posible encontrar estrellas que satisfagan esta condición rigurosamente y habrá que contentarse con llenarla aproximadamente. Por ejemplo; dos azimutes, a uno y otro lado del meridiano

# CALCULO DE $\varphi$ Y TIEMPO. — METODO: GAUSS

Día 23 de Febrero de 1914.

Punto de observación: San Blas.

$$\mu = +1^s 00 \frac{\mu}{24} = 0^s 041$$

Estrellas	Procyon	$\alpha_1 = 7^h 34^m 49^s 81$	$\delta_1 = 5^{\circ} 26' 45'' 26$ N
	$\alpha$ Crucis	$\alpha_2 = 12 \ 21 \ 50 \ 24$	$\delta_2 = 62 \ 37 \ 21 \ 75$ S
	Rigel	$\alpha_3 = 5 \ 10 \ 25 \ 32$	$\delta_3 = 8 \ 18 \ 00 \ 61$ S

$\alpha_2 = 12^h 21^m 50^s 24$	$\alpha_3 = 5^h 10^m 25^s 32$	$T_2 = 13^h 36^m 35^s 27$	$T_3 = 13^h 50^m 11^s 28$
$\alpha_1 = 7 \ 34 \ 49 \ 81$	$\alpha_1 = 7 \ 34 \ 49 \ 81$	$T_1 = 12 \ 57 \ 22$	$T_1 = 12 \ 57 \ 22$
$I = \alpha_2 - \alpha_1 = 4 \ 47 \ 00 \ 43$	$I' = \alpha_3 - \alpha_1 = 21 \ 35 \ 35 \ 51$	$I''c = T_2 - T_1 = 0 \ 39 \ 13 \ 27$	$I''c = T_3 - T_1 = 0 \ 52 \ 49 \ 28$
$II = 24 \ 39 \ 19 \ 69$	$II' = 24 \ 52 \ 57 \ 93$	$\frac{\mu}{24} \times I''c = 0 \ 02$	$\frac{\mu}{42} \times I''c = 0 \ 03$
$II - I = 19 \ 52 \ 19 \ 26$	$II' - I' = 3 \ 17 \ 22 \ 42$	$I''m = 0 \ 39 \ 13 \ 25$	$I''m = 0 \ 52 \ 49 \ 25$
$\frac{\lambda}{2} = .9 \ 56 \ 09 \ 63$	$\frac{\lambda'}{2} = 1 \ 38 \ 41 \ 21$	Corrección = 06 443	Corrección = 08 677
$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^0 = 149^{\circ} 02' 24'' 45$	$\left(\frac{\lambda'}{2}\right)^0 = 24^{\circ} 40' 18'' 15$	$(II) = I''_2 = 0 \ 39 \ 19 \ 693$	$(II) = I''_3 = 0 \ 52 \ 57 \ 927$
$\delta_2 = -62 \ 37 \ 21 \ 75$	$\delta_3 = -62 \ 37 \ 21 \ 75$	$\delta_2 = -8^{\circ} 18' 00'' 61$	$\delta_3 = -8^{\circ} 18' 00'' 61$
$\delta_1 = +5 \ 26 \ 45 \ 26$	$\delta_1 = +5 \ 26 \ 45 \ 26$	$\delta_1 = +5 \ 26 \ 45 \ 26$	$\delta_1 = +5 \ 26 \ 45 \ 26$
$\delta_2 - \delta_1 = -68 \ 04 \ 07 \ 01$	$\delta_2 + \delta_1 = -57 \ 10 \ 36 \ 49$	$\delta_2 - \delta_1 = -13 \ 44 \ 45 \ 87$	$\delta_2 + \delta_1 = -2 \ 51 \ 15 \ 35$
$\frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = -34 \ 02 \ 03 \ 50$	$\frac{\delta_2 + \delta_1}{2} = -28 \ 35 \ 18 \ 25$	$\frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = -6 \ 52 \ 22 \ 93$	$\frac{\delta_2 + \delta_1}{2} = -1 \ 25 \ 37 \ 67$

Análisis de los signos para determinar M y M'.

$$m \text{ sen } M = \text{sen } \frac{\lambda}{2} \cotg \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}; \quad m' \text{ sen } M' = \text{sen } \frac{\lambda'}{2} \cotg \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}$$

$$m \text{ cos } M = \cos \frac{\lambda}{2} \tg \frac{\delta_2 + \delta_1}{2}; \quad m' \text{ sen } M' = \cos \frac{\lambda'}{2} \tg \frac{\delta_2 + \delta_1}{2}$$

$\lg \tg \frac{\lambda}{2} = 1.7780846 (n)$	$\lg \tg \frac{\lambda'}{2} = 1.6621442$	$\lg \text{sen } \frac{\lambda}{2} = 1.7113328$	$\lg \text{sen } \frac{\lambda'}{2} = 1.6205715$
$\lg \cotg \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = 0.1704518 (n)$	$\lg \cotg \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = 0.9188840 (n)$	$\lg \cotg \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = 0.1704518$	$\lg \cotg \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = 0.9188840$
$\lg \cotg \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} = 0.2636395 (n)$	$\lg \cotg \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} = 1.6035693 (n)$	Co. $\lg \text{sen } M = 0.0693722$	Co. $\lg \text{sen } M' = 0.0000093$
$\lg \tg M = 0.2121759 (n)$	$\lg \tg M' = 2.1845975$	$\lg m = 1.9511568$	$\lg m' = 0.5394648$
$M = 301^{\circ} 31' 46'' 83 [4]$	$M' = 269^{\circ} 37' 31'' 58 [3]$	$\lg \frac{m}{m'} = 1.4116920 = \lg \tg \psi$	
		$\psi = 14^{\circ} 28' 08'' 88$	
		$45^{\circ} - \psi = 30 \ 31 \ 51 \ 12$	

$\frac{\lambda}{2} = 149^{\circ} 02' 24'' 45$	$\frac{\lambda'}{2} = 24^{\circ} 40' 18'' 15$	$N' = 115^{\circ} 02' 46'' 57$	$\frac{N' - N}{2} = 133^{\circ} 46' 04'' 47$
$M = 301 \ 31 \ 46 \ 83$	$M' = 269 \ 37 \ 31 \ 58$	$N = 207 \ 30 \ 37 \ 62$	
$N = \frac{\lambda}{2} - M = 207 \ 30 \ 37 \ 62$	$N' = \frac{\lambda'}{2} - M' = 115 \ 02 \ 46 \ 57$	$N' - N = 267 \ 32 \ 08 \ 95$	$\frac{N' + N}{2} = 161 \ 16 \ 42 \ 10$
		$N' + N = 322 \ 33 \ 24 \ 18$	

$\lg \tg (45^{\circ} - \psi) = 1.7706833$	$\lg \cos (I + N) = 1.9811292$	$t = 23^h 17^m 01^s 86$
$\lg \cotg \frac{N' - N}{2} = 1.9813160 (n)$	$\lg m = 1.9511568$	$\alpha = 7 \ 34 \ 49 \ 81$
$\lg \tg \left(I + \frac{N' + N}{2}\right) = 1.7519993$	$\lg \tg \varphi_1 = 1.9822860$	$H_s = 6 \ 51 \ 51 \ 67$
$I + \frac{N' + N}{2} = 150^{\circ} 32' 10'' 77$	$\varphi_1 = 40^{\circ} 33' 04'' 64$	$H_s \text{ a Ohm} = 22 \ 10 \ 48 \ 60$
$\frac{N' + N}{2} = 161 \ 16 \ 42 \ 10$	$\lg \cos (I + N') = 1.3928811$	$Hms = 8 \ 41 \ 03 \ 07$
$I = 349 \ 15 \ 28 \ 67$	$\lg m' = 0.5394648$	corrección = 1 25 06
$N = 207 \ 30 \ 37 \ 62$	$\lg \tg \varphi_2 = 1.9322859$	$Hm = 8 \ 39 \ 37 \ 71$
$I + N = 556 \ 46 \ 06 \ 29$	$\varphi_2 = 4 \ 0^{\circ} 33' 04'' 62$	$T_1 = 12 \ 57 \ 22$
$N' = 115 \ 02 \ 46 \ 57$	$\varphi m = 40 \ 33 \ 04 \ 63$	$C = 4 \ 17 \ 44 \ 29$
$I + N' = 464 \ 18 \ 15 \ 24$		

### 265. Circ

analizar las  
las tres dife  
favorable pa  
servador en  
a  $90^\circ$  o supe  
sigue: claro  
como las qu  
cial no es b  
to lugar, co  
te distante

Podemos,  
ximas a su  
ción anterio  
diferencias  
mente de al

El Conde  
consideració  
determinació  
posible y pa  
mo, puesto  
 $A_1$ ,  $A_2$ , y  $\epsilon$   
puede suced  
minador  $K$ ,  
mínimo el v.

Para simp  
clusivamente  
hora  $dT_1$ , d  
tical primar  
en la hora s  
velocidad ve  
ser algunos  
cálculo de  $\epsilon$

Atendiend  
ción más fa  
ción de la l  
mules próxi  
ximadament

Por ejempl

En la prác  
esta condici  
madamente.

# COEFICIENTES DIFERENCIALES.—METODO: GAUSS

Estrellas { Procyon  
α Crucis  
Rigel

Día 23 de Febrero de 1914.

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos h_1$$

$$\lg \text{sen } \varphi = \overline{1.81299} \ (n)$$

$$\lg \text{sen } \delta = \overline{2.97723}$$

$$\lg (I) = \overline{2.79027} \ (n)$$

$$= \overline{1.87106}$$

$$= \overline{2.91921}$$

$$\lg \text{sen } h = \overline{1.83312}$$

$$h \text{ común} = 42^{\circ} 67' 20''$$

$$\lg \cos \varphi = \overline{1.88071}$$

$$\lg \cos \delta = \overline{1.99803}$$

$$\lg \cos I = \overline{1.99232}$$

$$\lg (II) = \overline{1.87106}$$

$$= \overline{0.03764}$$

$$= \overline{1.83312}$$

$$\lg \cos \varphi = \overline{1.88071}$$

$$\lg 15 = \overline{1.17609}$$

$$\lg 15 \cos \varphi = \overline{1.05680}$$

$$f_2 = t_1 + \lambda$$

$$t_1 = 349^{\circ} 16' 28'' 67$$

$$\lambda = 298 \ 01 \ 48 \ 90$$

$$t_2 = 287 \ 20 \ 17 \ 57$$

$$\lg 2 = 0.30103$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (\Lambda_2 - \Lambda_1) = \overline{1.95450}$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (\Lambda_2 - \Lambda_1) = \overline{1.99355} \ (n)$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (\Lambda_1 - \Lambda_2) = \overline{1.76513}$$

$$\lg K = 0.01421 \ (n)$$

$$t_3 = t_1 + \lambda'$$

$$t_1 = 349^{\circ} 15' 28'' 67$$

$$\lambda' = 49 \ 20 \ 36 \ 30$$

$$t_2 = 38 \ 36 \ 04 \ 97$$

$$\lg \sec h = 0.13556$$

$$\lg \text{sen } t_1 = \overline{1.27042} \ (n)$$

$$\lg \cos \delta_1 = \overline{1.99803}$$

$$\lg \text{sen } A_1 = \overline{1.40401} \ (n)$$

$$A_1 = 194^{\circ} 41' 10''$$

$$A_2 = 323 \ 08 \ 50$$

$$A_2 - A_1 = 128 \ 27 \ 40$$

$$\frac{A_2 - A_1}{2} = 64 \ 13 \ 50$$

$$A_2 + A_1 = 517 \ 50 \ 00$$

$$\frac{A_2 + A_1}{2} = 258 \ 55 \ 00$$

$$\lg 15 \cos \varphi = 1.05680$$

$$\lg \frac{a}{K} = \overline{1.21959}$$

$$\lg \cotg \frac{A_2 + A_1}{2} = 0.02572$$

$$\lg X = 0.30211$$

$$X = 2.0050$$

$$\text{sen } A = \sec h \cdot \text{sen } t \cdot \cos \delta$$

$$\lg \sec h = 0.13556$$

$$\lg \text{sen } t_2 = \overline{1.97980} \ (n)$$

$$\lg \cos \delta_2 = \overline{1.66262}$$

$$\lg \text{sen } A_2 = \overline{1.77798} \ (n)$$

$$A_2 = 323^{\circ} 08' 50''$$

$$A_3 = 123 \ 27 \ 40$$

$$A_2 - A_3 = 199 \ 41 \ 10$$

$$\frac{A_2 - A_3}{2} = 99 \ 50 \ 35$$

$$A_2 + A_3 = 446 \ 36 \ 30$$

$$\frac{A_2 + A_3}{2} = 223 \ 18 \ 15$$

$$\lg 15 \cos \varphi = 1.05680$$

$$\lg \frac{a'}{K} = \overline{1.08176}$$

$$\lg \cotg \frac{A_2 + A_3}{2} = 0.41749 \ (n)$$

$$\lg Y = 0.55605 \ (n)$$

$$Y = -3.5979$$

$$\lg \sec h = 0.13556$$

$$\lg \text{sen } t_3 = \overline{1.79031}$$

$$\lg \cos \delta_3 = \overline{1.99542}$$

$$\lg \text{sen } A_3 = \overline{1.92129}$$

$$A_3 = 123^{\circ} 27' 40''$$

$$A_1 = 194 \ 41 \ 10$$

$$A_1 - A_3 = 71 \ 13 \ 30$$

$$\frac{A_1 - A_3}{2} = 35 \ 36 \ 45$$

$$A_1 + A_3 = 318 \ 08 \ 50$$

$$\frac{A_1 + A_3}{2} = 159 \ 04 \ 25$$

$$\lg 15 \cos \varphi = 1.05680$$

$$\lg \frac{a''}{K} = \overline{1.85340}$$

$$\lg \cotg \frac{A_2 + A_1}{2} = \overline{1.29201}$$

$$\lg Z = 0.20221$$

$$Z = 1.5930$$

$$\lg \text{sen } A_1 = \overline{1.40401} \ (n)$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (A_2 + A_1) = \overline{1.83624} \ (n)$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (A_2 - A_1) = \overline{1.99355} \ (n)$$

$$\lg a_1 = \overline{1.23380} \ (n)$$

$$\lg K = 0.01421 \ (n)$$

$$\lg \frac{a_1}{K} = \overline{1.21959}$$

$$\frac{a_1}{K} = 0.1658$$

$$\lg \text{sen } A_2 = \overline{1.77798} \ (n)$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (A_1 + A_2) = \overline{1.55286}$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (A_1 - A_2) = \overline{1.76513}$$

$$\lg a_2 = \overline{1.09597} \ (n)$$

$$\lg K = 0.01421 \ (n)$$

$$\lg \frac{a_2}{K} = \overline{1.08176}$$

$$\frac{a_2}{K} = 0.1267$$

$$\lg \text{sen } A_3 = \overline{1.92129}$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (A_2 + A_1) = \overline{1.99182} \ (n)$$

$$\lg \text{sen } \frac{1}{2} (A_2 - A_1) = \overline{1.95450}$$

$$\lg a_3 = \overline{1.86761} \ (n)$$

$$\lg K = 0.01421 \ (n)$$

$$\lg \frac{a_3}{K} = \overline{0.85340}$$

$$\frac{a_3}{K} = 0.7135$$

$$\frac{a_1}{K} + \frac{a_2}{K} + \frac{a_3}{K} = +1$$

$$dC = \frac{a_1}{K} \cdot dT_1 + \frac{a_2}{K} \cdot dT_2 + \frac{a_3}{K} \cdot dT_3$$

$$X + Y + Z = C$$

$$d\varphi = -X \cdot dT_1 - Y \cdot dT_2 - Z \cdot dT_3$$

265.

analiza  
las tres  
favorab  
servado  
a 90° o  
sigue: c  
como la  
cial no  
to luga  
te dista

Pode  
ximas a  
ción an  
diferen  
mente .

El C  
conside  
determi  
posible  
mo, pu  
As, As  
puede s  
minado  
minimo,

Para  
clusiva  
hora d  
tical pr  
en la h  
velocid  
ser alg  
cálculo

Aten  
ción ni  
ción de  
mutes  
ximada

Por c

En la  
esta co  
madame



aunque disten  $20^{\circ}$  o  $30^{\circ}$  del mismo, darán un sistema aceptable con tal que el tercer azimut sea proximalmente el suplemento de su promedio.

**266. Elección de estrellas.** — El método más práctico para proceder a esta elección consiste en el empleo de un globo celeste; se inclina su eje polar según la latitud aproximada del lugar y se hace corresponder su círculo meridiano principal con la ascensión recta igual a la hora sidérea que corresponde a la hora media a la cual se va a observar; con un compás se medirán las distancias del círculo que representa el horizonte a las estrellas que parezcan convenientes, hasta encontrar tres, que en horas no muy diferentes, tengan la misma altura, dentro de las condiciones de azimut establecidas. Si para la hora elegida para la observación no se hallan tres estrellas que satisfagan las condiciones del método, habrá que cambiarla, llevando el círculo meridiano sobre otra ascensión recta.

La magnitud de las estrellas elegidas debe estar comprendidas entre 1 y 3. Elegidas las tres estrellas convenientes se hace un cálculo aproximado, con 4 cifras decimales en los logaritmos, del horario  $t$  que corresponde a la altura  $h$  que será la de observación con la fórmula.

$$\cos t = \sin h \sec \varphi \sec \delta - \tan \varphi \tan \delta.$$

Conocido el horario  $t$ , se tiene  $H s = \alpha + t$ , de donde se deduce la  $H m$  en que la estrella alcanzará la altura  $h$ , en el sextante se pone el doble de la altura observada que corresponde a la altura verdadera y con el tiempo que exige la práctica del observador, este se pondrá en observación momentos antes de la  $H m$  calculada.

Cuando no se tiene globo celeste, se hace un tanteo previo por medio de un catálogo de estrellas o el Almanaque náutico; eligiendo en primer lugar dos de magnitud conveniente, cuyas ascensiones rectas, comprendidas dentro la  $H_s$  en que la observación sea factible, no difieran mucho entre sí y cuyas declinaciones sumadas den aproximadamente un arco igual a  $2\varphi$ , tales estrellas culminarán en horas próximas y con alturas casi iguales, la una al N y la otra al S del zenit. Sean  $E_1$  y  $E_2$  las estrellas que culminan con mayor y menor altura respectivamente.

Con la latitud aproximada se calcula las dos alturas meridianas y se fija como altura de observación una que sea un poco menor que la menor de aquellas; después se calcula proximalmente los horarios y azimutes que les corresponde.

Como tercera estrella se elegirá otra que difiera poco en ascensión recta y en declinación de la estrella  $E_2$  pero que culmine con mayor altura y se calcula su horario y azimut. Finalmente se combinarán las observaciones de manera que se hagan en el mínimo intervalo de tiempo y en las condiciones azimutales establecidas.

**Ejemplo.** — El 10 de Mayo de 1914, en latitud  $\varphi = 40^{\circ}$  S, se quiere observar alturas iguales de tres estrellas entre 8h y 10h p. m.

$$\text{Ascensión Recta del Sol medio} = 3^h 09^m$$

$$H_s = (8^h, 10^h) + 3^h 09^m = (11^h 09^m, 13^h 09^m)$$

cuando la estrella culmina, la  $H_s$  del paso es igual a su ascensión recta.

Buscamos entre 11h y 13h dos estrellas que difieran poco en su ascensión recta y cuyas declinaciones suman próximamente  $80^\circ$ .

Encontramos varios pares, elegimos

$$(E_1) \text{ } \epsilon \text{ Corvi } \text{mag} = 3.2 \quad \alpha = 12^h 05^m \quad \delta = 22^\circ 08' \text{ S}$$

$$(E_2) \text{ } \delta \text{ Crucis } \text{ } = 3.1 \quad \alpha = 12^h 10^m \quad \delta = 58^\circ 16' \text{ S}$$

$$\text{Suman} = 80^\circ 24'$$

las alturas de culminación son

$$\text{para } E_1 = 72^\circ 02'$$

$$E_2 = 71^\circ 24'$$

La estrella  $E_2$  debe culminar del mismo lado que la  $E_1$  y con mayor altura, tenemos

$$(E_2) \text{ } \gamma \text{ Crucis } \text{Mag} = 1.6 \quad \alpha = 12^h 26^m \quad \delta = 56^\circ 38' \text{ S}$$

la altura de culminación es para

$$E_2 = 73^\circ 22'$$

Fijamos en  $71^\circ 20'$  la altura de observación, es evidente que tendremos que servirnos de un teodolito o un círculo de reflexión, pues el sextante no da alturas mayores de  $60^\circ$  en el horizonte artificial.

Con  $\varphi = 40^\circ$ ,  $h = 71^\circ 20'$  y el valor de  $\delta$  para cada estrella, calculamos los horarios y azimutes.

	$\alpha$ Corvi ( $E_1$ )	$\delta$ Crucis ( $E_2$ )	$\gamma$ Crucis ( $E_3$ )
$\varphi =$	40° S	40° S	40 S
$\delta =$	22 08 S	58 16 S	56 38
$\varphi - \delta =$	17 — 52	18 16	16 38
$\cos (\varphi - \delta) =$	0.9517	0.9496	0.9581
$\sin h =$	0.9474	0.9474	0.9474
$C =$	0.0043	0.0022	0.0107
$\log C =$	5.6335	5.5424	2.0294
$\log \sec \varphi =$	0.1157	0.1157	0.1157
$\log \sec \delta =$	0.0332	0.2790	0.2596
$\log 2 \sin \frac{t}{2} =$	5.7824	5.7571	2.4047
$t =$	0h25m	0h24m	0h51m
$\log \sin t =$	1.0569	1.0192	1.5458
$\log \cos \delta =$	1.9667	1.7209	1.7405
$\log \sec h =$	0.4947	0.4947	0.4947
$\log \sin A =$	1.4983	1.2548	1.5788
$A =$	18°	10°	22°
$t =$	0h25m E	0h24m E	0h51m E
$\alpha_s =$	12 05	12 10	12 26
$H_s =$	11 40	11 46	11 55
$\alpha_{\odot} =$	3 09	3 09	3.09
$H_m^{\odot} =$	8h31m	8h37m	8h23m
$t =$	0h25m O	0h24m O	0h51m O
$\alpha_s =$	12 05	12 10	12 26
$H_s =$	12 30	12 34	13 17
$\alpha_{\odot} =$	3 09	3.09	3.09
$H_m^{\odot} =$	9h21m	9h25m	10h08m

En resumen, las horas y azimutes correspondientes de cada estrella cuando alcanzan la altura  $71^{\circ}20'$  según se observe al O o E del meridiano, son las siguientes:

$\alpha$  Corvi ( $E_1$ )

Al E.	$H_m = 8h31m$	$A = 18^{\circ}$ NE
» O.	$H_m = 9h21m$	$A = 18^{\circ}$ NO

δ Crucis ( $E_2$ )

Al E.  $H_m = 8^h 37^m$   $A = 10^\circ$  SE

» O.  $H_m = 9^h 25^m$   $A = 10^\circ$  SO

γ Crucis ( $E_3$ )

Al E.  $H_m = 8^h 26^m$   $A = 22^\circ$  SE

» O.  $H_m = 10^h 08^m$   $A = 22^\circ$  SO

$E_2$  y  $E_3$  debemos observarlas una a cada lado del meridiano, si tomamos  $E_2$  al Este,  $E_3$  habrá que tomarla al O.

Tendremos

$E_2$  al Este  $H_m = 8^h 37^m$   $A = 10^\circ$  SE

$E_3$  » Oeste  $O_m = 10^h 08^m$   $A = 22^\circ$  SO

El promedio de las direcciones azimutales es  $6^\circ$  SO, conviene entonces observar  $E_1$  al Este cuando su azimut es  $18^\circ$  NE, la hora de la observación  $H_m = 8^h 31^m$ ; el intervalo de las observaciones es  $10^h 08^m - 8^h 51^m = 1^h 37^m$ .

La otra combinación sería.

$E_1$  al Oeste  $H_m = 9^h 25^m$   $A = 10^\circ$  SO

$E_2$  al Este  $H_m = 8^h 26^m$   $A = 22^\circ$  SE

en consecuencia

$E_1$  al Oeste  $H_m = 9^h 21^m$   $A = 18^\circ$  NO

y el intervalo de las observaciones  $0^h 59^m$ .

## CAPITULO XXIII.

### LONGITUD

**267. Generalidades.** — Para determinar la longitud es necesario que se conozca la hora local y la hora del primer meridiano en un mismo instante.

Los métodos que pueden emplearse para determinar la hora local son: observación de estrellas en su paso por el meridiano mediante un círculo meridiano portátil o un teodolito o la observación de dos o más estrellas en el instante que tienen la misma altura.

También puede determinarse la hora mediante la altura de los astros, medidas con un teodolito o sextante; en este caso deberán hacerse observaciones simétricas respecto al meridiano y determinarse los errores instrumentales para aplicar a las alturas las correcciones; de nivel para los teodolitos; de error de índice y excentricidad para el sextante.

La hora del primer meridiano puede ser obtenida mediante un top telegráfico, el que sirve para determinar el Estado absoluto de un sistema de cronómetros A, B y C, instalados en el lugar de observación; las observaciones de tiempo local se refieren a esos cronómetros. Durante una serie de días, en los cuales se hacen las observaciones, se recibe cada día un top telegráfico para determinar el Estado absoluto, esta serie de Estados permite conocer la marcha de los cronómetros y transportar los Estados conocidos en el instante del Top, al Estado que corresponde al instante de las observaciones de los astros.

Cuando no se dispone de línea telegráfica en el sitio de observación, puede determinarse el Estado  $E_A$  y la marcha  $m_A$  en un lugar próximo A donde se pueda recibir el top telegráfico; se lleva el sistema de cronómetros a B, lugar que se quiere determinar la longitud, se hacen las observaciones de tiempo y la marcha  $m_B$ , se vuelve con los cronómetros a A

y se determina un nuevo Estado y marcha mediante tops telegráficos  $E'_A$  y  $m'_A$ . Con estos elementos se calcula el  $E_s$  para el instante de la observación en B.

**268. Circunstancias favorables para la determinación del tiempo.** — La relación

$$dt = - \frac{d\varphi}{\tan A \cos \varphi} - \frac{dz}{\sin A \cos \varphi}$$

nos muestra que, en las observaciones en el vertical primario, es mínima la influencia de un error  $d\varphi$  y  $dz$ .

Como solo los astros cuya declinación es inferior a la latitud en valor absoluto y del mismo signo, cortan al vertical primario; reemplazando  $\sin A \cos \varphi$  por  $\sin p \cos \delta$  se deduce que es más ventajoso que  $\delta$  sea pequeño, subordinándose a la condición de que  $h > 20^\circ$  para evitar la incertidumbre en el valor de la refracción.

**269. Determinación del tiempo por alturas iguales de dos o más estrellas.** — Sean  $T_1$  y  $T_2$  las horas observadas en el cronómetro en el instante de la observación, corregida la última de movimiento con respecto al tiempo sidéreo por el intervalo transcurrido desde la primera observación. Se supone conocida la latitud e incógnita la altura, puesto que la acusada en el instrumento no debe entrar en el cálculo.

Sea  $T_2 - T_1$  el intervalo entre las observaciones corregida de movimiento, y, conservando las mismas notaciones que al tratar el método de Gauss para la latitud.

$$\begin{aligned} \lambda &= (T_2 - T_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = t_2 - t_1 \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos t_1 \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos (t_1 + \gamma). \end{aligned}$$

Por transformaciones idénticas a las hechas en (263) se obtiene

$$\sin \frac{1}{2} \lambda \cotg \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta'_1) = m \sin M$$

$$\cos \frac{1}{2} \lambda \tang \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) = m \cos M$$

$$\frac{1}{2} \lambda - M = N$$

$$\cos (t_1 + N) = \frac{\tan \varphi}{m}$$

La hora siderea de la primera observación, será

$$H_1 = \alpha_1 + t_1$$

que comparada con la hora del cronómetro, dará el Estado absoluto del mismo respecto al tiempo sidereo.

Si se han observado tres estrellas tendremos la nueva ecuación

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta_3 + \cos \varphi \cos \delta_3 \cos (t_1 + \lambda')$$

donde

$$\lambda' = (T_3 - T_1) - (\alpha_3 - \alpha_1) = t_3 - t_1$$

combinándola con la primera procedemos análogamente.

Calculando el tiempo local  $C = T - H_m^w$ , tenemos.

Siendo

$$\omega = H_m^I - H_m^w \text{ y } H_m^I = T - E$$

$$\omega = T - E - H_m^w = (T - H_m^w) - E = C - E.$$

El Estado E del cronómetro es conocido por una serie de tops telegráficos recibidos antes de la observación y siendo corregido después por la marcha en lo que corresponde al intervalo entre el instante en que se recibió el top y aquél en que se observó.

Del análisis de este método se deduce que las circunstancias favorables para la elección de los astros son los siguientes:

*Das estrellas en el vertical primario a uno y otro lado del meridiano, en gran altura y con pequeño intervalo de una a otra observación (270).*

**270. Análisis del método.** — Los errores de observación pueden atribuirse indistintamente a las horas o a las alturas. Si suponemos las horas exactas, habrá que considerar las alturas como afectadas de errores de observación ( $dh_1, dh_2$ ) distintos generalmente uno de otro, mientras que se reputará exacta la diferencia  $\lambda$ .

Las fórmulas generales dan por diferenciación

$$dh_1 + \cos A_1 d\varphi + \cos \varphi \text{ sen } A_1 dt - \cos p_1 d\delta_1 = 0$$

$$dh_2 + \cos A_2 d\varphi + \cos \varphi \text{ sen } A_2 dt - \cos p_2 d\delta_2 = 0$$

restando una de otra

$$dh_1 - dh_2 + (\cos A_1 - \cos A_2) d\varphi + \cos \varphi (\text{sen } A_1 - \text{sen } A_2) dt - (\cos p_1 d\delta_1 - \cos p_2 d\delta_2) = 0$$

$$\text{y } dt = \frac{(\cos p_1 d\delta_1 - \cos p_2 d\delta_2) - (dh_1 - dh_2) - (\cos A_1 - \cos A_2) d\varphi}{\cos \varphi (\text{sen } A_1 - \text{sen } A_2)}$$

# CALCULO DE TIEMPO

Punto de observación: San Blas

Día 27 de Febrero de 1914.

$$\varphi = 40^{\circ}33'03''62 \text{ S}$$

$$\mu = +1^{\circ} \quad \frac{\mu}{24} = 0.041$$

Estrellas {  $\beta$  Canis Majoris  
              {  $\alpha$  Libræ

$$\alpha_1 = 6^h 18^m 56^s 02 \quad \delta_1 = 17^{\circ}54'48''34 \text{ S.}$$

$$\alpha_2 = 14 \ 46 \ 08 \ 39 \quad \delta_2 = 15 \ 41 \ 18 \ 77 \text{ S.}$$

$$\alpha_3 = 14^h 46^m 08^s 39$$

$$T_2 = 16^h 48^m 59^s 78$$

$$\delta_3 = -15^{\circ}41'18''77$$

$$\alpha_1 = 6 \ 18 \ 56 \ 02$$

$$T_1 = 16 \ 01 \ 36 \ 25$$

$$\delta_1 = -17 \ 54 \ 48 \ 34$$

$$I = \alpha_2 - \alpha_1 = 8 \ 27 \ 12 \ 37$$

$$I' = T_2 - T_1 = 0 \ 47 \ 23 \ 53$$

$$\delta_2 + \delta_1 = -33 \ 36 \ 07 \ 11$$

$$II = 0 \ 47 \ 23 \ 50$$

$$\frac{\mu}{24} \times I' = 0 \ 03$$

$$\frac{\delta_2 + \delta_1}{2} = -16 \ 48 \ 03 \ 55$$

$$II - I = 16 \ 20 \ 18 \ 92$$

$$I' m = 0 \ 47 \ 23 \ 50$$

$$\delta_2 = -15^{\circ}41'18''77$$

$$\frac{\lambda}{2} = 8^h 10^m 09^s 46$$

$$\text{Corrección} = 7 \ 79$$

$$\delta_1 = -17 \ 54 \ 48 \ 34$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\circ} = 122^{\circ}32'21''90$$

$$(II) = I' s = 0 \ 47 \ 31 \ 29$$

$$\delta_2 - \delta_1 = 2 \ 13 \ 29 \ 57$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = 0.19516 \ (n)$$

$$\frac{\lambda}{2} = 122^{\circ}32'21''90$$

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = 1 \ 06 \ 44 \ 79$$

$$\lg \operatorname{cotg} \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = 1.71180$$

$$M = 89 \ 47 \ 08 \ 13$$

$$\lg \operatorname{cotg} \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} = 0.52008 \ (n) \quad N = \frac{\lambda}{2} - M = 32 \ 45 \ 13 \ 77$$

$$\lg \operatorname{tg} M = 2.42704 \ [1'']$$

$$f_1 = 3^h 53^m 30^s 11$$

$$f_2 = 20 \ 13 \ 49 \ 03$$

$$M = 89^{\circ}47'08''13$$

$$\alpha_1 = 6 \ 18 \ 56 \ 02$$

$$\alpha_2 = 14 \ 46 \ 08 \ 39$$

$$\lg \operatorname{sen} \frac{\lambda}{2} = 1.92584$$

$$H^s = 34 \ 12 \ 26 \ 13$$

$$H^s = 34 \ 59 \ 57 \ 42$$

$$\lg \operatorname{cotg} \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = 1.71180$$

$$H^s \text{ a } 0^{\text{hm}} = 22 \ 26 \ 34 \ 82$$

$$22 \ 26 \ 34 \ 82$$

$$\operatorname{Co.} \lg \operatorname{sen} M = 0.00000$$

$$H^m s = 11 \ 45 \ 51 \ 31$$

$$12 \ 33 \ 22 \ 60$$

$$\lg m = 1.63764$$

$$\text{Corrección} = 1 \ 55 \ 64$$

$$2 \ 03 \ 42$$

$$\lg \operatorname{tang} \varphi = 1.93229 \ (n)$$

$$H^m = 11 \ 43 \ 55 \ 67$$

$$12 \ 31 \ 19 \ 18$$

$$\lg \cos (f_1 + N) = 2.29465 \ (n) \ [2'']$$

$$T_1 = 16 \ 01 \ 36 \ 25$$

$$T_2 = 16 \ 48 \ 59 \ 78$$

$$f_1 + N = 91^{\circ}07'45''47$$

$$C = 4 \ 17 \ 40 \ 58$$

$$4 \ 17 \ 40 \ 00$$

$$N = 32 \ 45 \ 13 \ 77$$

$$E = 0 \ 08 \ 43 \ 44$$

$$E = 0 \ 08 \ 43 \ 47$$

$$f_1 = 54^{\circ}22'31''70$$

$$\omega = 4^h 08^m 57^s 14$$

$$\omega = 4^h 08^m 57^s 13$$

$$f_1 = 3^h 53^m 30^s 11$$

$$f_2 - f_1 = 16 \ 20 \ 18 \ 92$$

$$f_2 = 20 \ 13 \ 49 \ 03$$



El denominador se hace máximo para astros observados en el vertical primario, a ambos lados del meridiano;  $A_1 = 90^\circ$  y  $A_2 = -90^\circ$ .

La sola condición  $A_1 = A_2$ , anula el coeficiente de  $d\varphi$ , eliminando la influencia del error en latitud.

Para distintos valores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , serán  $\cos p_1$  y  $\cos p_2$  tanto menores cuanto más se aproximen las declinaciones a ser iguales a  $\varphi$ , o lo que es lo mismo, cuando las estrellas estén en el vertical primario con mayor altura y como esta circunstancia es también favorable para disminuir las anomalías de la refracción, se deduce que las circunstancias más ventajosas para practicar este método, son: Dos estrellas en el vertical primario a uno y otro lado del meridiano, en gran altura y con pequeño intervalo de una o otra observación.

**271. Elección de las estrellas.**—Para hacer la observación en las condiciones que se han determinado anteriormente, es necesario hacer un programa de trabajo mediante un cálculo previo para elegir las estrellas que más convengan. Supongamos en latitud  $40^\circ$  S el 27 de Febrero de 1904.

Las fórmulas propias cuando el astro está en el vertical primario, son:

$$\cos t = \frac{\tan \delta}{\tan \varphi}, \quad \text{sen } h = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \varphi}.$$

Para que el astro corte ese círculo es necesario que  $\varphi > \delta$ , y como hemos establecido que deben diferir muy poco, adoptaremos para  $\delta$  los valores extremos  $\delta = 30^\circ$  S y  $\delta = 35^\circ$  S.

	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 35^\circ$
$\log \tan \delta =$	1.7614	1.8452
$\log \cotg \varphi =$	0.0762	0.0762
$\log \cos t =$	1.8378	1.9214
$t =$	3h 06m	2h 15m
$\log \text{sen } \delta =$	1.6989	1.7586
$\log \text{cosec } \varphi =$	0.1919	0.1919
$\log \text{sen } h =$	1.8909	1.9505
$h =$	51°04'	63°10'

Queriendo hacer la observación a 11 h. p. m. próximamente y siendo para ese día la ascensión recta del sol medio =  $22^h 26^m$ .

$$H_s = H_m + \alpha_m = 11^h + 22^h 26^m = 9^h 26^m$$

Conocida la  $H_s$ , deducimos la ascensión recta de las estrellas que nos convienen combinando la  $H_s$  con los horarios obtenidos para  $30^\circ$  y  $35^\circ$  de declinación y teniendo en cuenta que estos horarios podemos tomarlos al E. u O.

	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 35^\circ$
$t$ al O	$\alpha = 6^h 20^m$	$\alpha = 7^h 13^m$
$t$ al E	$\alpha = 12^h 32^m$	$\alpha = 11^h 30^m$

Luego buscaremos en las Efemérides las estrellas cuya declinación esté comprendida entre  $30^\circ$  y  $35^\circ$  y próximos a esos valores, estando sus ascensiones rectas también comprendidas entre los valores determinados y próximos a ellos. Las estrellas convenientes que se encuentran son:

	Magnitud	$\alpha$	$\delta$
$\pi$ . Argus	2.7	7h 14 <sup>m</sup> 06 <sup>s</sup>	36° 56' 33" S
$\gamma$ . Canis Majoris	2.4	7h 20 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup>	29° 08' 04" S
$\tau$ . Centauro	3.0	15h 15 <sup>m</sup> 45 <sup>s</sup>	36° 15' 32" S

En el cálculo primero obtuvimos para  $h$  un valor comprendido entre  $51^\circ 04'$  y  $63^\circ 10'$ , como con el sextante no pueden observarse alturas mayores de  $60^\circ$  en el horizonte artificial, fijaremos en  $52^\circ$  la altura de observación.

Con el valor  $h = 52^\circ$ ,  $\varphi = 40^\circ$  S y la declinación de cada estrella calculamos aproximadamente el horario  $t$  de las mismas cuando tengan esa altura y los azimutes correspondientes a esos instantes.

	$\pi$ Argus (O)	$\gamma$ Canis (O)	$\tau$ Centauro (E)
$\varphi =$	40° S	40° S	40° S
$\delta =$	36° 36'	29° 08'	36° 15'
$\varphi - \delta =$	3 04	10 52	3 45
$\cos(\varphi - \delta) =$	0.9985	0.9820	0.9778
$\text{sen } h =$	0.7880	0.7880	0.7880
$C =$	0.2105	0.1940	0.2098
$\log C =$	$\overline{1.3232}$	$\overline{1.2878}$	$\overline{1.3218}$
$\log \sec \varphi =$	0.1157	0.1157	0.1157
$\log \sec \delta =$	0.0972	0.0587	0.0934
$\log 2 \text{ sen}^2 \frac{t}{2} =$	$\overline{1.5361}$	$\overline{1.4622}$	$\overline{1.5309}$
$t =$	3h 15m 56s O	2h 59m 00s O	3h 14m 40s O
$\alpha =$	7 14 06	7 20 41	13 15 45
$H_s =$	10 30 02	10 19 41	10 01 05
$\alpha_m =$	22 26	22 26	22 26
$H_m =$	12 04	11 53	11 35
$\log \cos \delta =$	$\overline{1.9028}$	$\overline{1.9413}$	$\overline{1.9066}$
$\log \text{sen } t =$	$\overline{1.8776}$	$\overline{1.8476}$	$\overline{1.8735}$
$\log \sec h =$	0.2106	0.2106	0.2106
$\log \text{sen } A =$	$\overline{1.5912}$	$\overline{1.9995}$	$\overline{1.9927}$
$A =$	78° 31' O	87° 15' O	79° 52' E

Estas tres estrellas nos permiten, con intervalo de media hora, observar al Este a 11h 35m aprox.,  $\tau$  Centauro cuando tiene  $52^\circ$  de altura y  $79^\circ 32'$

de Azimut; en las mismas condiciones a  $\eta$  Canis, al Oeste a  $11^h 53^m$  y  $A = 87^\circ 15'$  y a  $\eta$  Argus o  $12^h 04^m$  al Oeste, siendo su  $A = 78^\circ 31'$ .

Finalmente combinaremos la observación al Este con cada una de las hechas al Oeste y de los dos valores deducidos para el tiempo se hace la media.

272. Método N. Zinger.—La determinación del tiempo por observación de estrellas de casi la misma declinación en el instante que tienen la misma altura fué tratada de una manera completa y puesta por primera vez en práctica por el astrónomo señor N. Zinger en 1874; antes, otros habían propuesto este método, pero sin presentarlo en forma práctica, entre ellos Koehler en 1780.

Para la elección de los pares de estrellas que deben observarse, por reunir las condiciones que después se determinarán, existen varias tablas preparadas para diversas épocas, entre ellas la del profesor Stechert.

Con la determinación del tiempo por alturas iguales de dos estrellas no se obtiene la exactitud que se alcanza con un instrumento de paso, pero tiene el mérito especial de que puede emplearse en cualquier teodolito y prescindir del uso de un instrumento pesado cuyo trasporte y colocación es un inconveniente en las expediciones astronómicas.

Siendo  $t_E$  el horario de una estrella observada al Este del meridiano cuya ascensión recta es  $\alpha_E$

$$H_E^1 = \alpha_E - t_E$$

si  $\Delta T$  es la corrección del cronómetro para obtener la hora sidérea local y  $T_E$  la hora del cronómetro en el instante de la observación al Este

$$\Delta T = \alpha_E - t_E - T_E$$

análogamente para una estrella observado al Oeste

$$\Delta T = \alpha_W + t_W - T_W$$

y

$$\Delta T = \frac{1}{2} (\alpha_E + \alpha_W) - \frac{1}{2} (T_E + T_W) - \frac{1}{2} (t_E - t_W)$$

haciendo

$$(\alpha_E + \alpha_W) - (T_E + T_W) = 2\tau$$

$$\frac{1}{2} (t_E - t_W) = r$$

$$\Delta T = \tau - r$$

El horario de un astro está ligado con su altura, declinación y la latitud del lugar por la siguiente fórmula

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (1)$$

Observando los astros cuando tienen la misma altura  $h$ , en el mismo lugar de latitud  $\varphi$ , si fuese una misma estrella o dos de declinación exactamente igual; los horarios  $t_E$  y  $t_W$  serán iguales y el término correctivo

$$r = 0; \text{ además } H_E^1 = \frac{1}{2} (\alpha_E + \alpha_W)$$

No siendo posible hallar dos estrellas que tengan exactamente la misma declinación, se eligen estas de manera que su valor no difiera en más de  $1^{\circ} 10'$ , con la que se pueda calcular la corrección  $r_s$  con la fórmula que se deduce a continuación.

La variación  $\Delta t$  del horario para una variación  $\Delta \delta$  de la declinación; cuando la latitud y altura es constante está expresada por la fórmula

$$\Delta t = \frac{d t}{d \delta} \Delta \delta$$

la derivada  $\frac{d t}{d \nu}$  se obtiene de la fórmula (1)

$$\frac{d t}{d \delta} = \frac{\operatorname{tag} \varphi}{\operatorname{sen} l} - \frac{\operatorname{tag} \delta}{\operatorname{tag} l}$$

y

$$\Delta t = \left[ \frac{\operatorname{tag} \varphi}{\operatorname{sen} l} - \frac{\operatorname{tag} \delta}{\operatorname{tag} l} \right] \Delta \delta$$

poniendo

$$\Delta \delta = \delta_z - \delta_w = 2\epsilon$$

siendo

$$r_s = \frac{\Delta t}{2}$$

y encontrándose el segundo miembro expresado en segundos de arco

$$r_s = \frac{\epsilon''}{15} \left[ \frac{\operatorname{tag} \varphi}{\operatorname{sen} l} - \frac{\operatorname{tag} \delta}{\operatorname{tag} l} \right]$$

llamando

$$u = \operatorname{tag} \varphi \operatorname{cosec} l$$

$$v = \operatorname{tag} \delta \operatorname{cotg} l$$

$$r_s = \frac{\epsilon''}{15} (u - v)$$

donde como valor de  $\delta$  se toma el promedio entre las dos declinaciones

$\delta = \frac{1}{2} (\delta_z + \delta_w)$ , el valor de  $l$  está dado por

$$2 l = [(\alpha_z - \alpha_w) - (T_z - T_w)]$$

273. Análisis del método.—En el caso general de determinación del tiempo, por alturas iguales de dos estrellas, para un error de  $d\varphi$  en la latitud; se obtiene para el horario

$$d t = \frac{d \varphi}{\cos \varphi} \frac{\cos A_1 - \cos A_2}{\operatorname{sen} A_1 - \operatorname{sen} A_2} = \frac{d \varphi}{\cos \varphi} \operatorname{tag} \frac{1}{2} (A_1 + A_2)$$

para anular la influencia de  $d\varphi$

$$\operatorname{tag} \frac{1}{2} (A_1 + A_2) = 0$$

o sea  $A_1 + A_2 = 360^{\circ}$

Por esto las dos estrellas deben ser observadas en posición simétrica respecto al meridiano.

Para un error  $dh_1$  y  $dh_2$  en las alturas de las estrellas

$$dt = \frac{dh_2 - dh_1}{\cos \varphi (\sin A_1 - \sin A_2)}$$

el denominador se hace máximo para  $A_1 = 90^\circ$  y  $A_2 = -90^\circ$ ; es decir, cuando las dos estrellas estando a ambos lados del meridiano son observadas en el vertical primario.

Prácticamente, el azimut puede alejarse del vertical primario unos  $40^\circ$  siempre que para las dos estrellas el alejamiento se produzca hacia el mismo lado, hacia el N o S y en el mismo valor.

Para hacer las observaciones en las condiciones establecidas y en corto tiempo la diferencia de declinación no debe superar  $2^\circ$  o  $3^\circ$ , pero empleando el método de cálculo expuesto esa diferencia no debe ser mayor de  $1^\circ 10'$ .

La distancia zenital en la observación no debe ser muy grande ni muy chica, en este último caso se tiene el inconveniente de una rápida variación en la elevación del anteojo y un cambio relativamente rápido del azimut; si es muy grande la distancia zenital, puede influir una desigual refracción atmosférica; su valor, generalmente, se limita entre  $20^\circ$  y  $70^\circ$ .

**274. Práctica de la observación.** — El instrumento usado para este trabajo puede ser un teodolito de cualquier tipo provisto de un nivel sensible paralelo al círculo vertical y solidario con el anteojo. El retículo estará provisto de varios hilos horizontales y dos o tres hilos verticales; en la práctica se ha encontrado muy conveniente el empleo de cinco hilos horizontales con intervalos de  $2'$ .

El instrumento se colocará en su trípode o mejor sobre el pilar que es necesario construir para dejar señalado el punto de observación; se determinará el azimut aproximado de una mira y esta servirá de referencia para buscar la estrella en azimut.

Pocos minutos antes de la hora calculada para la observación de la primera estrella, colóquese el anteojo en la distancia zenital calculada para la observación de la primera estrella y oriéntese en el azimut correspondiente. Llévase el nivel fijo al anteojo a una posición tal que la burbuja quede en el centro aproximadamente.

Cuando la estrella entra en el campo del anteojo se observará que tiene un desplazamiento oblicuo con respecto a los hilos del retículo y cuando se aproxime al primer hilo horizontal se moverá el anteojo en azimut con el tornillo de coincidencia del círculo horizontal de manera que la estrella corte a ese hilo en el centro de dos hilos verticales; en este instante se tomará el tope del cronómetro y enseguida se hará la lectura del nivel. La estrella continuará su movimiento oblicuo y se continuará girando el instrumento en azimut, para que el corte del segundo hilo horizontal se haga en el centro de los mismos hilos verticales elegidos para la primera obser-

vación, se procedera en forma análoga con los otros hilos. Al final se efectuará la lectura del nivel y con esto termina la observación de la primera estrella.

La hora del paso de la estrella puede ser tomada a ojo y oído o por medio de un cronógrafo.

Luego se dirige el anteojo en el azimut de la otra estrella de la pareja y se llevará el nivel de manera que los extremos de la burbuja indique las mismas lecturas hechas en la observación de la primera estrella, esta nivelación será efectuada en el tornillo de plataforma o tangente cuyo movimiento no afecte para nada ni la conexión entre el nivel y el anteojo, ni entre el anteojo y el círculo vertical.

Cuando aparece la segunda estrella se observará un movimiento en altitud opuesto al de la primera, pero en la misma dirección en azimut. Se sigue exactamente el mismo procedimiento anterior, se lleva la estrella a cortar el primer hilo horizontal en el centro de los dos hilos verticales elegidos, se toma el tops y se lee el nivel, luego se mueve el instrumento en azimut para que el corte del segundo hilo se efectúe en la misma vertical y se toma la hora de cada cruce, al final se lee el nivel.

Con esto queda lista la observación de un par.

Debe tenerse mucho cuidado durante la observación de un par que no se modifique la posición relativa del nivel y anteojo y de no variar la distancia zenital en el círculo vertical.

Una determinación completa del tiempo se compone, por lo menos, de la observación de dos pares, el primero en orden E/W y el segundo W/E. Para tener una buena determinación se observará cuatro pares en el siguiente orden

E/W, W/E; W/E, E/W

o W/E, E/W; E/W, W/E

**275. Programa de observación.** — Los datos para el calaje de las estrellas se obtienen con las cantidades auxiliares de las tablas preparadas por el profesor Stechert (ampliada y revisada para nuestras latitudes por el Teniente de Fragata P. Luisoni) y un cálculo preliminar para el que es suficiente emplear tres decimales en los logaritmos.

Las fórmulas que se aplican se deducen como sigue.

$$\text{sen } z \cos A = \text{sen } \varphi \cos \delta \cos l - \cos \varphi \cos \delta$$

$$\text{sen } z \text{ sen } A = \cos \delta \cos l$$

$$(a) \quad \cotg A = \frac{\text{sen } \varphi \cos \delta \cos l - \cos \varphi \text{ sen } \delta}{\cos \delta \text{ sen } l}$$

$$(b) \quad \cos z = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos l$$

hagamos

$$p \sin P = \cos \delta \cos t$$

$$p \cos P = \sin \delta$$

$$q = - \frac{p}{\cos \delta \sin t}$$

reemplazando en (a) y (b)

$$\cos z = p \sin (P + \varphi)$$

$$\cotg A = q \cos (P + \varphi)$$

Las cantidades  $p$ ,  $P$ ,  $q$  dependen sólo de la posición de la estrella, es decir, de su declinación y horario,  $t = H_s^1 - \alpha_*$ .

La ascensión recta puede considerarse constante y  $t$  dependerá sólo de la  $H_s^1$  en la que se observará.

Anteriormente hemos visto que para  $r^s = 0$ .

$$H_s^1 = \frac{1}{2} (\alpha_E + \alpha_W)$$

Las horas para las cuales las distancias zenitales serán iguales están comprendidas entre

$$\frac{1}{2} (\alpha_E + \alpha_W) - 10^m \text{ y } \frac{1}{2} (\alpha_E + \alpha_W) + 10^m.$$

En las tablas Stechert están dados los valores de  $p$ ,  $q$  y  $P$  para dichos instantes; con ellos se puede calcular  $z$  y  $A$  para 10 minutos antes y 10 minutos después del instante en que ambas estrellas tendrán la misma altura y las parejas de estrellas están elejidas de acuerdo con las condiciones establecidas; la última columna da los límites en latitud de los lugares en que se deben observar.

La altura y hora de la observación se deduce de un gráfico. Conocida para cada estrella la altura correspondiente 10 minutos antes y después, se representa gráficamente la variación de altura en un sistema de ejes en que las abscisas son los tiempos y las ordenadas las alturas, trazadas las rectas correspondientes a cada estrella las coordenadas de la intersección serán la hora y altura en que estas serán iguales. De otro gráfico cuyos ejes representen las horas y azimutes, con la hora obtenida del primero se obtendrá el azimut de cada estrella en el instante en la observación.

**276. Corrección de la hora por inclinación.**—Para que ambas observaciones sean hechas con idéntica distancia zenital en las estrellas es necesario que el instrumento esté perfectamente nivelado o que en el instante de las observaciones el nivel solidario al antejo tenga la misma inclinación; en el primer caso se reducen ambas observaciones corrigiendo por inclinación

Hidrográfica, 52.

y en el segundo se reduce una de ellas teniendo en cuenta la diferencia de inclinación entre una y otra observación.

Si  $n$  es la graduación que corresponde al centro del nivel,  $i_e$  y  $o_e$  las lecturas de los extremos de la burbuja del lado del objetivo y del ocular en la observación al Este, la descentración de la burbuja del nivel estará dada por

$$\frac{1}{2} (i_e + o_e) - n = \frac{1}{2} [(i_e + o_e) - 2n]$$

Si  $u$  es el valor angular de una división del nivel, la inclinación será

$$J_z = \frac{1}{2} u [(i_e + o_e) - 2n]$$

Llamando  $\tau$  el tiempo que la estrella tarda en recorrer la distancia  $d$  entre los hilos extremos del retículo, por una simple proporción tendremos el valor de  $\Delta T_z$  correspondiente a la inclinación  $J_z$ .

$$\frac{\Delta T_z}{J_z} = \frac{\tau}{d}$$

y

$$\Delta T_z = \frac{u}{2d} \tau [(i_e + o_e) - 2n]$$

haciendo

$$S = \frac{u}{2d}$$

$$\Delta T_z = S \tau [(i_e + o_e) - 2n]$$

Los valores de  $S$  pueden ser tabulados como cantidades constantes del instrumento para cada par de hilos del retículo.

Análogamente para la observación al Oeste,

$$\Delta T_w = S \tau [(i_w + o_w) - 2n]$$

Si en vez de reducir ambas observaciones a la posición de la burbuja centrada, se refiere a una de las observadas, la del Este, la corrección estará dada por

$$\Delta T_z - \Delta T_w = \pm S \tau [(i_e - i_w) + (o_e - o_w)]$$

Los signos de  $S$  y  $\tau$  siempre son positivos y el signo  $+$  o  $-$  de la fórmula debe ser tomado según que la lectura del nivel aumente o disminuya desde el objetivo al ocular.

Puede aplicarse el mismo valor de la reducción a todas las estrellas, pero



es preferible hacer en cada caso la reducción calculada con el valor de  $\tau$  observado para cada estrella.

La relación  $\frac{u}{d} = S'$  puede determinarse directamente; se hace coincidir el hilo horizontal superior del retículo con la graduación de una regla colocada verticalmente a unos 40 ms. y se centra la burbuja; luego con el tornillo de base se mueve el anteojo y el nivel solidario al mismo hasta que el hilo horizontal inferior coincida con la misma graduación de la regla, se lee el nivel y se tiene el número de partes  $p$  del mismo que se ha desplazado la burbuja y a los que corresponde el valor angular  $u p$ . El anteojo habrá girado una distancia angular  $d$  entre los hilos extremos del retículo, puede establecerse la igualdad

$$p u = d$$

o

$$S' = \frac{z}{d} = \frac{1}{p}$$

En el ejemplo que más adelante se da, el valor angular de 5 hilos de retículo es igual a 40 partes del nivel.

La fórmula de reducción será:

$$\Delta T_x - \Delta T_w = \frac{S' \tau}{2} [(t_e - t_w) + (0_e - 0_w)]$$

**277. Corrección por abstracción diurna.** — Esta dada por la fórmula

$$+ 0^s 021 \cos z$$

cuyo valor lo da la tabla siguiente:

$z$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
0° 021	0° 021	0° 019	0° 018	0° 016	0° 013	0° 010	0° 007

**278. Ejemplo.** — El 19 de Octubre de 1922 se quiere hacer una determinación de tiempo en el faro Villarino de latitud  $\varphi = 40^\circ 48' 6''$  a y 21<sup>h</sup> 40<sup>m</sup> aproximadamente.

**1° Programa de observación.** — En la lista de parejas «Stechert» se tienen los datos dados en la tabla (1).

Número	Estrella al E. id. O.	Magnitud	$z$						Estrella al E.			Estrella al O.			Límites en latitud
			$z_0$	$\frac{1}{2}(z_e + z_o)$	$\frac{1}{2}(z_e - z_o)$	$\frac{1}{2}(z_e + z_o)$	$\frac{1}{2}(z_e - z_o)$	Tiempo sideral	$p$	$p$	$q$	$p$	$p$	$q$	
512	$\beta$ Ceti	5.8	h m	h m	h m	h m	h m	h m	106 5	9.754	9.810	106 1	9.789	9.892 $n$	- 69 + 38
	$\nu$ Ophiuchi	5.5	17 5	21 58	5 45	-9 12	+ 55	21 28 21 48	104 14	9.786	9.888	108 4	9.738	6.815 $n$	

Elejimos la pareja N°. 512 y calculamos  $z$  y  $A$  para las 21h 28m y 21h 48m diez minutos antes y después del instante en que la distancia zenital de ambas estrellas alcanza el mismo valor.

*Cálculo del programa.*

	Obser. al E — $\beta$ Ceti		Obser. al W — $\nu$ Ophiuchi	
Hs	21h 28m	21h 48m	21h 28m	21h 48m
P	106° 45'	104° 14'	106° 01'	108° 04'
$\varphi$	- 40 49	- 40 49	- 40 49	- 40 49
$P + \varphi$	65° 16'	63° 25'	65° 12'	67° 15'
$\log \sin (z + \varphi)$	1.958	1.951	1.958	1.964
$\log p$	1.754	1.786	1.789	1.758
$\log \cos z$	1.692	1.757	1.747	1.702
$z$	60° 51'	56° 55'	56° 03'	59° 46'
$\log \cos (z + \varphi)$	1.621	1.651	1.625	1.587
$\log q$	1.810	1.888	1.892 $n$	1.815 $n$
$\log \cotg A$	1.451	1.539	1.515	1.402
A (S W)	254° 54'	250° 55'	108° 08'	104° 10'

Con los valores A y z construimos el gráfico que sigue, en el que está las rectas que representan la variación con el tiempo de la distancia zenital y del azimut de cada estrella, tra-

Gráfico

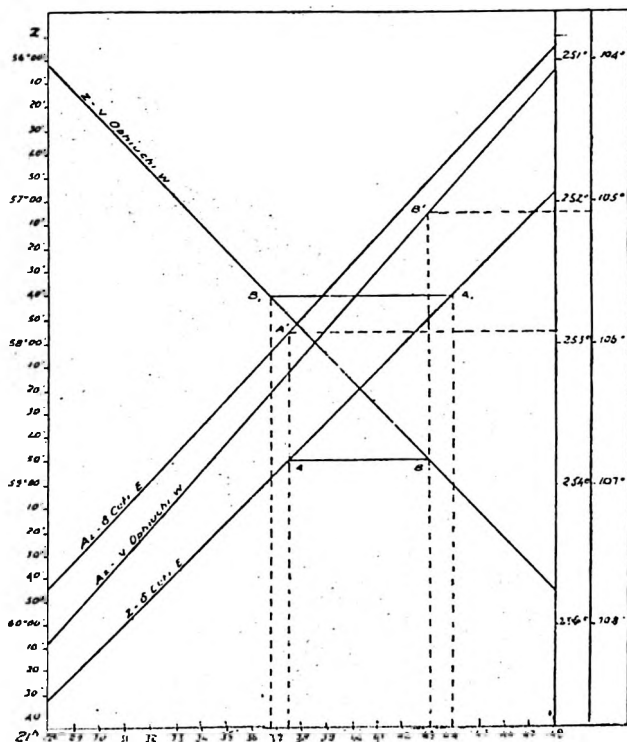


Fig. 266.

zando A B que abarca aproximadamente 5 m. de tiempo entre el instante 21<sup>h</sup> 57<sup>m</sup> 5 en que  $\delta$  Ceti alcanza la distancia zen-

tal  $58^{\circ} 50'$  y el instante  $21^h 43^m 0$  en que para  $\nu$  Ophiuchi tiene el mismo valor, tendremos después sobre las rectas que representa la variación en azimut los puntos A' y B' que dan en la escala correspondiente a cada estrella en la derecha los azimutes  $252^{\circ} 55'$  S W y  $105^{\circ} 05'$  S W respectivamente.

Observando con la altura  $57^{\circ} 40'$ , primero se observará la estrella del W a  $21^h 36^m 7$  y después la del E a  $21^h 44^m$ , los azimutes se deducen análogamente.

2.ª Observación

19 Octubre 1922

		Al Este	Al Oeste
	Z	$58^{\circ} 50'$	$58^{\circ} 50'$
	A	$252^{\circ} 55'$ S W	$105^{\circ} 05'$ S W
	H <sub>s</sub>	$21^h 37^m 5$	$21^h 43^m 0$
Nivel . . . antes		11.4 — 29.8	11.2 — 29.6
» . . . después		11.4 — 29.8	11.2 — 29.6
» . . . medio		11.4 — 29.8	11.2 — 29.6
Top. Hilo	I	$21^h 37^m 25^s 20$	54.40
	II	26.80	52.70
	III	32.40	46.95
	IV	38.60	41.05
	V	41.70	$21^h 42^m 37^s 80$
Top. medio		$21^h 37^m 32^s 94$	$21^h 42^m 46^s 58$
V — I = $\tau$		16.50	16.60

3°. Cálculo del Estado.

$i_e = 11.4$	$O_e = 29.8$	$T_w$	21h 42m 48s 58
$i_w = 11.2$	$O_w = 29.8$	corr. nil.	0.08
$i_e - i_w = 0.2$	$O_e - O_w = 0.2$	$T_w$	21.42.46.66
$\tau = 16.50$	$S' = \frac{1}{40}$	$T_z$	21.37.32.84
		$T_z - T_w$	-5.13.72
		$T_z + T_w$	19.20.19.60
$\Delta T_z - \Delta T_w = \frac{16.50}{2 \times 40} (0.2 + 0.2)$			
$\Delta T_z - \Delta T_w = 0.08$			

$\alpha_z$	1h 20m 10s 92	$\log \tan z$	1.20803 n
$\alpha_w$	17.54.45.81	$\log \cotg t$	1.82561
$\alpha_z - \alpha_w$	7.25.25.11	$\log v$	1.05164 n
$T_z - T_w$	-5.13.72	$\log \tan \phi$	1.85626 n
$2 t$	7.30.58.83	$\log \operatorname{cosec} t$	0.07975
$t$	3.45.19.41	$\log u$	0.01601 n
$\alpha_z + \alpha_w$	19.14.56.75	$u$	-1.0574
$T_z + T_w$	19.20.19.60	$v$	-0.1075
$2 \tau$	-05.22.87	$u - v$	-0.9292
$\tau$	-02.41.43	$\log (u - v)$	1.93844 n
$\delta_z$	-8° 54' 50"	$\log \frac{z}{15}$	2.15147
$\delta_w$	-9.45.42	$\log r^s$	2.11891
$2 \delta$	+1.10.52	$r^s$	-151° 80
$\delta''$	2126		
$\log \delta''$	0.52756		
$\log 15$	1.17609		
$\log \frac{\delta}{15}$	2.15147		
$\delta_z + \delta_w$	-18° 20' 32"	$\Delta T$	-02m 41s 45
$\delta$	-9.10.16	Corr. abrr.	+0.01
		$\Delta T$	(0).20.64

NOTA.—En vez de efectuar este cálculo empleando los promedios de los Tops al Este y Oeste, puede hacerse con cada uno de los tops para cada hilo; el valor de  $r^s$  se calcula para los minutos extremos que abarcan los tops y mediante una interpolación gráfica se obtiene el valor para los segundos de cada uno.

## CAPITULO XXIV

### OBSERVACIONES DE PASO

**279. Circulo meridiano.** — Es un instrumento que sirve para la observación de la hora de pasos de astros por el meridiano y para la determinación de su altura meridiana.

Sus partes principales son fig. (267); el anteojo A B que gira sobre un eje horizontal que debe colocarse en el plano del vertical primario, este eje reposa sobre cojinetes del bastidor F G H I J.

Los tres pies M, N y P permiten colocar horizontalmente al eje secundario sirviéndose del nivel *nn*, con los anteojos S y T se hace las lecturas de la escala del nivel, la que se refleja en los espejos Q y R; con el manubrio Z puede elevarse el bastidor *u* V X, sobre el que está el nivel, con objeto de invertir este último sobre sus apoyos.

Con otro manubrio C' puede levantarse el bastidor D' F' E', el que lleva consigo al anteojo y el nivel que le es solidario, esto con el objeto de invertir el anteojo sobre sus muñones.

Solidario con el eje del anteojo está el circulo vertical M' N', las lecturas se hacen sin aproximación con el anteojo E, despues se obtienen al segundo de arco con cuatro micrómetros *a, b, c y d*

En el ocular del anteojo A B está montado un microscopio micrométrico *mm*, el chasis lleva 10, 12 o 17 hilos fijos y hay además un hilo móvil que maneja el tornillo micrométrico Q'. Los hilos son iluminados en las observaciones nocturnas.

La caja *mm* puede desplazarse en sentido lateral mediante el tornillo *t* y permite mantener enfocado los astros durante todo el tiempo que emplea en cruzar el campo del anteojo.

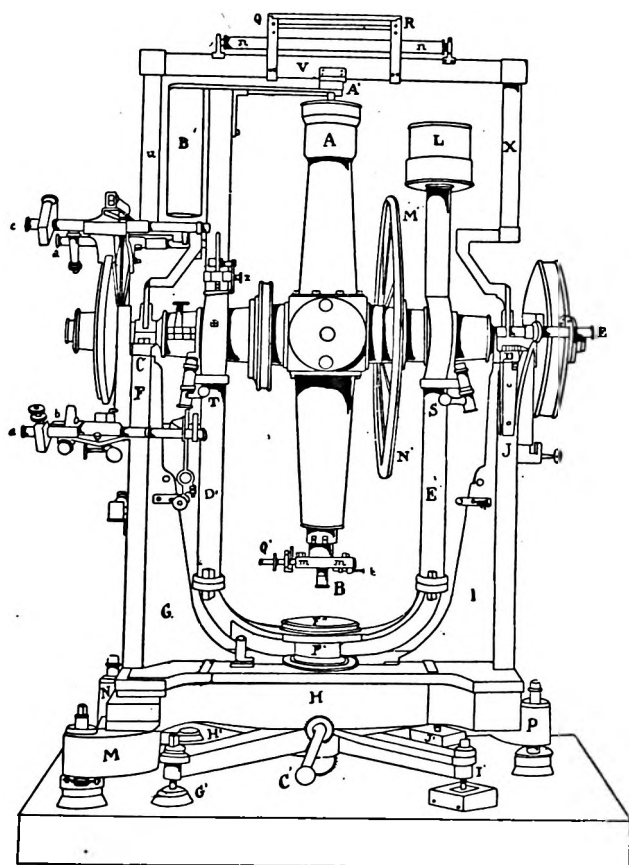


Fig. 267

**280. Instrumento de paso con anteojo acodado.**—Su estructura está indicada en la (fig. 268) donde se han colocado las mismas letras para designar partes análogas a las designadas

en (fig. 267). El anteojo está reducido al tubo anterior con el objetivo, al que hace equilibrio un contrapeso; el tubo posterior está constituido por la mitad izquierda del eje de rotación,

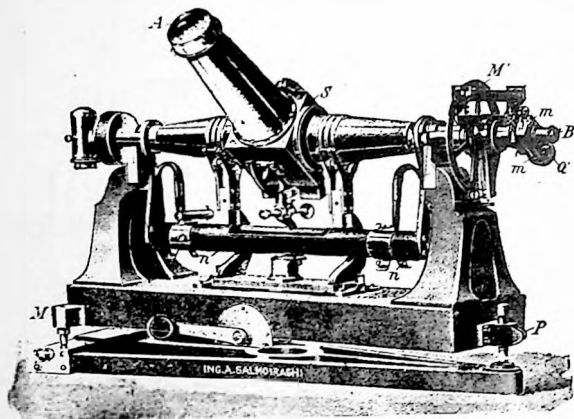


Fig. 268

el que es hueco y en cuyo extremo se ha aplicado el ocular B. Un prisma colocado en el cubo central S refleja con  $90^\circ$  de desviación los rayos luminosos que provienen del astro y los manda al ocular.

La ventaja principal de este tipo de instrumento es la invariabilidad de la posición del ocular y por lo tanto del ojo del observador y además estando el nivel *nn* colgado del eje de rotación y quedando así aún en la inversión, es posible nivelar para cualquier inclinación del anteojo y controlar continuamente la horizontalidad del eje secundario.

**281. Instalación del instrumento.**—Se hace sobre un pilar de mampostería, el que deberá estar bien seco pues la variación de su estado higrométrico produce una torsión en el mismo.

Se protege el instrumento con una casilla de madera cuyo piso debe ser independiente del pilar para evitar la influencia de las trepidaciones en el nivel. La abertura de la casilla y



la dirección de uno de los lados del pilar debe ser N-S, lo que se hace valiéndose de la sombra de una plomada a medio día. Igualmente debe procederse a la instalación del anteojo en el meridiano, pues si bien el instrumento puede, una vez instalado, recibir un movimiento de giro azimutal, la amplitud de este giro es muy pequeña; para esto se marca con jalones la línea determinada por la sombra de una plomada a medio día y con esos jalones se coloca el instrumento.

**282. Idea sobre la rectificación y errores debidos al instrumento.**—Para enfocar el retículo y el anteojo se procede como se ha visto en (28) haciendo la puntería sobre una estrella. Los hilos se colocan perpendiculares al eje de rotación como se ha indicado en (61,4°).

Para determinar el eje de colimación del anteojo se hace la lectura  $H_1$  correspondiente en el micrómetro a la coincidencia del hilo móvil con la imagen de un punto, se invierte el anteojo sobre sus apoyos y se hace nuevamente la coincidencia del hilo móvil, se tendrá la lectura  $H_2$ , el promedio  $H_0 = \frac{H_1 + H_2}{2}$  es la posición del *hilo sin colimación*.

La posición ideal del hilo móvil, tal que la suma de las distancias que lo separa de los hilos fijos de la derecha sea igual a la suma de las distancias que lo separa de cada uno de los hilos de la izquierda, se llama posición del *hilo medio*. El ángulo formado por las líneas determinadas por el centro óptico del objetivo con el hilo sin colimación y por el mismo centro con el hilo medio es el *error de colimación*.

La posición del hilo medio se determina haciendo las lecturas del tambor del micrómetro que corresponde a cada una de las coincidencias del hilo móvil con cada uno de los hilos fijos, el promedio  $H_m$  da la lectura del tambor correspondiente a la posición de *hilo medio*. El error de colimación, será por lo tanto  $H_0 - H_m = \gamma$ , expresado en partes del tornillo micrométrico, multiplicándolo por el valor angular  $K$  del mismo, tendremos el valor angular  $c = \gamma K$ ; cuando este error es muy grande se disminuirá desplazando los hilos fijos con el tornillo correspondiente. Este error no puede eliminarse totalmente y es necesario determinarlo en cada observación.

Si se observa la hora del paso de una estrella de declinación  $\delta$  por cada uno de los hilos del retículo, se toma el promedio de esos pasos y se hacen las diferencias entre este promedio y los pasos por cada uno de los hilos, estas diferencias se llaman *distancias filares* ( $f$ ) y representan el tiempo que emplea la estrella para recorrer el espacio comprendido entre el hilo considerado y el hilo medio ideal del retículo. Este tiempo no es el mismo para todas las estrellas, pues sus velocidades son tanto menores cuanto más se alejan del ecuador; pero puede hallarse una constante instrumental llamada *distancia ecuatorial* ( $F$ ), que no es otra cosa que la distancia filar de una estrella situada en el ecuador y que se deduce de la distancia filar observada para una estrella de declinación  $\delta$  con la relación, aunque no exacta.

$$F = f \cos \delta.$$

Conociendo el valor de la distancia ecuatorial de cada hilo y estas mismas distancias expresadas en vueltas y fracción de vuelta del micrómetro, podemos deducir el valor de una vuelta del mismo en partes del ecuador.

Si la posición del hilo del medio corresponde al meridiano del lugar y para una estrella medimos su distancia al mismo, esta distancia expresada en función del valor ecuatorial del micrómetro será en segundos de tiempo el arco sobre el ecuador que le corresponde, es decir su ángulo horario.

Para que la colocación del instrumento sea perfecta es necesario que el eje de rotación del anteojó sea horizontal, que el eje óptico sea perpendicular al de rotación y que el plano en que se mueve el eje óptico se confunda con el plano meridiano.

Supongamos que el eje óptico sea perpendicular al de rotación y a este en el plano del vertical primario, pero en vez de ser horizontal formando un ángulo  $i$  con ella. Es evidente que el eje óptico se moverá en un plano que forma con el meridiano el mismo ángulo  $i$  y describirá un círculo máximo, siendo el error variable con la altura zenital del astro. El error  $\Delta t_1$  en el horario producido por este *error de inclinación del eje de rotación* está dado por la relación

$$\Delta t = i \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta} \quad (1)$$

Supongamos el eje de rotación horizontal y perpendicular al meridiano, si el eje óptico fuera perpendicular al primero se movería en el plano meridiano, pero si forma un ángulo  $c$  describirá una superficie cónica que cortará a la esfera celeste según una circunferencia paralela al meridiano. El error  $\Delta t_2$  debido a la inclinación del eje óptico sobre el de rotación que hemos llamado *error de colimación* está dado por la relación

$$\Delta t_2 = c \sec \delta, \quad (2)$$

Supongamos finalmente que el eje óptico sea perpendicular al de rotación y que éste sea horizontal pero que esté formando un ángulo  $a$  con la línea Este-Oeste. Es evidente que el eje óptico describirá un círculo máximo vertical que forma con el meridiano el mismo ángulo  $a$ , que es su azimut por lo que se llama al error cometido, *error por desviación azimutal* dado por la siguiente relación.

$$\Delta t_3 = a \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta}. \quad (3)$$

Haciendo la suma de los tres errores se tendrá el error total que es la fórmula de reducción de Mayer

$$\Delta t = i \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + a \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta.$$

Otra causa de error que afecta el horario es la *aberración diurna*, independiente del instrumento y que proviene de las velocidades de rotación de la tierra y la de propagación de la luz; es un error muy pequeño, lo que se explica por ser la relación de las velocidades muy pequeñas (0.464 Km<sup>s</sup> para la tierra y 300.000 Km<sup>s</sup> para la luz), varía con la latitud y la declinación pues los puntos de la tierra a medida que se alejan del ecuador tienen menor velocidad.

La fórmula que da este error es

$$\Delta t \pm 0.5 \text{ } 021 \cos \varphi \sec \delta$$

+ para los pasos inferiores y — para los superiores.

**283. Colocación del instrumento en el meridiano. Determinación del azimut.** — Colocado el anteojo aproximadamente

en el meridiano se reduce a un mínimo la desviación azimutal; se calcula la hora del paso por el meridiano de una estrella circumpolar; unos minutos antes de la hora del paso y con el hilo móvil del anteojo colocado en la posición del hilo del medio, se hace la observación siguiendo la estrella en su movimiento, para lo que se maniobran los tornillos que hacen mover el pie en azimut hasta que el cronómetro o péndulo indique la hora del paso.

La fórmula (3) muestra que el error por desviación azimutal se anula cuando  $\varphi = \delta$ , estrellas que culminan cerca del zenit, luego para corregir la hora, teniendo en cuenta que hay error en azimut, conviene observar estrellas en esas condiciones.

Con la nueva hora se vuelve a observar estrellas circumpolares y así se consigue estar en condiciones de calcular el azimut con un valor ya bastante pequeño del mismo. Para esto, se observa la hora  $T$  del paso de una estrella de tiempo de declinación  $\delta$  y ascensión recta  $\alpha$  y análogamente con una circumpolar:  $T'$ ,  $\delta'$  y  $\alpha'$ .

Las horas  $T$  y  $T'$  corregidas por error de inclinación y colimación deben ser iguales a  $\alpha$  y  $\alpha'$ , no lo son debido al error por *desviación azimutal*, aplicando la fórmula de Mayer

$$\alpha - T = a \frac{\text{sen } (\varphi - \delta)}{\cos \delta} = a K$$

$$\alpha' - T' = a \frac{\text{sen } (\varphi - \delta')}{\cos \delta'} = a K'$$

$$y \quad a = \frac{(\alpha - T) - (\alpha' - T')}{K - K'}$$

Una vez determinado el azimut que corresponde a la línea determinada por el centro óptico del objetivo y el hilo del medio, se coloca una mira sobre el campo del anteojo; haciendo la lectura micrométrica  $M$  que corresponde a la visual a la línea de fe en la mira, corregida por los errores instrumentales, la diferencia entre esta lectura y la que corresponde al hilo del medio ( $M - H^m$ ) es el ángulo que hay que aplicar al azimut ya determinado para obtener el azimut de la mira.

**284. Determinación de la latitud.**— La latitud se calcula con la fórmula para las distancias zenitales meridianas  $z = \varphi + \delta$  la distancia zenital corregida por refracción y la declinación calculada para la posición aparente en la época de la observación. Las observaciones se combinan según distintos métodos, uno de ellos es el de Sternek que ha sido empleado en todos los trabajos hechos en nuestra marina.

Calculadas las latitudes para cada una de las distancias zenitales de las estrellas observadas, su promedio será un valor próximamente exacto; la diferencia entre este promedio y cada uno de los valores que lo han determinado es aproximadamente la influencia de los errores de zenit y flexión, sobre cada latitud aislada, esto permite sentar una ecuación para cada estrella y resuelto el sistema obtener los valores más probables de las incógnitas, las que reemplazadas de acuerdo con su influencia en cada uno de los cálculos parciales de la latitud con cada estrella nos dará la latitud corregida en cada caso y el promedio de estas últimas será el valor exacto.

**285. Determinación de la longitud.**— Comprende dos operaciones, *medida del tiempo*, o determinación del Estado del péndulo y *cambio de señales*.

Las observaciones astronómicas para la *medida del tiempo* consisten en la determinación de la hora en un péndulo en que pasa por el meridiano una estrella de tiempo, es decir, de pequeña declinación.

El pasaje de una estrella se determina observando el instante en que su imagen es cubierta por cada uno de los hilos del retículo; cada uno de estos pasajes se reduce al hilo del medio sumando o restándoles las respectivas distancias filares según que el pasaje sea anterior o posterior al pasaje por el hilo del medio. Si la observación es buena, los pasos reducidos deben ser iguales para todos los hilos, el promedio se considera como hora definitiva del paso.

Si el instrumento no tuviere errores, la diferencia de la hora promedio del paso con la ascension recta de la estrella daría inmediatamente al Estado del cronómetro o péndulo con respecto a la hora sidérea local, pero debido a los errores ins-

trumentales hay que corregir la hora promedia del paso con la fórmula de Mayer, después de haber determinado los elementos de la misma.

Para registrar las observaciones se usa el cronógrafo eléctrico; la cinta de este se desarrolla con movimiento uniforme mediante un mecanismo de relojería, una pluma montada sobre la armadura de un electroimán E dibuja sobre la cinta una recta continua. El electroimán tiene en su enrollamiento un interruptor accionado por el movimiento de un péndulo sidéreo, éste en cada segundo que bate cierra el circuito y al atraer el electroimán a su armadura, hace que la pluma dibuje un pequeño ángulo en la cinta, por ejemplo: cada 2 cm. por lo tanto podemos deducir la longitud de cinta que corresponde a una fracción de segundo.

Otra pluma también montada sobre la armadura de otro electroimán E' dibuja otra recta continua paralela a la primera, el enrollamiento de este electroimán tiene un interruptor que maneja el observador.

Cuando el astro está en coincidencia con cada uno de los hilos del retículo, se hace una señal, la longitud de cinta entre dos de ellas, exprezada por su valor en segundos de tiempo, es el intervalo transcurrido entre los pasos por dos hilos sucesivos, el promedio de todos ellos corresponde a la posición del hilo del medio.

En los oculares modernos cada uno de los hilos fijos están en circuito con el electroimán E' y el hilo móvil también, de manera que al hacer contacto ambos hilos se cierra el circuito y se hace la marca en la cinta, luego la observación se reduce a seguir constantemente la estrella con el hilo móvil de manera que se cierre el circuito cuando simultáneamente el astro está en coincidencia con el hilo fijo y el hilo móvil.

Para el *cambio de señales* el electroimán E' que está en una estación de observación A puede ponerse en circuito con el interruptor de otra estación B, el cronógrafo podrá registrar las señales que de ella se hagan.

El trabajo para la determinación de la diferencia de longitud entre las estaciones es el siguiente, suponiendo A al Este de B.

En A y B se determina el adelanto del péndulo o cronómetro sobre la hora, media o siderea, llamemos estos respectivamente C y C'.

A la hora T del cronómetro que está en A se hace una señal que será registrada en el cronógrafo de B a la hora T'. Las horas T y T' debieran ser simultáneas, pero como se ha empleado un cierto tiempo  $x$  en la transmisión de la señal, la hora T' será errónea en más en la misma cantidad; las horas simultáneas son luego, T y T' -  $x$ ; las horas locales T - C y T' - C' -  $x$ , la diferencia de longitud es la diferencia de hora

$$\Delta \omega = (T - C) - (T' - C') + x = \Delta \omega_1 + x.$$

Si desde B se envía una señal a A, tendremos análogamente siendo T<sub>1</sub> y T'<sub>1</sub> las horas del cronógrafo, C<sub>1</sub> y C'<sub>1</sub> los estados correspondientes para ese instante y  $x$  el tiempo de transmisión: T<sub>1</sub> -  $x$  y T'<sub>1</sub> las horas simultáneas; las horas locales T<sub>1</sub> -  $x$  - C<sub>1</sub> y T'<sub>1</sub> - C'<sub>1</sub>, la diferencia de longitud

$$\Delta \omega = (T_1 - C_1) - (T'_1 - C'_1) - x = \Delta \omega_2 - x$$

en el promedio se elimina  $x$

$$\Delta \omega = \frac{1}{2} (\Delta \omega_1 + \Delta \omega_2).$$

Prácticamente el problema es más complejo de lo que a primera vista parece y el grado de exactitud depende sobre todo de la manera como las señales son enviadas y transmitidas.

Para disminuir los errores se hace una medida de tiempo, luego un cambio de señales y después otra medida de tiempo, el promedio de los Estados determinados en cada medida de tiempo se considera que corresponde al instante intervalo en que se hacen las señales.

Los elementos de las estrellas, dados en los catálogos de estrellas están afectados de errores que conviene calcular y cuya eliminación se facilita observando en ambas estaciones las mismas estrellas, lo que es posible cuando la diferencia de longitud es pequeña.

Además el valor de  $x$  lo hemos supuesto igual cuando el observador en A transmite y el de B recibe e inversamente lo que no es exacto, está influido por el error personal, ecuación

*personal* que se elimina haciendo un cambio de señales en que el observador que estaba en A observa en B e inversamente.

**286. Aplicación de la radiotelegrafía.** — El empleo de las señales radiotelegráficas para el cambio de señales se difunde cada vez más por permitir la determinación de la diferencia de longitud aún en los lugares que no están ligados por cables telegráficos.

La primera determinación de diferencia de longitud en la República Argentina la efectuó la Comisión Hidrográfica del Río de la Plata en 1911. La estación trasmisora de las señales fué la de Dársena Norte, dos estaciones receptoras, una en Belgrano (Instituto Geográfico Militar) y otra en Montevideo recibían las señales que hacían funcionar un cohesor que obraba sobre el relai que hacía funcionar un cronógrafo registrador. El retardo de transmisión y recepción quedaba anulado en la diferencia.

Aprovechando la señal nocturna de tiempo que dá el Observatorio de la Marina con la estación radiotelegráfica de Darsena Norte se ha hecho una serie de determinaciones a lo largo de la costa, en esta forma el retardo por transmisión y recepción se introduce íntegramente en la diferencia de longitud de cada uno de los puntos con respecto a la longitud de la estación trasmisora; ese mismo error se anula para dos estaciones al W o E de la estación trasmisora cuando se considera la diferencia de longitud entre sí y se duplica cuando una está al E y otra al W.

El Observatorio registra las señales emitidas y está en condiciones de dar la corrección al Top que se haya tomado para una determinación de longitud.

Uno de los problemas actuales del empleo de la radiotelegrafía en la determinación de la diferencia de longitud, cuando las distancias son muy grandes, es el registro cronográfico de las señales recibidas.

Detalles completos sobre la determinación de la diferencia de longitud utilizando el top radiotelegráfico se encontrarán en el N.º 349 del Boletín del Centro Naval, publicación del Teniente de Fragata Pedro Luisóni.



## CAPITULO XXV.

### OPERACIONES EN EL MAR

**287. Generalidades.**—La obtención del relieve del fondo del mar constituye la operación principal de un trabajo hidrográfico; para obtenerlo es necesario determinar la posición de un cierto número de puntos y simultáneamente medir la profundidad del agua con relación a un nivel constante. Se reúnen así los elementos necesarios para confeccionar un plano que representa la forma y naturaleza del fondo del mar, la posición y altura de los bancos y rocas, la profundidad de los canales, etcétera, que el navegante tiene necesidad de conocer para trazar el rumbo que debe seguir un buque para trasladarse de un punto a otro del mar, llegar a un fondeadero o puerto y para evitar los bajos y peligros.

El trabajo hidrográfico en el mar comprende tres estudios distintos: primero, se mide la profundidad de un gran número de puntos y se determina la naturaleza del fondo; segundo, se fija la posición de estos puntos, con relación a la costa o por coordenadas geográficas determinadas astronómicamente, y tercero, se reducen las alturas medidas a un plano constante determinado por las condiciones de la marea y llamado plano de reducción. El trabajo se reduce a las dos siguientes operaciones:

1.º Medir con una sonda la profundidad en un lugar, y anotar la hora correspondiente en un reloj comparado con otro que tiene el que observa una escala de mareas, esta hora permite determinar la altura del nivel del agua sobre el plano de reducción en el instante que se hizo el sondaje, esta altura es la reducción del sondaje.

2.º Situar la posición de cada sondaje, o de algunos de ellos por lo menos, por referencia a la costa o por observaciones astronómicas.

Los varios casos que se presentan en la operación de son-  
dar son:

1.º Sondar en grandes profundidades fuera de la vista de  
costa.

2.º Sondar en grandes profundidades a la vista de costa.

3.º Sondajes de costa en profundidades no mayores de 30  
o 40 ms. .

4.º Sondajes en puertos naturales y artificiales.

En el primer caso los sondajes son hechos por un buque  
hidrógrafo usando aparatos de sonar con motor; la posición  
es fijada por observaciones astronómicas.

En el segundo caso los sondajes son igualmente hechos por  
un buque hidrógrafo y máquina de sonar, su situación se  
hace por medida de ángulos, hechas por dos o tres observa-  
dores desde tierra y desde vértices de la triangulación.

En el tercer caso los sondajes son hechos por un buque  
empleando la sonda de mano, siempre que las profundidades  
medidas no sean un peligro para el buque, en cuyo caso se  
sonda con embarcaciones menores; las posiciones son fijadas  
desde tierra.

Para los sondajes de puertos naturales o artificiales, se em-  
plean embarcaciones menores y escandallo de mano, situándose  
los sondajes desde tierra por tres observadores o por aline-  
aciones cuando hay un número suficiente de ellas para llenar  
satisfactoriamente la zona a relevar.

Se dispondrá de un plano en la escala en que se efectuará  
el trabajo con todas las indicaciones que puedan ser útiles para  
el levantamiento hidrográfico: puntos de triangulación y poli-  
gonal, línea de la costa, situación aproximada de bancos y es-  
collos, ubicación de señales, etc.

Para las bahías y puertos donde el fondo no es muy irregu-  
lar se adoptará la escala de  $\frac{1}{50000}$  a  $\frac{1}{20000}$ ; en los fondeaderos,  
canales, pasos entre escollos, será necesario a veces emplear  
la escala  $\frac{1}{5000}$ . Lejos de la costa se usará la escala  $\frac{1}{100000}$   
o menor.

Basándose en los puntos topográficos, en tierra pueden si-

tuarse, con el problema de la carta, señales que se utilizarán en la situación de sondajes.

En algunos casos habrá conveniencia en situar desde a bordo señales o accidentes característicos de la costa, para esto se situará el buque por el problema de la carta y desde a bordo se tomarán los ángulos necesarios para situarlos por intersecciones; como control se tomará una visual desde un tercer punto.

Cuando un vértice de poligonal o triangulación no es conveniente para trabajar hacia el mar, puede tomarse un punto próximo a aquel que reúna las condiciones requeridas, para obtener sus coordenadas es suficiente unir el nuevo punto con el primero mediante una poligonal cerrada.

En la construcción de las señales debe considerarse que ellas están destinadas a ser vistas desde el mar y por lo tanto se les dará la mayor visibilidad hacia ese lado.

Los objetos indefinidos como: cerros redondos, centro de islas, etc; no serán usados en la hidrografía exacta, pero lejos de la costa se usarán en todo lo que sea practicable.

**288. Sondas. — Graduación y rectificación.**—La sondaleza es de cabo trenzado, cuya mena varía según el peso que debe soportar. Para pequeñas profundidades hasta 50 ms. se usarán cabos de 2 cm. de mena y plomos de 4 o 5 kgs. Para mayores profundidades entre 50 y 100 ms., se usarán cabos de 2 cm. de mena y pesos de 6 kgs.

A fin de percibir el instante en que el escandallo toca fondo, es necesario que la velocidad de caída sea muy grande y que la velocidad remanente de la línea sea muy pequeña, es decir que convienen pesos fuertes del plomo y líneas livianas y muy resistentes.

Una gran velocidad de caída es también necesaria cuando se sonda con el buque o embarcación en movimiento, pues el escandallo debe haber tocado fondo antes que el operador llegue a la vertical de ese punto.

Es práctico usar sondas de alambre de acero flexible, un poco mas fino que el llamado de ligada, que se forra con una loneta fina y merlín para hacerlo más manuable y que no las-

time las manos, con alambre de 1 cm. de mena y pesos de 5 a 12 kgs. puede sondarse con buen resultado hasta profundidades de 60 a 70 ms.

Los escandallos comunes de embarcación y buque usados en nuestra marina, están graduados de media en media braza (1 braza = 1.829 metros) en toda su longitud y además, hasta las seis brazas, llevan graduaciones de pie en pie (1 pie = 0.305 metros); los escandallos de mar están graduados de braza en braza hasta las 25; y en adelante, solo de 5 en 5 brazas. Las brazas, medias brazas y pies, están indicados por trozos de lanilla, cuero o cabitos anudados que se introducen entre los cordones de la línea, debiendo procurarse que esas marcas sean lo menos voluminosas posibles sin perjuicio de su visibilidad, pues con esto se limita el inconveniente de aumentar la superficie de la línea, y por consiguiente, la resistencia al sondear o halar.

Los plomos son de forma troncocónica, y en su base inferior se ha hecho una cavidad destinada a llevar el sebo, al que se adhiere una parte del fondo del mar, que a la par que evidencia el contacto del plomo con él, permite establecer su clase. Para evitar la deformación rápida de la parte inferior del plomo se la protege por una arandela de cobre.

Las líneas de cabo de los escandallos, no deben graduarse sino después de dos o tres días de estar en las condiciones en que serán empleadas, para lo cual se acostumbra después de mojarlas, amarrarlas por un extremo al tope de un palo, soportando la otra extremidad el peso correspondiente, debiéndose, además, tener la precaución de remojarlas de tiempo en tiempo. A pesar de esta precaución, las líneas de cabo varían mucho, por lo cual se tendrán en cuenta al comienzo y término del trabajo diario, las modificaciones que haya sufrido en su longitud, las que se apreciarán, comparando el escandallo bien mojado con las marcas que exprofeso se fijan sobre la cubierta del buque o en tierra, cuidando de extender la línea con un esfuerzo aproximadamente igual al que ejerce el plomo cuando está libremente suspendido; el resultado de cada rectificación deberá siempre ser anotado, aun cuando el escandallo no presente diferencias, pues el confiar a la memoria estos da-

tos, ocasiona a menudo errores importantes; la planilla siguiente, muestra la manera de hacer las anotaciones:

RECTIFICACIÓN	CORRECCIONES EN CM. A LA GRADUACIÓN						
	3 BRAZAS	4 BRAZAS	6 BRAZAS	10 BRAZAS	15 BRAZAS	20 BRAZAS	25 BRAZAS
Mañana.....	— 10	— 6	— 3	+ 2	+ 10	+ 25	+ 30
Tarde.....	— 8	— 4	+ 1	+ 4	+ 15	+ 20	+ 35
Promedio....	— 9	— 5	— 1	+ 3	+ 12	+ 22	+ 32

**289. Sondar con embarcaciones: armamento de éstas.**— Cuando el paraje a relevarse presente profundidades inferiores al calado del buque, o la disposición del lugar no permite al buque recorrerlo, se procede a efectuar la operación con embarcaciones a remo o a vapor. Cualquiera que sea la clase de la embarcación, su tripulación comprenderá, además de su dotación de bogadores o conductores de máquina y patrón a uno o dos sondadores y un ayudante para hacer las anotaciones que disponga el oficial encargado de la operación.

Si la embarcación es a remo y debe alejarse varias millas, llevará su aparejo para cualquier eventualidad, y estará equipado como lo prescribe el reglamento respectivo, llevando, además, el material de sondas, que comprende: dos escandallos, un juego de banderas de bote, tres banderas de 2.º tamaño, una roja, otra blanca y un gallardete; una caja con sebo, dos o tres boyarines con sus correspondientes orinques de 10 brazas y rezón; por su parte, el oficial llevará: un sextante o círculo hidrográfico, un anteojo, un reloj previamente arreglado a hora media del lugar, la libreta de trabajo y un croquis en el que esté señalado el contorno de la costa, puntos de referencia y líneas de sonda que deba ejecutar en el día.

Las sondas efectuadas con las embarcaciones pueden situarse por los observadores que vayan a su bordo, o desde tierra por observadores fijos.

**SITUANDO LOS PUNTOS DESDE LA EMBARCACIÓN.**— Llega la la embarcación al punto donde se debe empezar el trabajo el

oficial hace detener la marcha, y una vez inmóvil, da la orden de *sonda*, procediendo él al mismo tiempo a situar la embarcación tomando dos ángulos a tres puntos convenientemente elegidos, o un solo ángulo si se encuentra en la alineación de dos puntos. El ayudante anotará en la libreta la profundidad y calidad de fondo contadas por el sondador, y los ángulos que le dicte el oficial. Inmediatamente el oficial ordenará *boga*, debiendo ser ésta pausada; recorrido un cierto espacio, se ordenará nuevamente sondar y anotará la indicación correspondiente, continuando así hasta efectuar 3 o 4 escandalladas, aguantando la boga o parando la máquina en el momento de tirar el escandallo, sin detener completamente la embarcación; a la quinta escandallada, el oficial hará aguantar la marcha y cuando parará completamente la embarcación para proceder a la situación de un nuevo punto. Es fácil darse cuenta de que por medio de estas dos posiciones se podrán después situar sin gran error los sondaes intermedios. Además, en toda escandallada se anotará la hora correspondiente que servirá no sólo para la reducción de la profundidad, sino para la situación de los sondaes intermedios.

El intervalo entre cada sonda está regido por diversas circunstancias; el cambio brusco de profundidad o calidad del fondo, exigen un intervalo menor que cuando el relieve submarino se presenta uniforme; como regla general, cada vez que se sienta cantar una sonda notablemente diferente de las anteriores, el oficial detendrá la embarcación y rectificará el sondeaje, situándolo prolijamente. La elección de las estaciones se regirá por las indicaciones que hemos hecho con anterioridad, siendo, además, siempre muy recomendable se sigan rutas establecidas por alineaciones en tierra, y si esto no fuera posible, valiéndose de un buen compás de bote.

SITUANDO LA EMBARCACIÓN DESDE TIERRA.— La operación de sonda se efectuará de manera idéntica a la indicada en el caso anterior, ejecutándose la situación de los puntos en la forma siguiente: dos observadores provistos de teodolitos o en su defecto de sextantes o círculos hidrográficos, se estacionarán convenientemente en tierra y munidos, además, de una bandera guarnida a una asta o vichero. Llegada la embarca-

ción al punto de iniciación del trabajo, izará al tope de su palo, previamente arbolado, las tres banderas de que va provisto, con lo cual llamará la atención de los observadores de tierra, que a su vez contestarán arbolando sus banderas una vez listos a la observación; vista la contestación del bote, el oficial que lo dirige ordenará arriar las tres banderas e izar una sola, la roja por ejemplo, ordenando al mismo tiempo *sondar*. En el instante en que el escandallo esté a pique se arriará la bandera, debiendo los observadores de tierra visar la embarcación, anotando en la libreta, a la par que la lectura angular, la hora y el color de la bandera visada.

La embarcación no necesitará detener nunca su marcha, la volverá a izar para arriarla nuevamente en la siguiente escandallada, debiendo alternarse las banderas cada dos o tres escandalladas y a veces irán dos banderas juntas.

**290. Registro de sondas y observaciones.** — A bordo de la embarcación se tendrá una libreta de trabajo con la siguiente disposición:

(1) Número de orden	(2) Hora	(3) Bandera	(4) Sonda	(5) Fondo	OBSERVACIONES
1	8h 36m	B	22	a	
			24	"	
			22	"	
2	8 41	R	20	"	
			18	"	
			13	"	
3	8 45	2 B	20	"	20 ms. de la rompiente.

En la columna (1) se numeran los sondajes situados de acuerdo con las libretas de los observadores en tierra; en la (2) se anota la hora de un reloj arreglado a hora media local; este reloj debe estar comparado con el que tiene el observador de mareas y con los que tienen los observadores en los teodolitos, en (3) se anota la bandera que se iza para señal; B, blanca; 2 B, dos banderas, etc., confrontando con la misma anotación de los observadores en tierra se ve si han dejado de observar alguna de las sondadas; es un control más que se agrega a la confrontación de las horas. En (4) se anota la profundidad marcada por la sonda; el jefe de la embar-

ción debe controlar personalmente la lectura y condición de verticalidad de la sonda; recogido el escandallo lo examina y anota en (3) la calidad del fondo.

En la columna «Observaciones» se hacen todas las anotaciones que contribuyan a aclarar y comprobar la colocación de las sondas en el plano. Ejemp. «barajando la rompiente», «encima de cachiyuyos», etc.

También se anotará el estado del mar, lo que tiene importancia para saber el grado de confianza que debe tenerse al trabajo, pues si posteriormente vuelve a sondarse en el mismo sitio y no se obtiene la misma profundidad, siempre merecerán más confianza los sondeos hechos en mejores condiciones.

Los observadores en tierra tendrán una libreta de trabajo con la siguiente disposición:

*Estación; Faro*

*Cero en: Torre*

(1) N° de orden	(2) Hora	(3) Bandera	(4) Lectura Nonio 1	(5) Observaciones
1	8-55	B	27° 31'	viró
2	8-40	R	37° 50'	
3	8-44	2 B	11° 53'	

En la columna (1) se numerarán las situaciones hechas de acuerdo con la libreta de sondas, en la (2) se anota la hora, en la (3) las banderas en el orden en que son izadas; por comparación con la planilla anterior se vé que el reloj del observador de tierra está atrasado un minuto con respecto al del sondador, la correspondencia de banderas está bien; en (4) se anotan las lecturas de un solo nonio, hay que poner mucha atención en que sea el mismo nonio con el que se ha puesto *cero*.

En la (5) se ponen las observaciones, ej: viró, navega hacia tierra, se aleja de la costa, cerca del casco a pique, etc.

Los otros observadores tienen libretas análogas.

Todos los sondeos se registran definitivamente en un libro cuya disposición es la siguiente:

N° de orden	Hora	ESTACIONES EN:			Sondaje	Reducción	Sonda reducida	Clase de fondo	OBSERVACIONES
		Faro	Torre	Médanos					
		Cero en Torre	Cero en Faro	Cero en Pirámide					
1	8h 36 <sup>m</sup>	27° 31'	252° 15'	11° 10'	22	7'	15	a	Torre-Faro 52° 20'
					24	»	17	»	
					22	»	15	»	
2	8 41	37 50	260 14		20	»	15	»	
					18	»	11	»	
					15	»	6	»	
3	8 45	11 33	270° 04'	20° 17'	20	7 1/2	12 1/2	»	20 ms de la rompiente

Las anotaciones están hechas de acuerdo con las libretas de trabajo.

En la columna «Observaciones» se ponen los ángulos medidos desde abordo, el sondeo N° 2 tiene dos observaciones de las estaciones en tierra y el ángulo Faro 2 Torre 52° 20' observado desde abordo.



**291. Sondar con mar agitado y viento o corriente.**— En general es preferible a sondear con marejada o viento fresco, no sondear; trabajos hechos en condiciones atmosféricas desfavorables merecen poca confianza. Sin embargo con buenos sondadores y personal muy competente si la fuerza del viento y la marejada no es excesiva se puede trabajar con provecho cuando la premura con que debe hacerse el relevamiento lo impone.

El oficial que dirige la embarcación deberá mantenerse a barlovento o barlocorriente de la alineación en la que quiere colocar los sondeos de manera que cuando efectúe éstos, al detener la embarcación, por efecto del viento o corriente vaya al punto en que se quiere sondear.

Cuando la corriente es apreciable habrá que hacer las líneas según su dirección, en el mismo sentido o contrario.

Mientras desciende el escandallo deberá bogarse o moverse la máquina para mantener la embarcación en su puesto, teniendo cuidado especial en la verticalidad de la sonda en el instante de tocar fondo el escandallo y al hacer la lectura de la profundidad. Convendrá empezar a sondear desde barlovento para que la deriva de la embarcación separe las líneas de sondeos y no las superponga.

**292. Sondas desde el buque.**— En las costas abiertas generalmente se sondea con un vaporcito o buque hidrógrafo, con el que se llevan los sondeos hasta una distancia prudencial de la tierra; la zona comprendida entre la línea límite hecha por el buque y la costa se llena con una embarcación menor.

Es muy importante combinar entre los observadores en tierra y los del buque las señales indispensables para que el trabajo se haga sin fallas, ejemplo: empezar el trabajo, señal de hora, suspender el trabajo momentáneamente, etc.

Si debe pararse el buque o sondear en movimiento dependerá de los medios que se tenga a bordo para sondear, pues debe llenarse la condición de la verticalidad de la sonda al hacer la lectura de la profundidad.

Podrá sondarse manteniendo una velocidad de 5 o 6 millas usando dispositivo del Capitán de Fragata Pedro S. Casal que

hasido adoptado por el Servicio Hidrográfico. En principio consiste en un arbotante, colocado al costado del buque y muy apopa y otro en la proa, ambos unidos por un alambre carril sobre el que corre el carro que soporta el escandallo y al cual está fijado con un disparador, el carro es llamado hacia el arbotante de popa o proa con un cabo. La sondaleza pasa por una pasteca y para recogerla se manobra con un guinche a vapor o eléctrico.

El trabajo es el siguiente: desde una plataforma colocada debajo del arbotante de popa, se cuelga el escandallo en el carro, este se lleva hasta el arbotante de proa y se arma el disparador, el sondador colocado en la plataforma de popa aduja la cantidad de sondaleza que por la profundidad a sondar prevee será necesaria para que el escandallo toque fondo; cuando se quiere sondar, se acciona desde popa el disparador, el escandallo cae a proa y el sondador sonda, luego se pasa la sondaleza por la pasteca y se trae el escandallo a bordo, se le engancha en el carro y se le lleva a proa, se despasa la sondaleza de la pasteca y quedará listo para seguir la operación.

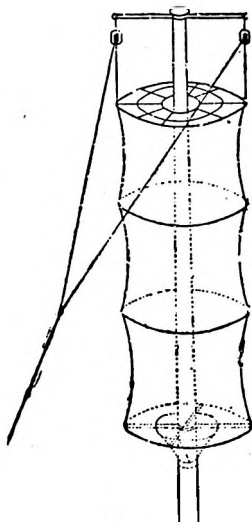


Fig. 269.

Detalles completos para este dispositivo se encuentran en el tomo I de los Anales Hidrográficos.

Cuando se sonda muy lejos de las estaciones de los observadores, (hay casos que se han situado sondajes a 40 kilómetros) debe emplearse señales especiales para la observación. La figura 269 muestra un sistema de cilindro plegadizo de 4 mts.

de altura y 70 cm. de diámetro, pintado de negro. Por el peso de la base superior el cilindro se mantiene plegado, cuando se

va a sondear se extiende por medio de una driza como se ve en la figura; en el instante que se lee la sonda, se arria y entonces los observadores hacen la observación.

Mientras se sonda, si se notare una rápida disminución de la profundidad, se detendrá el buque y se arriará una embarcación para explorar la zona. El sondador prevendrá inmediatamente que se dé cuenta de que hay poca agua, antes de hacer la lectura, de que hay *poco fondo*, para que el comandante del buque pueda tomar rápidamente las medidas precaucionales del caso.

**293. Distribución de sondas.** — Para obtener con un número dado de sondas la representación completa del relieve submarino, es más ventajoso distribuir las sondas en mayor cantidad en la dirección de la máxima pendiente que en la de las líneas de igual nivel, es decir, que las sondas se efectuarán siguiendo líneas aproximadamente normales a las de igual profundidad. Las líneas que en general, son también normales a la costa, que puede considerarse como la primera curva de igual profundidad.

El intervalo entre las líneas de sondas variará de acuerdo con la escala en que se construirá el plano, y sobre todo según ya lo indicamos, guiándose por la regularidad del fondo.

En un paraje desconocido, no se tendrá idea de las irregularidades sino después de iniciadas las operaciones, por lo que en general convendrá distanciarlas al principio, agregando más tarde nuevas líneas en los parajes más quebrados o interesantes, en los pasos y especialmente en las proximidades de bancos peligrosos. Si existiera ya un levantamiento, aunque fuese incompleto, su examen dará la norma de ejecución del trabajo. En general, las líneas estarán separadas por intervalos de 150 metros para planos de puertos y fondeaderos y de 400 metros para el de radas o bahías, elevándose a mayores distancias en las líneas retiradas de la costa, siempre que el relieve submarino no presente la configuración de placeres o barras muy extendidas. Muchos aconsejan la regla de establecer el intervalo entre las líneas de 1 centímetro en el plano, cualesquiera sea la escala, es decir, de 100 metros si la escala es  $\frac{1}{10.000}$  y

de 1000 metros si es  $\frac{1}{100.000}$ .

Es de interés trazar las curvas de igual profundidad de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 50, y 100 brazas; ellas son de mucho valor para interpretar y examinar el trabajo, pues indican las áreas de menor profundidad que pueden requerir un examen posterior. Además, las curvas anormales o improbables indican incertidumbre en el relevamiento submarino que exige una ampliación de los sondeos o indican inexactitud en el trabajo.

Cerca de costa las curvas de igual profundidad tienen tendencia al paralelismo con aquello y entre sí; cualquier diferencia con las condiciones probables que debe tener la configuración del fondo indicará un error o zonas de menor profundidad. En general se encontrará que las curvas se apretan o expanden en forma semejante donde hay un aumento o disminución del declive del fondo y cualquier anomalía que se presente en esta disposición en las líneas requiere una exploración más completa.

Debe cuidarse no excederse en la densidad de sonda allí donde no sea necesario, ello representa pérdida de energías, tiempo y dinero, la calidad del fondo y la pendiente del mismo determinará su densidad. El mayor cuidado debe ponerse en las zonas de canales o pasajes frecuentados por la navegación y que puedan ser de fácil situación para el buque por las señales naturales o las artificiales que sea factible colocar.

En costas abiertas al mar, las sondas pueden distribuirse como está indicado en la (fig. 270); donde con un mínimo de recorrido se cubre la zona de manera que cerca de la costa son más densos los sondeos. La disposición indicada en la figura debe considerarse como un sistema de trabajo hacia el cual debe aproximarse el operador, pero en la práctica no será factible, por las condiciones de viento, corriente, falta de enfila-

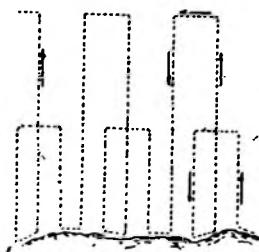


Fig. 270.

Las líneas de sondeos deben cortarse por otras para comprobar cierto número de sondas, las que se consideran como comprobación de toda la línea; una divergencia en la profun-

didad para un mismo punto puede ser atribuida; 1.º a que se ha sondado mal; 2.º a que se ha hecho mal la reducción del sondeaje. La mala situación no se admite pues esta operación está comprobada por si sola.

Cuando se nota un salto brusco en la profundidad, debe rectificarse la sondada y explorar la zona, para lo cual se dejará caer un boyarin de los que se deben tener listos y que servirá como punto de referencia.

En los sondajes cerca de tierra y dentro de bahías o rios no es posible llevar las líneas en forma análoga a la indicada en la figura 234, y siendo muy grande el numero de sondas a hacer para dar la densidad de sondeaje que exige la escala del plano, se deberá sondear por zonas como se indicará más adelante.

**294. Situación de sondajes.**— Los métodos que se aplican para situar los sondajes se usan tanto para los efectuados cerca de la costa como lejos de ella y en general son los mismos que los empleados en la topografía para situar los puntos de detalle.

El criterio para fijar la precisión en la situación de un sondeaje es consecuencia de la precisión con que puede situarse un buque con los métodos e instrumentos de navegación, esta hace inútil una exagerada exactitud en la primera.

*Situación por intersección directa.*— Con este método se elige en tierra dos o tres puntos situados, que pueden ser vértice de triangulación o poligonal y que dominen la zona que se va a sondear; los ángulos en la intersección no deben ser menores de 30°, los observadores hacen estación de teodolito en los puntos elegidos. Siempre convendrá tener una de las estaciones B, suficientemente internada, para que cuando se sonde cerca de tierra, donde las visuales de A y C se cortan muy oblicuamente, el corte de la visual de B sea conveniente. Siendo tres los observadores, una de las visuales servirá de comprobación y la situación se hará con las dos cuyo corte se aproxime más a 90°.

Siendo dos las estaciones A y B en tierra, deberá a bordo tomarse el ángulo entre las señales que haya en los sitios de

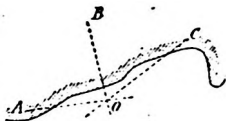


Fig. 271

los observadores u otras, con objeto de comprobar la intersección de esas visuales. Cuando esta comprobación resulte difícil hacerla al observador de la embarcación, convendrá que aunque no la haga para todos los sondeos, lo efectúe para algunos de ellos con objeto de poder establecer después cual de los observadores en tierra ha cometido el error, el que en algunos casos podrá encontrarse y por lo tanto aprovechar el trabajo que de otra manera estaría totalmente perdido.

*Una estación en tierra y otra a bordo.*—Cuando no se tiene más que un observador para instalarlo en tierra, o cuando se está muy cerca de ella, habiendo dos estaciones A y C (fig. 271) las intersecciones de las visuales observadas desde ellas no son convenientes; es necesario medir el ángulo AOB desde a bordo con un sextante.

*Aplicación del problema de la carta.*—Cuando no se tiene ningún observador en tierra o por dificultad en las comunicaciones con ellos se va a trabajar una serie de días sin reunir las libretas para situar los sondeos o se quiere llevar un plano de trabajo cuando se sonda desde un buque, lo que es muy recomendable, dos observadores provistos de sextante miden simultáneamente los ángulos entre las señales en el instante en que el sondador canta la sonda, la situación se hace con el estimógrafo cuando se trata de hacer un croquis del trabajo, cuando se quiere situarlos definitivamente debe calcularse sus coordenadas.

## 295. Sondar con boyas de berlinga situadas. — Cuando

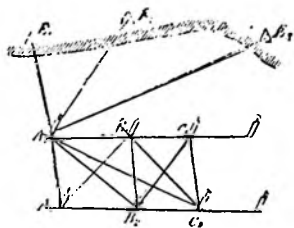


Fig. 272.

la zona a sondear es muy extensa y el fondo no muy irregular, siendo muy difícil situar los sondeos a grandes distancias, 20 a 40 Km., pues se necesita condiciones atmosféricas excepcionalmente favorables, conviene aprovechar los días apropiados en fondear y situar una red de boyas de berlinga (fig. 272),

A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>... A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub>... a 2 o millas una de otra, los

observadores desde tierra sitúan al buque que en el instante en que hace la señal debe estar lo más cerca posible de la boya. Situada la red de boyas, el buque sondador las recorre manteniéndose exactamente en la enfilación de dos de ellas y vigilando mucho la máquina para que mantenga un número de revoluciones constante.

Las líneas que se sondan son los lados de los cuadriláteros  $A_1 A_2 B_1 B_2$ ,  $B_1 B_2 C_1 C_2$ , etc. y sus diagonales; cuando se quieren hacer más densos los sondeos se sondan también las diagonales  $A_1 C_2$ ,  $A_2 C_1$ , etc.

Siendo la velocidad uniforme, su distancia  $A_1 B_1$  en ese recorrido dividida por el tiempo que ha durado la recorrida nos dá la velocidad en metros, como se conoce el tiempo transcurrido entre el instante en que el buque ha salido de  $A_1$  y el instante en que se ha hecho cada sondeo se deducirá el número de metros que sobre la línea  $A_1 B_1$  a partir de  $A_1$ , debe tomarse para situar ese sondeo. Lo mismo se hará para las otras líneas de sondeos.

Cuando se sonda empleando este método debe calcularse el triángulo boya y las estaciones en tierra:  $A_1 E_1 E_2$ ,  $A_1 E_2 E_3$ , como en el caso de situación por intersección y se calcularán sus coordenadas rectangulares y con ellas se deducirán las distancias entre las boyas.

**296. Sondar fuera de la vista de costa.** — Se puede llevar una triangulación en el mar o situar los sondeos por observaciones astronómicas y de estima.

La triangulación en el mar se hace cuando debe situarse un banco o escollo en que no es suficiente la aproximación que puede dar la situación astronómica.

El ejemplo siguiente dá idea del procedimiento:

Sean A y B (fig. 275) dos vértices de la triangulación; C y D la posición de dos buques en los límites de visibilidad de A y B, en estas estaciones se mide con teodolitos los ángulos 1, 2, 3 y 4, los que con la base AB sirven para calcular las coordenadas de C y D, con estas coordenadas se calcula la longitud CD y su azimut; en estos puntos se fondean boyas que sirvan de referencia, colocando otros buques en E y F, a la señal de uno de ellos se miden los ángulos de 5 a 11,

se compensa el cuadrilátero y se obtiene la longitud y azimut de E F, los buques que están en C y D se trasladan a G y H y se continúa hasta llegar a la zona que se quiere sondar.

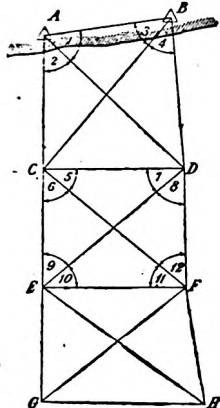


Fig. 273

exactitud que puede esperarse del trabajo. La fig. 274 muestra una red cerrada; se calculan los cuadriláteros ABCD, CDEF, EFGH, para determinar la posición de H, se hacen luego los triángulos HPI, FID, IDK y DKB para determinar la longitud y azimut de BD; estos elementos se determinan también directamente mediante la base AB y el triángulo ABD, la divergencia que se obtenga nos dará un criterio de la aproximación.

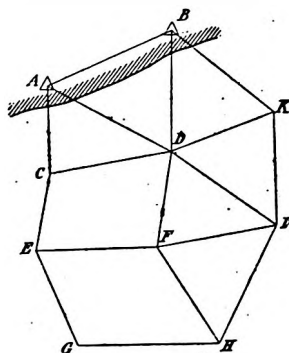


Fig. 274

En algunos casos la zona a levantar fuera de la vista de costa es paralela a ella,  $ZZ'$ , (fig. 275); sobre AB se apoya la base  $A_1B_1$  en el límite de visibilidad y sobre ella se hace la cadena de cuadriláteros que se inicia en Z y termina en  $Z'$ , luego se lleva la cadena sobre la base CD que está unida por triangulación a AB,



La diferencia de coordenadas entre A y C, calculada por la triangulación terrestre y por la triangulación marítima debieran ser idénticas, no lo serán, se reparte el error obtenido, siempre que esté dentro de la tolerancia que permite el trabajo; tolerancia que está determinada por la escala de la carta.

**297. Empleo de observaciones astronómicas.**—

Cuando los sondajes deben llevarse fuera de la vista de costa con objeto de sondear una gran zona que sirva para recalada o con objeto de determinar la meseta continental será suficiente las situaciones astronómicas de acuerdo con los métodos empleados en navegación.

Se situará el buque por marcaciones a tierra o por el problema de la carta hasta el límite en que esto puede hacerse, se combinaran luego las observaciones de latitud y longitud con una estima muy bien llevada para trazar las líneas de sondas, se volverá después a vista de costa para situar el buque como antes se ha dicho, esta será la situación de llegada que con la de partida constituyen los puntos que deben considerarse como exactos. La diferencia entre la situación de llegada observada directamente y la transportada por las observaciones astronómicas y de estima, se reparte entre las situaciones intermedias haciéndose una compensación de las mismas.

**298. Buscar bajos fondos y peligros.**— En las cercanías de los bancos, se recomienda ejecutar un nuevo sistema de líneas de sonda paralelas que corten normalmente la dirección general del banco. Si los bancos descubren se aprovechará la marea baja para determinar su contorno en la parte descubierta, debiéndose anotar la hora en que se efectúa, como también la hora en que el banco descubrió su cresta.

Si sondando con el buque se nota una notable disminución

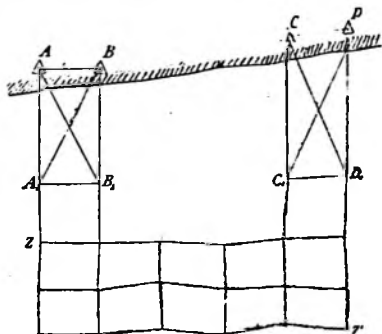


Fig. 275.

del fondo, deberá fondearse y se harán las señales para situar el buque; se arriará una embarcación la que hará sondajes radiales, situándolos con marcaciones que se toman desde abordo y la distancia medida mediante la altura del palo del buque, observando el ángulo abordo de la embarcación.

Cuando sea muy grande el bajo fondo, fondeado el buque en A, se fondea y sitúa otra embarcación en B por marcación y distancia; el sondador recorre el bajo fondo C, los sondajes son situados con sextante desde A y B. Si el veril del banco está muy próximo a la enfilación A B en C', se toma otra base de trabajo A D.

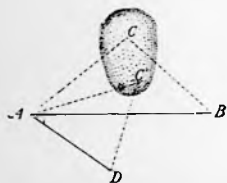


Fig. 276

En los alrededores de un peligro aislado, como es una roca, debe efectuarse el estudio con mucho cuidado. Sea que la presencia de uno de estos peligros haya sido señalada por los pescadores o prácticos de la localidad, o que se sospeche su existencia por las sondas

efectuadas anteriormente o bien por algún movimiento extraño del agua, se debe emprender su exacta determinación, trasladándose un oficial con una o varias embarcaciones al punto sospechoso, fondeando en él una pequeña boya y ejecutando a partir de ese punto líneas de sondajes radiales en todas direcciones. Si con estas primeras líneas no se descubriese el peligro, se fondearán sucesivamente nuevas boyas en el límite de la primera operación y efectuará a su alrededor sondas radiales hasta dar con el peligro o comprobar su no existencia.

El buscar rocas aisladas es una de las operaciones más difíciles de la hidrografía, pues algunas no tienen sino 10 o 20 m<sup>2</sup> de superficie en la parte de menor fondo.

En muchos parajes el relieve submarino está caracterizado por una serie más o menos continua de escollos que tienen una dirección común, donde esto es notado, se hará una serie de líneas de sondas paralelas a la dirección común que se completarán con otras líneas convergentes con el eje del escollo.

Cuando hay rompientes no se podrá hacer más que sondear hasta lo más próximo posible y luego situar el contorno de las rompientes.

Para descubrir arrecifes que no velan es muy útil examinar la zona con tiempo tempestuoso y aún suele ser mejor hacerlo inmediatamente de calmado el temporal cuando queda gran mar de leva que rompe en los bajo fondos.

Un procedimiento práctico es dejar ir la embarcación a la deriva o navegar con muy poca velocidad, llevando un escandallo colgando y de manera que se mantenga a una profundidad mayor que la que se le supone al bajo fondo. Cuando el sondador siente que la sonda toca fondo se levanta otro poco el escandallo y así se llegará a la profundidad mínima, en esta forma se obtiene un perfil continuo del fondo.

Otro procedimiento consiste en unir dos embarcaciones con un fuerte hilo metálico de 150 a 200 ms., esta línea lleva intercalada unas 15 o 20 boyas de las que parten unos suspensores cuyo largo está de acuerdo con la profundidad que se quiere explorar; estos suspensores están unidos entre sí por otro cable metálico. El conjunto forma un marco que es mantenido vericalmente por pesos convenientes.

Detalles completos se encontrará en el tomo V de los Anales Hidrográficos.

La figura 277 muestra un dispositivo fácil de construir y que puede ser llevado a remolque por una embarcación, puede emplearse para explorar pasos angostos o zonas de poca extensión. La figura 278 muestra un dispositivo adoptable a una embarcación de poco calado y que puede utilizarse en las enfilaciones de entradas a puerto o entre boyas para tener la seguridad de que se puede pasar con seguridad con un buque de calado no mayor que el comprobado.

Las rocas aisladas cuando tienen muy poca agua son conocidas por la rompiente o intumesencia que se forma sobre ellas, por la sombra cuando el agua es transparente y por las vegetaciones marinas.

La observación desde cierta altura es muy conveniente, es sabido que en parajes de calma y aguas transparentes aún puede verse el fondo cuando es poca la profundidad.

Si la roca descubre se anotará la hora en que lo haga, por comparación con la altura de la marea, en ese instante se

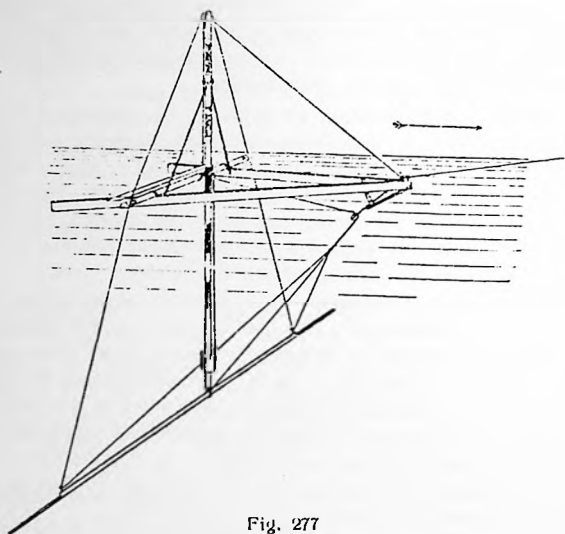


Fig. 277

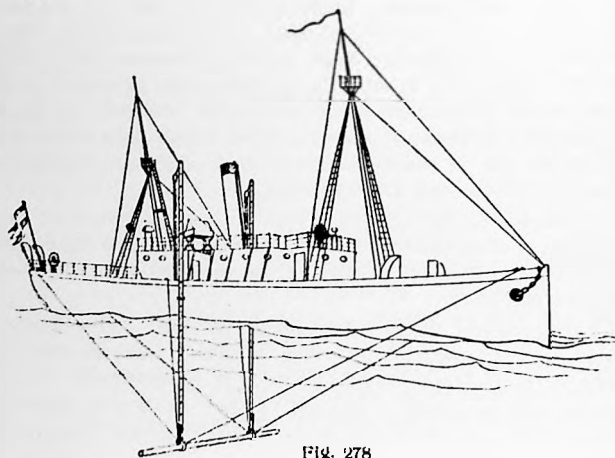


Fig. 278

tendrá la altura de su vértice sobre el nivel de reducción de sondas.

**299. Reconocimiento de un río o canales.**—El relevamiento exacto exige una red de triángulos cuyos vértices se apoyen sobre las márgenes del río o canal. Puede también unirse mediante un triángulo un punto de su desembocadura con otro interior en el límite del relevamiento, la determinación de esos dos puntos sirven para cerrar una poligonal que se llevará sobre cada una de las márgenes; los métodos de cálculos y trabajo son los ya expuestos para la topografía y sondajes.

También puede hacerse una poligonal sobre una de las márgenes, pasar a la otra con un triángulo y luego volver por esta con otra poligonal que se cerrará con un triángulo en el punto de partida.

Cuando solo se trata de un reconocimiento o levantamiento aproximado, puede procederse como sigue teniendo una sola embarcación.

En el punto de partida A en la desembocadura o donde se inicia el trabajo se coloca una boya; manteniendo la máquina al mismo número de revoluciones constantemente se deducen las distancias recorridas A B, B C, ... etc., con un compás se observa la orientación de A B, B C ... etc. La diferencia de rumbos nos dá los ángulos A B C, B C D, ... etc., como ya tenemos las distancias A B, B C, etc., deducidas por la velocidad del buque, prácticamente hemos hecho la poligonal A, B, C, etc.

Navegando de A a B, en B' que se sitúa por rumbo y dis-

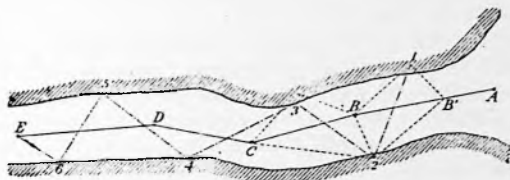


Fig. 279

tancia, se miden los ángulos A B' 1, A B' 2; A es la boya, 1 y 2 puntos característicos de la costa, árboles, piedras, etc.; en

B se mide A B 1 y A B 2; con las visuales anteriores se determina la situación de 1 y 2. Se mide el ángulo 2 B, 3 desde C mide 2 C 3 y queda situado 3; análogamente se sitúan 4, 5, 6 etc.

De regreso con la embarcación se viene sondando las líneas 6 — 5, 5 — 4, 4 — 3, ... etc., y se reparten los sondeos proporcionalmente al tiempo de cada corrida.

Con dos embarcaciones puede procederse como sigue: en A se fondea una de ellas provista de un palo alto, la otra embarcación se fondea en B y desde ésta con un micrómetro o telémetro se mide la distancia A B, con el azimut se tiene la orientación del lado, después de hacer las medidas angulares necesarias para situar varios puntos de las márgenes, A se traslada a la posición C, desde B se mide la distancia y luego B se traslada a D y se continúa análogamente.

**300. Conducción de los trabajos de sonda.** — Cuando se sonda con el buque en costa abierta y alejándose a cierta distancia de ella, no se tienen un número suficiente de enfilaciones para que recorriéndolas con el buque se obtenga la densidad de sondeo necesaria.

Para hacer la línea de sondas, sin que éstas se superpongan y sin que queden muy espaciadas, se proveerá al Jefe de sondeos de un plano donde esté dibujado el contorno de la costa y situados todos los puntos notables para poder situar al buque, se empleará preferentemente el problema de la carta pero podrá usarse cualquiera de los otros medios usados en la navegación costera; de esta manera se lleva sobre el plano el recorrido del buque y no se producirán claros ni superposiciones entre las líneas.

Cuando se trabaja en una bahía o puerto, donde la embarcación no se aleja mucho de la costa, podrá guiarse por enfilaciones naturales o artificiales, estas últimas pueden ser muy simples, astas con banderas, ya que van a ser utilizadas a corta distancia. A continuación se dan algunos ejemplos de utilización de enfilaciones.

Si A es el punto interior (fig. 280), bastante alejado para que la divergencia entre las líneas sea muy poca, se coloca en 1, 2, 3, 4, etc. sobre la playa una bandera y a una distancia entre ellas tal que las líneas de sondeos estén espaciadas

de acuerdo con la escala del plano. El sondador recorre las enfilaciones. En la (fig. 281) se aprovecha un punto interior A y una serie de boyas de berlinga que se han fondeado a distancia conveniente una de otras. En algunos casos la costa es muy elevada y no se domina ningún punto del interior desde la embarcación, en este caso deberá tirarse las líneas entre los puntos característicos de la playa o situar una serie de banderolas (fig. 282) *a, b, c, . . . a<sub>1</sub>, b<sub>1</sub>, c<sub>1</sub>, . . .* entre las que se llevan las líneas de sonda. Cuando las banderolas son colocadas en puntos situados en el plano, vértices de poligonal, las enfilaciones son li-

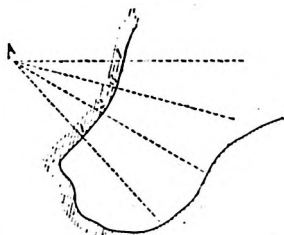


Fig. 280.

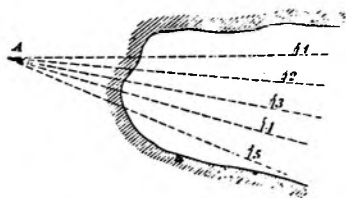


Fig. 281.

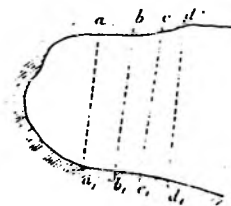


Fig. 282.

neas de situación exactas y es suficiente la medida de un ángulo para determinar la posición del sondaje.

Cuando la densidad de sondaje deba ser tal que no haya interés en que los sondajes sean llevados según líneas preestablecidas, o que las condiciones atmosféricas del puerto, o la corriente lo impidan o dificulte, se trata de cubrir la zona con sondajes evitando que quede claros o que haya líneas superpuestas lo que es una pérdida de tiempo.

Si se trata de un puerto cerrado (fig. 280) puede establecerse una primera zona parcial limitada por la enfilación A — 2 y el fondo de la bahía, después que esta ha sido bien sondada se pasa a otra y se procede lo mismo.

Otra manera de conducir el trabajo es fondear sucesivamente

líneas de boyas de berlinga, se va llenando las zonas parciales comprendidas entre ellas.

Cuando se tenga un claro A, en el que debe ponerse algunas líneas de sondas para rellenarlo, nos fijaremos en el plano de situación de sondas si tenemos una enfilación conveniente. Si solo disponemos de un punto M, se puede colocar una

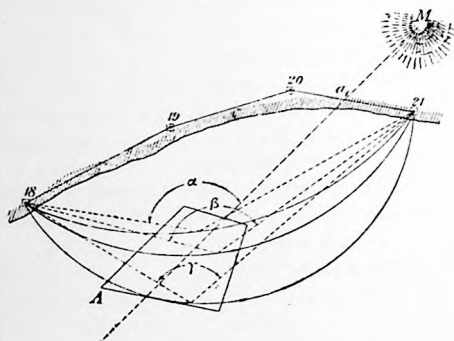


Fig. 285.

bandera en  $a_1$ ; teniendo en cuenta que los vértices de la poligonal están todos marcados con estacas en el terreno, medimos en el plano la distancia del vértice 21 —  $a_1$  y en el terreno se coloca la banderola.

Si no se dispone de M, puede colocarse banderolas en los vértices de poligonal 18 y 21 y luego sondar en el arco capaz de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . La práctica del encargado de los sondeos hará que determine el segmento de arco que le conviene, en trabajos de sonda debe tenerse en cuenta sobre todo la pericia marinera del que lo dirige.



## CAPITULO XXVI

### OBSERVACION DE LA MAREA

X 301. Preliminares.—El estudio de la variación del nivel del mar con relación a un plano de referencia constituye la observación de la marea. El modo de observarla consiste en anotar a intervalos de tiempo establecidos la altura que tiene el nivel del agua sobre el nivel de referencia.

Es evidente que los aparatos registradores deben facilitar mucho y hacer más precisas y continuas las observaciones, pero estos necesitan instalaciones especiales que no siempre es posible establecerlas, estándose obligado a colocar en el mar una regla vertical graduada sobre la cual se leen las alturas de nivel que se llama *escala de marea*.

Los movimientos del mar están íntimamente ligados a los fenómenos astronómicos, es por esto de gran importancia que las horas a que se producen las variaciones observadas en el nivel del mar sean exactamente conocidas. Se adopta para las observaciones la *hora media local*, la que se obtiene de un cronómetro; no debe cometerse error mayor de 2 minutos en la observación.

El plano de referencia de las lecturas, que es el cero de la regla, debe estar referido a un punto conocido en tierra; diferencia de nivel entre cero de la regla y el punto elegido, lo que permitirá en cualquier momento continuar las observaciones aunque se hubiesen sacado las escalas.

X 302. Posición del punto de observación.—En la elección del paraje para instalar una estación mareográfica debe tenerse en cuenta que esté en comunicación directa con el mar, en lugar relativamente profundo y que haya poca marejada.

En la fig. 284, la flecha S indica los vientos predominantes en la región; A es el paraje mejor para instalar las reglas, allí

llega la marea libremente y está más al abrigo del viento y la marejada.

En la posición B la instalación y lecturas de las escalas sería más difícil por ser demasiado batida por el mar.



Fig. 284

La posición C estaría en buenas condiciones de instalación y observación, pero como con la disminución de fondo hay aumento en la amplitud de la marea, las observaciones que se hicieran en C no responderían al estudio general del fenómeno en la zona. En las mismas

condiciones se encuentra una estación instalada sobre un banco, en una barra o detrás de una rompiente.

En D se tendría una posición muy resguardada pero también es inconveniente, se ha observado que cuando una zona comunica con el mar por un canal estrecho la amplitud de la marea sufre una disminución.

Es necesario que las escalas puedan ser observadas desde la pleamar hasta la bajamar, es decir que nunca queden en seco ni totalmente cubiertas por las aguas; si esto sucede hay que colocar varias reglas. Además, las lecturas deben poderse hacer con facilidad, en todo tiempo, tanto de día como de noche.

303. **Escalas de mareas. Graduación.** — Están divididas en metros y fracción de metro, tienen un ancho de 30 a 40 centímetros y 3 mts. de largo. Si deben ser leídas desde muy cerca se gradúan en centímetros; también las hay divididas en decímetros; cualquier observador puede apreciar el cuarto decímetro. Con ayuda de un anteojo se facilita mucho la lectura. Cuando las observaciones se recogen para un estudio de marea, las lecturas deben ser hechas al centímetro. La graduación de la escala depende también de la amplitud de la marea; es natural que en donde la amplitud es de 60 cm. se exija más exactitud en la lectura que en donde es de 8 o 10 metros

La figura 285, muestra tipos de graduaciones; en algunas se

fija un tubo de vidrio abierto en sus dos extremidades, es una disposición que facilita las lecturas donde haya marejada, se

cierra parcialmente la extremidad sumergida con un corcho recortado o agujereado, dentro del tubo se pone un objeto flotante que indique el nivel del agua, este puede ser una pelotita de corcho chamuscado de diámetro menor que el del tubo.

304. Colocación de las escalas. — La manera de fijar una regla depende de la naturaleza del fondo del mar y de la costa.

Habiendo un sitio donde apoyarla, de manera que quede vertical, roca, piedra o barranca se fija con pernos como indica la fig. 286; lo mismo se fija sobre un muelle.

Si hay que colocarla en la playa, si el fondo es de arena

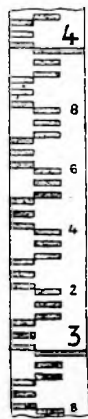


Fig. 285.



Fig. 286.

o fango, se acopla a la regla un madero o hierro con regatón y se entierra en el fondo fig. 287 se refuerza con 3 o 4 vientos hechos firmes en estacas que se clavan en el fondo en bajamar.



Fig. 287. afirman en piedras grandes que se fondean.

Cuando no se pueden fijar reglas de marcas en la playa por-

Cuando el fondo es de piedra o tosca se busca una grieta donde meter el apéndice de hierro de la regla y en vez de estacas se colocan clavos o pedazos de varillas de hierro puntiagudos; es muy conveniente el uso de hierro ángulo.

Cuando es imposible clavar en el fondo las estacas puede ponerse en la base de la regla un montón de piedras (fig. 288), y los vientos se



Fig. 288.

que éstas no se aguantan en la posición que deben tener, se piqueta la playa y se hace una nivelación entre las cabezas de los piquetes; la observación se efectúa anotando la hora en que el agua los cubre y descubre.

Se hará una determinación aproximada de la graduación  $N$  que corresponde al nivel medio y de la semi amplitud  $h$  de la marea en el lugar como se indica más adelante, la lectura  $N - h$  debe quedar por arriba del cero de la regla para que esto nunca quede en cero.

**305. Empleo de varias escalas.**—Cuando la playa en que se haya colocado la escala de mareas tiene una pendiente suave y la amplitud de marea es considerable, conviene para facilitar las lecturas y evitar que las reglas sean demasiado largas, usar varias escalas colocadas en una dirección más o menos normal a la costa. Se acostumbra numerarlas según se

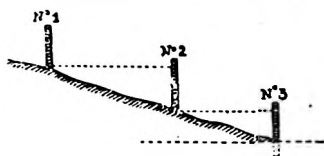


Fig. 289

ve en la figura 289. Estas escalas deben estar previamente comparadas entre sí, para lo cual debe dárseles colocación conveniente de modo que antes que el nivel del agua deje una escala,

pueda tomarse en la otra en el mismo instante, la altura que corresponde a dicho nivel.

En el cuaderno de observaciones de mareas se anotará la hora y alturas correspondientes a cada cambio, v. g.

Cambio de escala a 6<sup>h</sup> 00<sup>m</sup> a. m.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Escala N.º 2} = 1^{\text{m}} 63 \\ \text{, , 1} = 0^{\text{m}} 19. \end{array} \right.$

Las escalas están así relacionadas entre sí, siendo por lo tanto muy sencillo reducir las observaciones a lo que hubieran sido si se hubieran tomado en una sola; el cero de la escala N.º 2 está  $1^{\text{m}} 63 - 0^{\text{m}} 19 = 1^{\text{m}} 44$  por debajo de la escala N.º 1; habra que sumar  $1^{\text{m}} 44$  a las lecturas hechas en la regla N.º 1 para obtener las que se hubieran hecho en la N.º 2, si esta estuviese prolongada.

**306. Observación de las escalas.**—El observador tendrá un reloj que le servirá para llevarlo al sitio donde están las reglas

y hacer la observación a la hora exacta; además, tendrá un buen acompañante o cronómetro para que por comparación pueda arreglar su reloj a hora media local.

Las observaciones deben hacerse cada hora o media hora y en las proximidades de las pleas y bajamares cada 10 minutos.

Las lecturas deben hacerse cuidadosamente, cuando el mar está en calma no habrá inconveniente: es útil comparar la lectura hecha con las anteriores y ver la diferencia entre ellas, en esta forma adquiere el observador una idea de la velocidad de la variación en altura y si la lectura está mal hecha se apercibe de inmediato y puede rectificarla haciéndola de nuevo.

Cuando hay marejada leerá repetidas veces el nivel máximo y el mínimo, el promedio de las dos lecturas extremas dará la lectura que debe anotarse; para juicio de la observación también anotará la amplitud de la oscilación.

**307. Registro de observaciones.**— De acuerdo con lo que se ha dicho debe tener las siguientes columnas:

**Estación de muelle San Blas.**

**Día 23 de Febrero de 1914**

Luna, último cuarto, 8 a 12h — 14°40'47" S  
edad 28 días

Paso { sup. =  
inf. = 11h 39m 48s

Hora	ALTURA		VIENTO		Barómetro	Termómetro	Observaciones
	Observ.	Corregida	Dirección	Fuerza			
0	374	382	S	10	763.6	20	Regla observada A Amplitud de la oscilación del nivel del agua 10 cm.
1	391	400	S E	7	763.8	22	
2	399	408	S E	7	763.8	24	
3	376	385	S E	7	763.8	21	
4	341	350	S E	5	767.1	19	
5	299	308	S E	5	767.0	18	
6	277	286	S E	5	763.9	17	

En la de «observaciones» se anotan las lecturas hechas cada 10 minutos en plea y bajamares.

Si hay varias escalas se anotará las lecturas simultaneas hechas en ellas para un mismo instante.

La altura corregida es la observada a la que se ha aplicado la corrección por presión barométrica, su valor es 13.3 mm. por cada milímetro de diferencia entre la presión observada y 760 mm., a sumar, si la observada es mayor que 760 y a restar si es menor.

X 308. **Referencia de las escalas.** — Ellas deben ser referidas a puntos determinados en tierra, sea cualquiera el cuidado que se tenga para instalarlas, pueden caerse o moverse, la referencia permitirá una vez que se vuelvan a colocar hallar la lectura correspondiente al cero de la regla en su anterior posición o si después de terminado el estudio hidrográfico en un lugar, se quiere continuar o rectificar el trabajo, los puntos de referencia son necesarios para determinar los planos de nivel usados en el trabajo anterior.

Como punto de referencia se elegirá un objeto natural, piedra donde se hace una marca o se pone un bulón, también puede construirse un pilar de mampostería tomando la cara horizontal superior como plano de referencia. La diferencia de nivel entre este plano y el cero de la regla se obtiene con un nivel haciendo una nivelación simple o compuesta que en todo caso debe ser cerrada para su comprobación.

X 309. **Mareómetros.** — Son instalaciones cuyo objeto es colocar las escalas al abrigo de la marejada.

Se construye un pozo en comunicación con el mar y en su interior se coloca un flotador, éste se une por un hilo, que trabaja por varias poleas, a un índice que se desplaza a lo largo de una escala en la cual se hacen las lecturas.

#### MAREÓGRAFOS

Son aparatos que registran automáticamente el nivel del agua. Se componen de dos partes principales, un aparato registrador y un sistema destinado a transmitirle la variación del nivel del agua.

La transmisión puede hacerse mediante un *flotador* o por la variación de la *presión* del aire contenido en un recipiente de paredes elásticas colocado en el agua por debajo del nivel de las bajamares.

**310. Mareógrafo a flotador.** — Sus partes principales son (fig. 290). 1.º El flotador A y su pozo P. 2.º La transmisión constituida por las poleas H y F, los cables o cadenas *a* y *b*, el carro portalápiz C. 3.º El registrador formado por el tambor T y el reloj R.

*Funcionamiento.* — El flotador A al subir o bajar al nivel N del agua, hace girar la polea H por medio del cable *a*, al girar H,

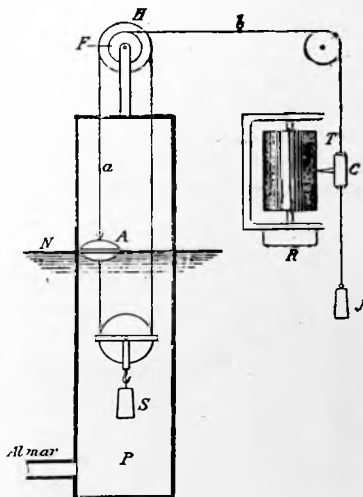


Fig. 290.

gira F fija en el mismo eje; esta lleva envuelto el cable *b* que siempre está en tensión por el contrapeso J, el desplazamiento de *b* arrastra el carro C. que lleva el lápiz, el que hace un trazo sobre el papel colocado en el tambor T, este tambor tiene un movimiento de rotación de una vuelta en 24<sup>hs</sup> debido al reloj R.

En el papel del tambor T debe tenerse una línea de referencia para medir los desplazamientos del carro y un origen para contar los tiempos.

*Pozo.*—El mareógrafo puede instalarse sobre un apoyo especialmente construido para ese objeto, un muelle pequeño, de manera que la vertical del instrumento cae sobre el agua. en este caso debe hacerse una construcción especial para introducir el flotador, resguardándolo de la marejada; puede servir un tubo de hierro abierto en su parte inferior para que tenga comunicación con el mar.

Si el mareógrafo está instalado en tierra se hará un pozo en la vertical del instrumento, el que se comunica con el mar; esta comunicación debe estar por debajo del plano de las mayores bajamares y debe ser suficientemente amplia para que las variaciones del nivel del mar se manifiesten dentro del pozo sin retardos y sin alteración; se tendrá especial cuidado que no se obstruya esa comunicación.

Cuando la comunicación no está toda debajo del plano de las mayores bajamares se hace a sifón (fig. 291).

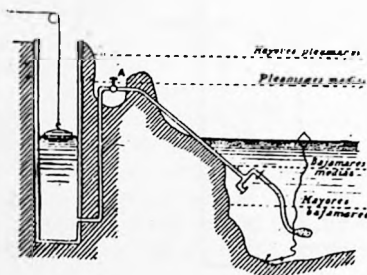


Fig. 291.

*Flotador.*—Es una caja de cobre herméticamente cerrada, con unos ganchos se le fija la cadena *a*; el contrapeso *S* sirve para mantenerla en tensión, algunos mareógrafos no lo tienen.

Tiene gran importancia asegurarse que el flotador es bien estanco, si le entra agua puede perder su flotabilidad y se irá abajo hasta chocar con la polea *S*, caso en que no acusará ninguna variación de nivel en el registrador o tomara una posición de equilibrio que variará con el nivel de agua pero sin



que se mantenga una relación constante; en la faja registradora se marcará una curva irregular, que no es la representación gráfica de la variación del nivel del agua, y que podría inducir en el error de considerarla como tal.

*Trasmisión.*—Es el conjunto de cables, poleas y el porta-lapiz. La relación de los radios de las poleas es la reducción de la amplitud de la marea en su representación gráfica. Esta reducción depende de la amplitud de la marea en el lugar, si es de 8 metros, será suficiente que sea  $\frac{1}{20}$ ; a los 8 ms. de amplitud corresponderá 40 cm. de desplazamiento del lapiz. cada milímetro de la faja registradora representa 2 ms. de variación del nivel del mar. Si la amplitud es de 2 ms. la reducción debe ser  $\frac{1}{5}$ ; a 2 ms. corresponderá 40 cm. en la faja y 1 mm. de esta, 5 mm. del nivel del agua.

Cuanto menor es la amplitud, más exactitud se requiere en la observación de la variación del nivel del mar, de aquí la importancia de elegir para caso el mareógrafo apropiado.

La polea H es generalmente una rueda dentada y el cable *a* una cadena cuyos eslabones encajan en los dientes de H, el paso de estos debe ser igual a la longitud de los eslabones; debido a la calidad del metal de la cadena y a su uso, ella se alarga y en algunos tramos de la misma no encajan los eslabones en los dientes, montándose la cadena sobre la polea, esto produce una variación de radio y por lo tanto de la reducción.

El carro porta lapiz C fijo al cable *b*, puede desplazarse sobre este, el objeto es que pueda llevarse el lapiz sobre la graduación de la faja registradora que corresponde al nivel del mar en ese instante, el que se lee en la escala de control.

*Registrador.*—El tambor T hace una rotación completa en 24 h<sup>a</sup> debido al reloj R; es necesario marcar todos los días, a una hora determinada, una marca sobre la faja, que sirva de referencia para su división horaria, en esto debe tenerse especial cuidado, pues en general los relojes de estos instrumentos sufren frecuentes variaciones en sus marchas.

*Escala de control* Debe tenerse instalada una escala de

mareas, cuyas lecturas comparadas con las que indica el registrador, nos servirá de control de estas últimas; estas comparaciones conviene hacerlas en los instantes de las pleas o bajamares, cuando el movimiento vertical de las aguas es mínimo.

En vez de tener instalada una escala de mareas suele medirse la distancia vertical entre la superficie del agua dentro del pozo y la placa sobre la cual se apoya el aparato, mediante una plomada, en la parte inferior del hilo de esta misma se coloca un papel especial que cambia de coloración con el agua, indicándose así hasta donde ha llegado el nivel de la misma.

*Hora y línea de referencia del diagrama.*— La faja registrada que se usa para colocar en el tambor está graduada de acuerdo con las constantes del instrumento de manera que su lectura corresponda al mismo desplazamiento del nivel del agua; esta graduación se desarrolla según la generatriz del cilindro del tambor. La escala de los tiempos está según la circunferencia del mismo.

Antes hemos dicho que las relaciones de transmisión varían y la marcha del reloj también, es por esto mejor usar fajas en blanco que se gradúan convenientemente.

Colocada en el tambor una faja en blanco se hace una lectura de la escala de control, supongamos que esta sea 3 m. 25, si el plano de referencia o *cero* de las lecturas corresponde a la graduación 1 m. de la escala, la graduación que corresponde a la faja es  $3.25 - 1.00 = 2.25$  ms. se hará una marca B fig. 292, sobre el papel y anotará esta lectura; en otro instante haremos la lectura 1.75 ms. en la escala del control, con relación al plano de referencia corresponde en la faja registradora  $1.75 - 1.00 = 0.75$  ms. haremos otra marca B', para graduar el papel medimos la longitud  $l$  entre las dos marcas, si  $l = 15$  cm, la relación entre la variación del nivel del agua y el desplazamiento del lápiz es  $\frac{2.25 - 0.75}{15} = 10$ , es, decir

que a 1.50 m. de variación del nivel del agua corresponde 15 cm. en la faja registradora y por lo tanto 1 mm. de esta representa 1 cm. de variación del nivel del agua.

Para las graduaciones horarias se hará lo mismo, se hacen

dos marcas en horas determinadas y se deduce el valor horario de 1 mm. de la misma

Si el papel está graduado se procede lo mismo, las graduaciones servirán de referencia para hacer la repartición proporcional del error.

Supongamos (fig. 292) que la marca  $a$  corresponde a 6<sup>h</sup> y

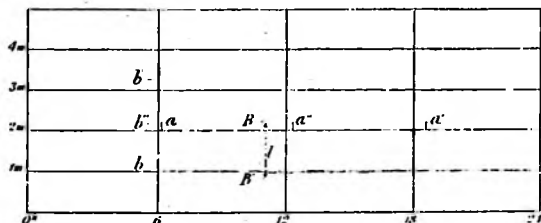


Fig. 292.

$a'$  a 18<sup>hs</sup>; si la diferencia  $6^h - a = 2$  mm. y  $18^h - a' = 6$  mm., trazaremos en 12<sup>hs</sup> la marca  $a''$  tal que  $12^h - a'' = 4$  mm.

Si la marca  $b$  corresponde a 1 m. y está a 2 mm. de esa graduación; la marca  $b'$  a 5 m. y está a 6 mm. de esa graduación; trazaremos  $b''$  tal que  $b'' - 2 m = 4$  mm.

*Examen del diagrama.*—Este da idea del funcionamiento del aparato y de las causas que pueden haber producido alteraciones.

La curva (fig. 295), nos revela que el flotador ha empezado a llenarse de agua, esto produce un descenso de la curva aunque sigue indicando las variaciones del nivel del agua; en B el flotador está en condiciones de equilibrio, experimenta desplazamientos irregulares; finalmente, lleno de agua se va a pique y no teniendo movimiento alguno marca una horizontal en el extremo de la laja que marca la menor profundidad.

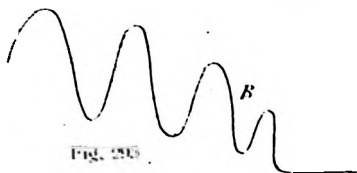


Fig. 295.

La curva de la figura 294 muestra que la cadena monta sobre la rueda por no engranar sus eslabones con sus dientes; en A vuelve a engranarse lo que produce un brusco desplazamiento de la curva.

La curva de la fig. 295 revela que la transmisión está muy

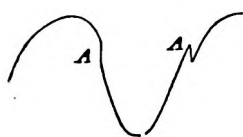


Fig. 294.



Fig. 295.

dura; al descender las aguas queda el flotador colgando y debido a esto aumenta su peso sobre la transmisión y la hace funcionar; el diagrama es a escalones; al subir las aguas, la cadena va quedando en banda; al soportar el flotador parte del peso de ella, aumenta la acción del contrapeso y la transmisión funciona.

El diagrama que se convierte en una recta, marcando una marca alta, indica que el mareógrafo repentinamente ha dejado de funcionar, manteniéndose el flotador muy alto; puede haberse obstruido la comunicación con el mar o haberse engranado la transmisión.

110 **311. Mareógrafos a presión.** — Si se coloca un aparato indicador de presión a un nivel inferior que las mayores bajamars, el indicará las variaciones de la presión del agua, esta es proporcional a la variación de la altura o espesor de la capa de agua que sobre el actúa.

Se puede transmitir estas indicaciones a un registrador colocado encima de la superficie del mar o colocado en el fondo, en este último caso se tiene los mareógrafos fondados que sirven para el estudio de las mareas en alta mar.

En general este sistema de registrar el movimiento del nivel del agua no ha dado resultados que desde todo punto de vista sea satisfactorio.

En nuestra marina se ha usado el mareógrafo a presión Richard. Se compone (fig. 296) de una campana de hierro A

con agujeros para permitir que el agua entre su interior y ejerza presión sobre un fuelle F, de goma; éste, mediante el tubo filiforme B pone en comunicación el aire de F con el tubo Burdon C; la variación de la presión del aire en F y B produce deformaciones del tubo C el que hace variar la extremidad I donde está fijada la pluma indicadora I que marca sobre la faja colocada en un tambor E.

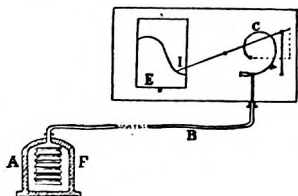


Fig. 296.

× 312. **Lectura de las curvas de mareas.**—Estas pueden haber sido obtenidas directamente con un mareógrafo o haber sido construidas, lo que siempre debe hacerse, con las lecturas horarias hechas en una escala de mareas.

En el primer caso debe corregirse el diagrama obtenido por la marcha del registrador, para lo cual se anotará la hora del cambio de faja y se hará una marca sobre la misma, procediéndose como se ha indicado en el párrafo (310).

En el segundo caso, después de colocadas en el papel milimétrico las alturas horarias, se traza la curva de manera que

pase por el mayor número de puntos, sin que tenga inflexiones bruscas; con esto se compensan errores de observación.

No siempre se puede precisar en el gráfico el instante de la plea o bajar exactamente, por lo que conviene hacer la construcción siguiente; se tiran las horizontales  $a a'$  y  $b b'$ ,

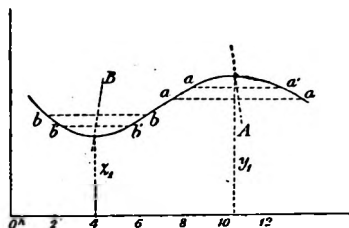


Fig. 297.

se unen sus puntos medios, la intersección de la recta A o B con las curvas, es el punto de la misma que corresponde a la plea o bajar; las abscisas indican la hora y la diferencia de las ordenadas  $y_1 - z_1$  es la amplitud de la curva.

## CAPITULO XXVII

### MAREAS

**313. Preliminares.** — Llamase mareas al movimiento periódico del nivel del mar producido por la atracción de los astros. Este movimiento se halla afectado por otras causas, algunas accidentales como los movimientos sísmicos y otras continuas como las que provienen de los elementos meteorológicos.

La característica esencial de la marea es su periodicidad; crece, *marea creciente* hasta llegar a un máximo, *pleamar* y luego se produce el descenso de las aguas, *marea decreciente* hasta llegar a un mínimo, *bajamar*. La diferencia de altura entre la pleamar y la bajamar es lo que se llama *amplitud* y el promedio de éstas, para un período más o menos largo, es la *amplitud media*.

La causa principal del fenómeno de las mareas es la atracción de la Luna y el Sol sobre las aguas. Cuando ambos astros están en conjunción u oposición se producen las *mareas de zizijia*, cuando la luna está en cuarto menguante o creciente, se producen las *mareas de cuadratura*. Como la luna hace su revolución alrededor de la tierra en 28 días próximamente, cada 14 días pasa de la conjunción a la oposición y es este el intervalo entre las mareas de zizijia.

La Luna en su entera revolución de 28 días corta dos veces el ecuador, su declinación es entonces nula y se producen las *mareas equinociales*.

Cada 13 días la luna está en su perigeo o apogeo; en el primer caso es cuando está más cerca de la tierra, el semidiámetro y paralaje horizontal tienen el mayor valor, las mareas que corresponden al perigeo son las de mayor amplitud; las correspondientes al apogeo, cuando está más lejos, son las de menor amplitud.

La onda de marea puede considerarse constituida por super-

posición de ondas de diferente período; de estos períodos los principales son de 12<sup>h</sup> y 24<sup>h</sup>.

Cuando el período principal es 12 horas (fig. 298) curva S, se producen dos bajamares y dos pleamares en el mismo día, la amplitud sufre muy poca variación, la marea semidiurna es preponderante.

Cuando el período principal es de 24 horas, (fig. 298) curva D, se produce una pleamar y una bajamar por día, la marea diurna es preponderante.

En el primer caso es suficiente el estudio de las pleas y bajamares y el uso de las constantes de la marea semidiurna para su predicción: Establecimiento de puerto. Unidad de altura Edad de la marea y coeficientes de mareas. En el segundo caso

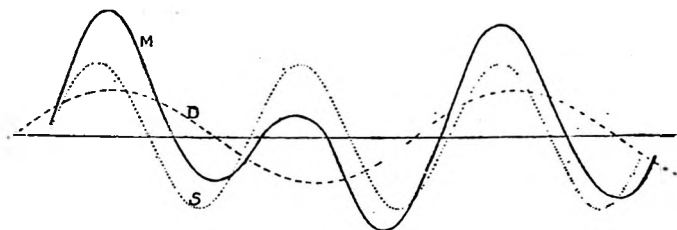


Fig. 298

hay que aplicar el método armónico para determinar las constantes útiles para la predicción.

En algunos puertos se observa que se produce una pleamar y una bajamar principal, (fig. 298) curva M y otras secundarias, lo que es debido a que ninguna de las dos ondas, semidiurna o diurna, es preponderante.

Llamando *intervalo luna marea*, el intervalo de tiempo transcurrido entre el paso de la luna por el meridiano y la hora de la pleamar; si observamos en la costa argentina el fenómeno de las mareas, podemos apreciar las siguientes propiedades, que son casi generales a las mareas que se producen en todos los mares.

1.º) Dos pleamares y dos bajamares ocurrirán cada 24 ó 25 horas.

2.º) Las pleas y bajamares consecutivos serán más o menos desiguales en altura;  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ , etc. (fig. 299).

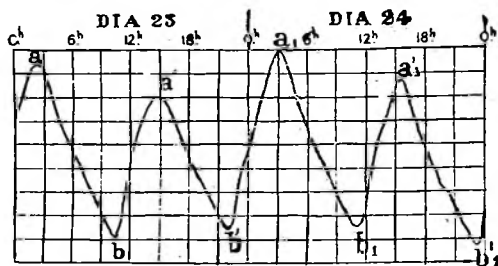


Fig. 299.

3.º) Las alturas de las pleas y bajamares correspondientes variarán en los diferentes días  $a$ ,  $a_1$ ;  $b$ ,  $b_1$ , etc.

4.º) Los intervalos luna-marea de las pleas y bajamares consecutivos serán diferentes.

5.º) Los intervalos luna-marea de las pleas o bajamares correspondientes, variarán en los diferentes días.

6.º) La desigualdad en altura o intervalo  $a$  que se refiere 2 y 4, aumentará cuando la luna aumenta su declinación, salvo en algunos parajes donde el efecto de la marea solar puede cambiarla.

7.º) La amplitud de la marea aumenta en las proximidades de la luna nueva o llena y disminuye en las cuadraturas.

8.º) La amplitud de la marea aumenta cuando la luna está en las proximidades del perigeo y disminuye cuando está próxima al apogeo.

9.º) Los intervalos luna marea son más cortos en proximidades del 1.º y 5.º octante de la luna y más largos en las proximidades del 3.º y 7.º octantes.

Las propiedades anteriores no son generales en aquellas partes donde en un día se observan solo una pleamar y una bajamar. En tales sitios la marea se caracteriza como sigue:

1.º) Cuando la luna está lejos del Ecuador no ocurren diariamente una pleamar y una bajamar.



2.º Cuando la luna está próxima al Ecuador, hay dos pleamares y dos bajamares diariamente, pero pequeñas comparadas con las que se producen en el caso 1.º.

3.º Estando la luna lejos del Ecuador, la amplitud de la marea aumenta en las proximidades de los solsticios y disminuye en las de los equinoccios.

314. *Altura teórica de la marea.* — Si el mar no estuviese sometido a otra fuerza que la gravedad, tomaría una superficie de equilibrio relativamente a la tierra; esta superficie inmóvil la designaremos  $S_0$  y se define *superficie media*, cada elemento de ella es normal a la gravedad, es decir, a la resultante de la atracción terrestre y de la fuerza centrífuga. Cada una de estas fuerzas derivan de un potencial; al potencial resultante de ambas lo llamamos  $W'$ .

Siendo la superficie de equilibrio una superficie de nivel relativamente a ese potencial; tendremos si  $P_0$  es un punto de ella fig. 300, referido al

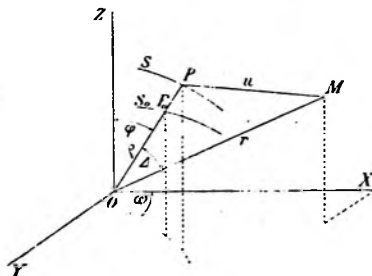


Fig. 300.

sistema  $O (XYZ)$ , cuyo origen  $O$  es el centro de la tierra,  $OZ$  el eje polar, el plano  $XY$  coincidiendo con el ecuador y el  $ZX$  con el meridiano de referencia;  $\zeta_0$ ,  $\omega$  y  $\varphi$  las coordenadas polares del punto  $P_0$ .

$$(a) W'(\zeta_0, \varphi, \omega) = C_0 = \text{const.}$$

Si se introduce una nueva fuerza en el sistema, la atracción de un astro  $M$  a la distancia  $r$  del centro de la tierra; la superficie del mar tiende a ponerse en equilibrio en cada instante bajo la acción conjunta de las fuerzas, cada elemento de ella será normal a la resultante de estas acciones y la superficie del mar afectará la forma de una superficie de nivel  $S$  con respecto a los potenciales de la gravedad y de los astros.

El radio vector  $OP_0$  prolongado, encuentra a la superficie  $S$  en  $P$  a una distancia  $OP = \rho$  del centro de la tierra, las coordenadas geográficas son comunes y la diferencia

$$h = \rho - \zeta_0$$

representa sensiblemente la altura positiva o negativa de la marea; esta altura es la que hay que determinar para cada instante  $t$  y para cada punto  $P$ , definido por su longitud y latitud, por lo tanto  $h$  es función de  $t$ ,  $\varphi$ , y  $\omega$ .

Designando por  $W'$  ( $\varphi$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$ ) el potencial de la gravedad para el punto  $P$ , supuesto el mar limitado a la superficie  $S$ ;  $v$  ( $\varphi$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$ ), el potencial de la capa de agua de espesor  $h$  y  $V'$  ( $r$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$ ) el potencial del astro; en el instante  $t$ , la ecuación de la superficie es:

$$b) \quad W'(\varphi, \varphi, \omega) + v(\varphi, \varphi, \omega) + V'(r, \varphi, \omega) = C_1$$

restando la (a)

$$c) \quad W'(\varphi, \varphi, \omega) - W'(\varphi_0, \varphi, \omega) + v(\varphi, \varphi, \omega) + V'(r, \varphi, \omega) = C$$

siendo  $\varphi - \varphi_0 = h$ , muy pequeño con relación al radio de la tierra podemos poner

$$W'(\varphi, \varphi, \omega) - W'(\varphi_0, \varphi, \omega) = \frac{dW'}{d\rho} h$$

como  $\frac{dW'}{d\rho}$  es la variación de potencial para un incremento de radio terrestre, representa la componente de la gravedad según el radio  $\rho$ , o sea  $-g$  llamando

$$V' + v = V$$

$$-gh + V = C$$

la (c) será

$$de\ donde \quad h = \frac{V - C}{g} \quad (d)$$

Esta ecuación da la altura en forma implícita porque  $V$  comprende a  $v$ , potencial de la capa de agua desconocido y a  $C$ , función desconocida del tiempo.

La expresión de  $C$  se determina teniendo en cuenta que la variación total del volumen de la capa de agua es nulo; considerando el cilindro elemento de volumen de la misma, cuya base es el elemento de superficie  $dS$  y cuya altura es  $h$ , se tendrá:

$$\int h dS = 0$$

reemplazando  $h$  por su valor de (d)

$$\int V dS - \int C dS = 0 \quad \int V dS = C S$$

$$(e) \quad C = \frac{1}{S} \int V dS = V_1$$

Donde  $S$  es la superficie total del mar sobre el globo terrestre, luego reemplazando (e) en (d)

$$h = \frac{V - V_1}{g} \quad (f)$$

Es muy difícil tener en cuenta el potencial de la capa acuosa que entra en  $V$ , fuera del caso en que el mar cubra todo el globo terrestre, lo más frecuente es no tenerlo en cuenta, introduciendo parametros que varían con el lugar y que se deducen teniendo en cuenta las observaciones de la variación del nivel del mar.

**315. Expresión del potencial de un astro.** - En mecánica se define como potencial de una fuerza en un punto del espacio sometido a su acción, al trabajo total que efectuarán la fuerza para desplazar la unidad de masa

desde ese punto a la región del espacio donde la fuerza no tenga más efecto, es decir, a la distancia infinita.

Siendo  $M$  la masa total del astro atrayente, situado  $M$  a la distancia  $u$  del punto atraído  $P$  donde se considera la unidad de masa, la fuerza de atracción es proporcional a  $\frac{M}{u^2}$ , el trabajo elemental es  $\frac{M}{u^2} du$  y el potencial.

$$\int_0^\infty \frac{M}{u^2} du = \frac{M}{u}.$$

Pero como referimos los puntos del mar a un sistema de ejes invariablemente ligados a la tierra, es necesario para poder considerar estos ejes como fijos, aplicar a cada punto  $P$  una fuerza igual y contraria a la atracción del astro sobre el origen de coordenadas o centro de la tierra, cuyo valor es proporcional a  $-\frac{M}{r^2}$ .

Las componentes de esta fuerza sobre los ejes son proporcionales a

$$X = -\frac{M}{r^2} \cos(\text{O M. X}), Y = -\frac{M}{r^2} \cos(\text{O M. Y}), Z = -\frac{M}{r^2} \cos(\text{O M. Z})$$

Los cosenos pueden ser reemplazados respectivamente por  $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ ; la expresión de las componentes es

$$X = -\frac{M a}{r^2}, Y = -\frac{M b}{r^2}, Z = -\frac{M c}{r^2}.$$

En mecánica también se define como potencial la función  $\varphi(x, y, z)$  cuyas derivadas parciales respecto a  $x, y, z$  son iguales a las componentes  $X, Y, Z$  de una fuerza total o sistema de fuerzas; luego, la función

$$-\frac{M}{r^2} (ax + by + cz)$$

cuyas derivadas parciales son los componentes  $X, Y, Z$ , será la función potencial de la fuerza de inercia.

El potencial total tiene por expresión la suma algebraica de los potenciales parciales que actúan en  $P$  y es

$$V = \frac{M}{u} - \frac{M}{r^2} (ax + by + cz)$$

$$V = M \left( \frac{1}{u} - \frac{ax + by + cz}{r^2} \right)$$

Los cosenos directores de  $OM$  y  $OP$  son, respectivamente:

$$\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r} \text{ y } \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho};$$

luego el coseno del ángulo  $POM = \Delta$  es

$$\cos \Delta = \frac{ax}{rp} + \frac{by}{p} + \frac{cz}{rp} = \frac{ax + by + cz}{r\rho}$$

reemplazando en la anterior

$$V = M \left( \frac{1}{u} - \rho \frac{\cos \Delta}{r^2} \right)$$

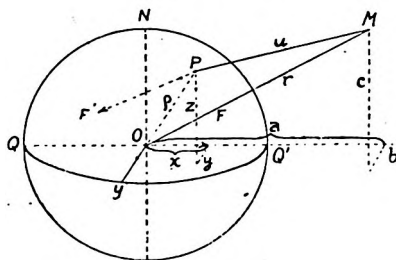


Fig. 301.

Por otra parte se tiene

$$u^2 = \rho^2 + r^2 - 2 r \rho \cos \Delta$$

de donde

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2 r \rho \cos \Delta}} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( \frac{2 \rho}{r} \cos \Delta - \frac{\rho^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

desarrollando hasta los términos de 2.º orden con la fórmula del binomio

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\rho}{r} \cos \Delta - \frac{\rho^2}{2 r^2} + \frac{3}{2} \frac{\rho^2 \cos^2 \Delta}{r^2} \right)$$

reemplazando en la expresión de V

$$V = M \left[ \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\rho}{r} \cos \Delta - \frac{\rho^2}{2 r^2} + \frac{3}{2} \frac{\rho^2 \cos^2 \Delta}{r^2} - \rho \cos \Delta \right) \right]$$

$$V = \frac{M}{r} + \frac{3}{2} \left[ \frac{M \rho^2}{r^3} \left( \cos^2 \Delta - \frac{1}{3} \right) \right]$$

por ser  $\frac{M}{r}$  independiente de X, Y, Z, desaparece en la diferenciación y

$$V = \frac{3}{2} \frac{M \rho^2}{r^3} \left( \cos^2 \Delta - \frac{1}{3} \right) \quad (g)$$

**376. Altura de la marea debida al potencial V de un astro cuando el mar cubre toda la tierra.** — La altura  $h$  de la marea en un punto de la superficie terrestre situado a la distancia  $\rho$

del centro de la tierra y en latitud  $\varphi$  debida al potencial  $V$  de un astro, supuesto que el mar cubre toda la tierra es

$$h = \frac{V}{g}$$

en lugar de la gravedad puede ponerse la atracción terrestre  $\frac{T}{\rho}$ , siendo  $T$  la masa de la tierra.

$$h = \frac{V \rho^2}{T}$$

La expresión del potencial de un astro sobre ese mismo punto es, llamando  $r$  su distancia al centro de la tierra y  $M$  su masa.

$$V = \frac{3}{4} \frac{M \rho^2}{r^3} \left[ \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2t + \frac{\sin 2\delta \sin 2\varphi \cos t + (1 - 3 \sin^2 \delta)(1 - \sin^2 \varphi)}{3} \right]$$

reemplazando este valor en el de  $h$

$$(1) \frac{h}{\rho} = \frac{3}{4} \frac{M \rho^3}{T r^3} \left[ \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2t + \frac{\sin 2\delta \sin 2\varphi \cos t + (1 - 3 \sin^2 \delta)(1 - 3 \sin^2 \varphi)}{3} \right]$$

317. Sea  $OM$  el eje polar: línea que une el centro de la tierra con el centro del astro. El elemento de superficie considerando el radio de la tierra igual a la unidad puede expresarse en función de: (fig. 302).

$$dP = d\psi \sin \Delta \text{ y } d\Delta$$

$$dS = \sin \Delta \cdot d\Delta \cdot d\psi$$

En el caso que el mar cubra toda la superficie de la tierra  $S = 4\pi$  y reemplazando en (e)

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi V \sin \Delta \, d\Delta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi V \sin \Delta \, d\Delta$$

reemplazando  $V$  por su valor (g)

$$\int_0^\pi V \sin \Delta \, d\Delta = \frac{3}{2} \frac{M \rho^3}{r^3} \left[ \int_0^\pi \cos^2 \Delta \sin \Delta \, d\Delta + \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \Delta \, d\Delta \right]$$

haciendo la integración resulta

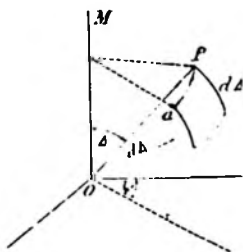


Fig. 302.

$$\int_0^\pi V \sin \Delta d\Delta = 0$$

y por lo tanto

$$V_1 = 0$$

luego en (f).

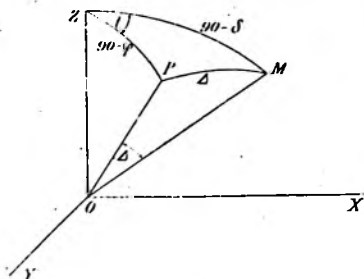
$$h = \frac{V}{g} = \frac{5}{2} \frac{M \rho^3}{r^3} \left( \cos^2 \Delta - \frac{1}{3} \right).$$

Poniendo en lugar de la gravedad  $g$  el valor de la atracción terrestre  $\frac{T}{\rho^2}$ , siendo  $T$  la masa de la tierra

$$\frac{h}{\rho} = \frac{5}{2} \frac{M}{T} \frac{\rho^3}{r^3} \left( \cos^2 \Delta - \frac{1}{3} \right) \quad (i).$$

Esta fórmula da la altura  $h$  de la marea tomando como unidad el radio terrestre  $\rho$ , suponiendo el mar cubriendo la tierra totalmente.

Reemplazando  $\cos \Delta$  por su valor en función de las coordenadas ecuatoriales y horarias del astro y las coordenadas geográficas del lugar, de la fig. 305 siendo  $OZ$  el eje que pasa por el polo,  $M$  la posición del astro y  $P$  el zenit del lugar, en el triángulo de posición  $ZPM$ .



[Fig. 305.]

$$ZM = 90 - \delta$$

$$ZP = 90 - \varphi$$

$$PM = \Delta$$

$$MZP = I$$

$$\cos \Delta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi$$

$$\cos \delta \cos I$$

reemplazando este valor en (i) y teniendo en cuenta que:

$$\cos^2 I = \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \cos 2I$$

se obtiene la (1).

**318. Discusión de la altura de la marca producida por el potencial de un astro.**—La fórmula (1) muestra que la altura varía en razón inversa al cubo de la distancia del astro. Es la ley de variación de paralaje.

1) El primer término

$$\cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2I$$

siendo para un mismo lugar,  $\varphi$  constante y para el mismo día la va-

riación de  $\delta$  muy pequeña; puede ser considerado como periódico y cuyo período es igual a la semi-revolución de la tierra alrededor de su eje, es la *onda semidiurna* o *marea semidiurna*. Tiene dos máximos o *pleamares*, para  $t = 0^h$  y  $t = 12^h$ , es decir, en los pasajes del astro por el meridiano superior e inferior y dos mínimos o *bajamares*, para  $t = 6^h$  y  $t = 18$ , en el instante del orto y ocaso de los astros.

El coeficiente de altura es

$$\cos^2 \varphi \cos^2 \delta.$$

En un mismo lugar la amplitud de las oscilaciones del mar son tanto más grandes cuanto la declinación del astro es más pequeña. Las mareas equinocciales son las más grandes y las más pequeñas coinciden con el instante en que la declinación del astro es igual a la inclinación de su órbita.

Para los diversos puntos de un mismo meridiano, las mareas más grandes se producen en el ecuador,  $\cos \varphi = 1$ , y en los polos se anula.

(2) El segundo término

$$\sin 2 \delta \sin 2 \varphi \cos t$$

da una onda cuyo período es un día, es la *marea diurna*. La pleamar tiene lugar para  $t = 0$ , cuando el astro está en el meridiano superior y la bajamar para  $t = 180^\circ$ ; en el pasaje inferior.

El coeficiente de altura es

$$\sin 2 \delta \sin 2 \varphi$$

En un mismo lugar la amplitud es mayor, cuanto mayor es la declinación, teniendo en cuenta que solo se considera el Sol y la Luna cuyas declinaciones no alcanzan a  $45^\circ$ . Este término es nulo en los polos y en el ecuador.

Comparando la onda diurna y semidiurna se deduce que las ondas se suman en el pasaje superior y se restan en el inferior. La diferencia de amplitud de dos pleamares consecutivas es el doble de la amplitud de la marea diurna.

La onda diurna es nula cuando el astro está en el ecuador, contrariamente a lo que sucede con la onda semi-diurna.

(3) El último término

$$(1 - 3 \sin^2 \delta) (1 - 3 \sin^2 \varphi)$$

no depende del movimiento de la tierra sino de la variación de la declinación del astro. Su periodo es la mitad de su revolución en su órbita. Es la *onda del largo periodo*, semimensual para la luna y semianual para el Sol.

**319. Altura de la marea en el Océano verdadero.** — Para deducir la fórmula (1) se supone que el mar cubre toda la superficie terrestre, teniendo en cuenta la realidad es imposible resolver en forma completamente teórica el problema de las mareas, para conseguirlo, fué necesario idear métodos aproximados que, basados en la teoría expuesta y ayudados por datos deducidos de la observación del fenómeno, pudieran resolverlo.

Por otra parte, cada uno de los términos del potencial del astro, son funciones del tiempo y dependen de la posición del astro en su órbita y por lo tanto no pueden considerarse constantes; sufren variaciones considerables debido a la desigualdad del movimiento, cambios en la declinación y distancia a la tierra.

Por estas razones se reemplaza la acción total de los astros por una serie de acciones componentes tales que, siendo constante la amplitud y periodo de cada una de ellas, den una resultante igual a la acción del astro. Es decir, que se reemplaza al astro por una serie de *astros ficticios*, tantos como sean necesarios, para que moviéndose estos en planos paralelos al ecuador y a distancia constante de la tierra cada uno de ellos, ya sea en sentido directo o retrógrado; la suma de los potenciales por ellos producidos sea igual al potencial total del astro que reemplazan.

El principio en que se funda esta substitución ha sido enunciado por Laplace al intentar establecer una relación directa entre las fuerzas astronómicas y el movimiento del mar.

«Si sometemos la superficie del mar a la acción de una fuerza de variación periódica, el movimiento del mar será periódico y de igual periodo que la fuerza; la amplitud de la oscilación será proporcional a la intensidad de la fuerza; la diferencia de faz entre el movimiento de oscilación y la variación periódica de la fuerza es constante».

La acción periódica de los astros al solicitar las moléculas



de agua constantemente a una nueva posición de equilibrio; hace que ellas tengan tendencia a pasarse de esa posición y que se produzcan oscilaciones análogas a las del péndulo, regidas por las leyes de la dinámica. Es bajo este aspecto que Laplace abordó el problema de las mareas y por esta razón es que su teoría es conocida con el nombre de *Teoría dinámica*, en la que se admite que las moléculas de agua son arrastradas por la componente horizontal de la atracción de los astros, en sentidos que difieren según la posición de las moléculas con respecto a la proyección del astro y determinando, para la superficie del mar, supuesto que cubre toda la tierra, la forma de un elipsoide cuyo pequeño eje está dirigido hacia el astro.

La teoría que supone que el mar toma la posición de equilibrio correspondiente a la magnitud y dirección momentánea de la gravedad, supuesta la masa de agua una esfera de capas concéntricas homogéneas, determinando la forma de equilibrio, que es la de un elipsoide cuyo gran eje está constantemente dirigido hacia el astro, es la hipótesis de Newton o *Teoría estática* de las mareas.

**320. Altura de la marea debida a la acción del Sol y la Luna.** — La fórmula (1) que expresa la altura de la marea debida a la acción de un astro para el caso en que el mar cubre la esfera terrestre se modifica como sigue considerando la realidad del fenómeno.

$$(2) \quad h_1 = \frac{3 M a^3}{2 r^3} \left[ \frac{(1 - 3 \sin^2 \delta)(1 - 3 \sin^2 \varphi)}{6} + P_1 \sin 2 \delta \sin 2 \varphi \cos(t - \mu) + P_2 \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2(t - \lambda) \right]$$

Siendo  $M$ , la marea del astro;  $r$  su distancia a la tierra;  $t$ , su ángulo horario;  $a$ , el radio medio terrestre;  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\mu$  y  $\lambda$  constantes que dependen del puerto. Además es necesario tomar los valores de los elementos astronómicos que entran en la fórmula,  $T$  horas antes para la marea semidiurna y  $T'$  para la diurna, con respecto al instante para el cual se busca la altura  $h$ .

Si la fórmula (2) representa el efecto de la Luna, tendremos para el efecto del Sol, una expresión análoga que, se corresponderá término a término con aquella. Los valores de las

constantes que dependen del puerto serán los mismos; llamando  $\delta'$  la declinación del Sol,  $r'$  su radio vector,  $t'$  su horario y  $M'$  su masa.

$$(5) \quad h_s = \frac{3 M' a^2}{2 r^3} \left[ \frac{(1 - 3 \sin^2 \delta') (1 - 3 \sin^2 \varphi)}{6} + \right. \\ \left. + P_1 \sin 2 \delta' \sin 2 \varphi \cos (t' - \mu) \right. \\ \left. + P_2 \cos^2 \delta' \cos^2 \varphi \cos 2 (t' - \lambda), \right]$$

La acción conjunta de los dos astros que los supondremos a sus distancias medias de la tierra  $\bar{r}$  y  $\bar{r}'$  es:

$$y = \frac{3}{2} a^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \left[ \frac{M}{\bar{r}^3} \frac{(1 - 3 \sin^2 \delta)}{6} + \frac{M'}{\bar{r}'^3} \frac{(1 - 3 \sin^2 \delta')}{6} \right] \\ + \left( \frac{3}{2} P_1 \frac{M}{\bar{r}^3} a^2 \sin 2 \varphi \right) \sin 2 \delta \cos (t - \mu) \\ + \left( \frac{3}{2} P_1 \frac{M}{\bar{r}^3} a^2 \sin 2 \varphi \right) \sin 2 \delta' \cos (t' - \mu) \\ + \left( \frac{3}{2} P_2 \frac{M}{\bar{r}^3} a^2 \cos^2 \varphi \right) \cos^2 \delta \cos 2 (t - \lambda) \\ + \left( \frac{3}{2} P_2 \frac{M}{\bar{r}^3} a^2 \cos^2 \varphi \right) \cos^2 \delta' \cos 2 (t' - \lambda)$$

Para cualquier posición del astro, llamando  $i = \frac{\bar{r}}{r}$  y  $i' = \frac{\bar{r}'}{r'}$ ;

la relación de los radios vectores medios a los vectores en el instante que se considera,  $B_0$  el término de largo período,  $B_1$ ,  $B'_1$ ;  $B_2$  y  $B'_2$  respectivamente a los coeficientes dentro del paréntesis.

$$y = B_0 \\ (4) \quad + B_1 i^3 \sin 2 \delta \cos (t - \mu) + B'_1 i'^3 \sin 2 \delta' \cos (t' - \mu) \\ + B_2 i^3 \cos^2 \delta \cos 2 (t - \lambda) + B'_2 i'^3 \cos^2 \delta' \cos 2 (t' - \lambda)$$

Esta es la expresión general de la altura de la marea debida a la acción conjunta del Sol y la Luna; cada uno de los términos considerados aisladamente representan una oscilación periódica del nivel del mar; el primer término es la onda de *largo período*; los segundos corresponden a los términos diurnos del potencial, son las *ondas lunar y solar diurnas* y los

terceros análogamente constituyen las *ondas lunar y solar semidiurnas*.

**321. Marea semidiurna. Constantes de Laplace.**—En algunos parajes, la onda principal es la marea semidiurna, las otras ondas tienen una influencia tan pequeña que no alteran prácticamente el fenómeno en manera apreciable. Es suficiente entonces considerar el término semidiurno.

$$\gamma = B_2 i^3 \cos^2 \delta \cos (t - \lambda) + B'_2 i'^3 \cos^2 \delta' \cos (t' - \lambda)$$

Llamando  $\alpha$  y  $\alpha'$  la ascensión recta de la Luna y el Sol

$$t' = t + (\alpha - \alpha') = t + \psi$$

y poniendo

$$B_2 i^3 \cos^2 \delta = B, \quad B'_2 i'^3 \cos^2 \delta' = B'$$

$$(4) \quad \gamma = B \cos 2(t - \lambda) + B' \cos 2(t + \psi - \lambda)$$

La solución de los problemas de mareas se reduce a hallar el horario  $t$  de la Luna que hace máximo el valor de  $\gamma$ , sea este  $t_m$ ; se halla el horario del Sol u hora verdadera que corresponde a esa posición de la Luna, sea  $t'_m$  su horario siendo  $\psi_m$  la diferencia de ascensión recta de los dos astros.

Reemplazando el valor de  $t_m$  en la expresión de  $\gamma$  se tendrá el máximo valor ó amplitud de la marea; para facilitar el cálculo se introducen algunas constantes que se definen.

**322. Horario de la Luna en el instante de la pleamar.**—La ecuación que dá el valor del ángulo horario de la Luna  $t_m$ , en el instante del máximo o mínimo de  $\gamma$ , que se produce  $T$  horas antes y para el cual deben ser tomados los elementos astronómicos es la siguiente:

$$(6) \quad \tan 2(t_m - \lambda) = \tan 2p_m = \frac{-\sin \psi_m}{50 \frac{B_m}{B'_m} + \cos^2 \psi_m}$$

El número de horas  $T$  se llama *edad de la marea semidiurna*.

Igualando a cero la derivada de la (5) con respecto a  $t$ .

$$0 = B \sin 2(t - \lambda) + B' \left(1 + \frac{d\psi}{dt}\right) \sin 2(t + \psi - \lambda)$$

$$0 = B \sin 2(t - \lambda) + B' \left(1 + \frac{d\psi}{dt}\right) [\sin 2(t - \lambda) \cos 2\psi + \sin 2\psi \cos 2(t - \lambda)]$$

de donde

$$\operatorname{tang} 2 p . = \operatorname{tang} 2 (t - \lambda) = \frac{-\operatorname{sen} 2 \psi}{\frac{B}{B'} \frac{1}{1 + \frac{d\psi}{dt}} + \cos 2 \psi}$$

La diferencia de ascensión recta de la Línea y el Sol varía cerca 50 minutos en 24 horas.

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{50}{24 \times 60} = \frac{1}{30} .$$

Reemplazando este valor y poniendo el subíndice  $m$  al valor particular de  $t$ ,  $B$ , y  $B'$  y  $\psi$  en el instante de la pleamar, se obtiene la (6).

**323. Hora verdadera de la pleamar.**—*Es el ángulo horario del Sol verdadero en el instante del máximo de la altura de la marea.*

Su expresión está dada por la siguiente fórmula:

$$(7) \quad t' = T + p_m + \lambda + \psi_m .$$

Es el horario  $t'$  del Sol que corresponde al horario  $t_m$  de la Luna calculado con la fórmula (6).

Llamando  $t_m$  el horario del Sol verdadero que corresponde al horario  $t_m$  de la Luna en el instante de la pleamar.

$$t' = t_m + \lambda .$$

Por otra parte sabemos que la marea que se obtiene es la que se produce  $T$  horas antes que la dada por la fórmula (6); luego llamando  $t'$  la buscada que se producirá  $T$  horas después de la dada por  $t' m$

$$t' = T + t'_m$$

siendo

$$p_m = t_m - \lambda$$

$$t' = T + t'_m = T + t_m + \psi_m = T + p_m + \lambda + \psi_m$$

**324. Establecimiento de puerto.**—*Es la hora verdadera de la pleamar que sigue al pasaje superior de la Luna por el meridiano del lugar, en día de zizigia, el Sol y la Luna estando en el ecuador a su distancia media de la tierra y pasando juntos por el meridiano:*

Llamando  $E$ , la hora verdadera de la pleamar que se produce en estas condiciones,  $p_z$  y  $\psi_z$  los valores que corresponden a  $p_m$  y  $\psi_m$  en las fórmulas (6) y (7).

$$E = T + p_z + \lambda + \psi_z \quad (8)$$

y

$$\operatorname{tang} 2 p_z = \frac{-\operatorname{sen} 2 \psi_z}{\frac{30}{31} \alpha + \cos 2 \psi_z}$$

Donde  $\alpha = \frac{M}{r^3} : \frac{M'}{r'^3}$ : este valor se llama *relación de las acciones medias de la Luna y el Sol*.

$\psi_z$  es la diferencia de ascensión recta de la Luna y el Sol, T horas antes de esta pleamar. Pasando ambos astros juntos por el meridiano, la diferencia de ascensión recta a 0 hora verdadera es nula,  $\psi = 0$ ; a la hora E,

$\psi = \frac{1}{30} E$  y T horas antes

$$\psi_z = \frac{1}{30} (E - T).$$

El valor de  $\alpha$  se deduce como sigue:

$$\alpha = \frac{B_m}{B'_m} = \frac{B_s i^3 \cos^3 \delta}{B'_s i'^3 \cos^3 \delta'} = \frac{B_s}{B'_s}$$

estando los astros a su distancia media,  $i = i' = 1$ ; estando sobre el ecuador  $\delta = \delta' = 0$ .

Reemplazando los valores de  $B_s$  y  $B'_s$

$$\alpha = \frac{\frac{3}{2} P_s \frac{M}{r} a^3 \cos^3 \varphi}{\frac{3}{2} P_s \frac{M}{r'} a^3 \cos^3 \varphi} = \frac{M}{r^3} : \frac{M'}{r'^3}$$

**325. Cálculo de la hora de la pleamar.**—Llamando  $t'$  la hora verdadera de la pleamar,  $t'p$  la hora verdadera del pasaje de la luna por el meridiano, que precede a la pleamar

$$t' = E + t'p + \frac{31}{30} (p_m - p_z) \quad (10)$$

E y  $-\frac{31}{30} p_z$  son constantes para el puerto, solo queda calcular el valor del término variable  $\frac{31}{30} p_m$ , para cuyo cálculo debe tenerse en cuenta la edad de la marea T para obtener los datos astronómicos.

El valor de  $p_m$  está dado por la fórmula

$$\text{tang } 2 p_m = \frac{-\text{sen } 2 \psi_m}{\frac{30 B_s i^3 \cos^3 \delta}{31 B'^2 i'^3 \cos^3 \delta'} + \cos 2 \psi_m} \quad (11)$$

$\psi_m$  es función de la hora del pasaje de la luna,  $i$  e  $i'$  son funciones de las paralages de los astros o de sus semidiámetros.

Considerando la marea en Brest donde  $T = 36^h$ ,  $E = 4^h$  se ha deducido la siguiente fórmula

$$H_m \text{ de plea} = H_m \text{ paso de Luna} + E + \psi_m - 17^m.$$

La corrección  $\psi_m - 17^m$  ha sido tabulada, depende de la declinación, paralaje y hora del pasaje de la Luna; puede utilizarse para cualquier puerto cuyas constantes no difieran mucho de las de Brest, para nuestras costas la tabla de corrección del Capitán Huette puede considerarse que prácticamente satisface.

La misma corrección  $K = \psi_m - 17$  puede obtenerse en función de la Hora verdadera del paso de la Luna y su semidiámetro.

Estas fórmulas pueden deducirse por las siguientes consideraciones:

Estando la luna en el meridiano, la hora verdadera del pasaje  $t' p$  es igual a su diferencia de ascensión recta con el Sol.

$$t' p = \alpha - \alpha' = \psi.$$

Siendo la variación horaria de la ascensión recta  $\frac{1}{30}$  de hora, para el instante  $t$  en que se produce la pleamar ha transcurrido un intervalo  $t' - t' p$ , el valor de la diferencia de ascensión recta es

$$t' p + (t' - t' p) \frac{1}{30}.$$

El valor de  $\psi_m$  que corresponde al instante de la pleamar, es el valor de  $\psi$  para  $T$  horas antes,

$$\psi_m = t' p + \frac{1}{30} (t' - t' p) - \frac{T}{30}$$

reemplazando este valor en la (7)

$$t' = \frac{51}{30} (\lambda + p_m) + t' p + T.$$

La marea que corresponde al *Establecimiento de puerto*, siendo  $t' p = 0$ , es

$$E = \frac{51}{30} (\lambda + p_m) + T$$

$$\text{luego } t' = E + t' p + \frac{51}{30} (p_m - p_x).$$

**326. Altura de la pleamar.**— Se obtiene reemplazando el horario  $t$  de la Luna para ese instante en la fórmula que da el valor de  $h$ . Poniendo el subíndice  $m$  al valor de los ele-

mentos de la fórmula que corresponden al instante del máximo, su expresión es la siguiente:

$$(12) \quad h_m = \sqrt{B_m^2 + B'_m{}^2 + 2 B_m B'_m \cos 2 \psi_m}$$

Las mayores pleamares tienen lugar para  $\psi_m = 0^\circ$  ó  $180^\circ$ , es decir en las zizigias, entonces  $h_m = B_m + B'_m$ ; las más pequeñas para  $\psi_m = 90^\circ$  o  $270^\circ$ , es decir en las cuadraturas,  $h_m = B_m - B'_m$ . Las primeras son las mareas de *zizigia* y segundas de *cuadratura*. Como el valor de  $\psi_m$  debe tomarse para T horas antes; se deduce que estas mareas se producen T horas después de la zizigia o cuadratura.

Para el instante de la pleamar la (5) será

$$h_m = B_m \cos 2(t - \lambda) + B'_m \cos 2(t + \psi_m - \lambda)$$

que puede ponerse en la forma siguiente:

$$h_m = (B_m + B'_m \cos 2 \psi_m) \cos 2(t - \lambda) - B'_m \sin 2 \psi_m \sin 2(t - \lambda).$$

Expresado  $\cos 2(t - \lambda)$  en función de la tangente, la que es conocida por la fórmula (6) y no teniendo en cuenta el factor  $\frac{50}{51}$ .

$$\cos 2(t - \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2(t - \lambda)}} = \frac{\frac{B_m}{B'_m} + \cos \psi_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{B_m}{B'_m}\right)^2 + 2 \left(\frac{B_m}{B'_m}\right) \cos 2 \psi_m}}$$

$$\text{y} \quad \sin 2(t - \lambda) = \frac{-\sin 2 \psi_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{B_m}{B'_m}\right)^2 + 2 \frac{B_m}{B'_m} \cos 2 \psi_m}}$$

reemplazando estos valores en la fórmula que da  $h_m$  se obtiene la (12)

**327. Unidad de altura. Coeficiente de marea.**—La fórmula que se usa para el cálculo de la altura de la pleamar es la siguiente:

$$(13) \quad h_m = U [A^2 + A'^2 + 2 A A' \cos 2 \psi_m]^{\frac{1}{2}} = U. C.$$

En la que

$$A = a r_m^3 \cos^2 \delta_m \quad (\text{para la Luna})$$

$$A' = a' r'_m{}^3 \cos^2 \delta'_m \quad (\text{para el Sol})$$

$$a = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad a' = \frac{1}{1 + \alpha}$$

$$\alpha = \frac{B_2}{B'_2}$$

Cuando  $\psi_m = 0$ , en las zizigias, estando el Sol y la Luna en conjunción u oposición; siendo  $i = i' = 1$ , estando los astros a sus distancias medias; y  $\delta = \delta' = 0$ , estando los astros en el ecuador, la fórmula (13) da

$$h_m = u.$$

Este valor particular de  $h_m$  se llama *unidad de altura*; se define de acuerdo con las hipótesis hechas para deducirlo como: *la altura sobre el nivel medio de la pleamar que se produce T horas después de la zizigia, el Sol y la Luna estando a la vez en el ecuador y a su distancia media a la tierra.*

C se llama el *coeficiente de marea*; es el valor por el que hay que multiplicar la unidad de altura para obtener la altura de la pleamar, se llama también *céntimos de marea* porque se expresa adoptando el valor 100 en lugar de 1 en el caso de que la altura sea igual a U.

El valor de U y C dependen del puerto. En *L'annuaire des marées de les cotes de France*, está dado C para todos los días del año y para 36 hs. antes que las pleamares de Brest, frente a las cuales están escritas; ellos están calculados para un valor de  $\alpha = 2.89$ . Prácticamente pueden usarse para nuestras costas teniendo en cuenta que el resultado será solo aproximado.

La fórmula (12) puede escribirse

$$h_m = [B' + B''] \left\{ \frac{B_m^2}{(B' + B'')^2} + \frac{B''^2}{(B' + B'')^2} + 2 \frac{B_m}{(B' + B'')} \frac{B''}{(B' + B'')} \cos^2 \psi_m \right\} \frac{1}{2}$$

reemplazando  $B_m = B' i^2 \cos^2 \delta_m$  y  $B'' = B' i'^2 \cos^2 \delta'_m$ , siendo  $\frac{B''}{B'} = \alpha$ .

$$h_m = B' (1 + \alpha) \left\{ \frac{1}{(1 + \alpha)^2} (i^2 \cos^2 \delta_m)^2 + \frac{1}{(1 + \alpha)^2} (i'^2 \cos^2 \delta'_m)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \frac{1}{(1 + \alpha)} i^2 i'^2 \cos^2 \delta_m \cos^2 \delta'_m \cos^2 \psi_m \right\} \frac{1}{2}$$

reemplazando los valores de  $A' A'$ ,  $a$  y  $a'$  definidos tendremos la fórmula (15).

**328. Análisis armónico.** — Siendo la expresión del potencial una función periódica del tiempo; se puede desarrollarlo en serie, según la suma de los términos de la forma  $C \cos q t$ ; C es un coeficiente astronómico que depende de la posición



del astro en su órbita,  $q$  es una constante que multiplicada por el tiempo  $t$  nos dá esa posición. El potencial total será

$$V = C_1 \cos q_1 t + C_2 \cos q_2 t + \dots$$

A cada término corresponde un astro ficticio y por lo tanto según el principio de Laplace una onda de marea; la altura del nivel del mar en un instante  $t$  será la suma de cada una de estas ondas; siendo  $P$  y  $K$  las constantes particulares del puerto, la altura de la marea sobre el nivel medio es

$$h = P_1 C_1 \cos (q_1 t + K_1) + P_2 C_2 \cos (q_2 t + K_2) + \dots$$

Si desarrollamos el potencial según la fórmula anterior, debido a que en ella entra en cada término: el horario  $t$  que no varía proporcionalmente al tiempo,  $r$  y  $\delta$  que no varían según una ley simple; antes de hacer el desarrollo, se expresan esos elementos astronómicos en función de otros que varían tan lentamente que pueden considerarse constantes durante un año, como son la inclinación de la órbita, longitud de los nodos.

Desarrollado el potencial en función de las nuevas coordenadas celestes, se encuentran:

1.º Términos semidiurnos, en los que  $q$  tiene un valor próximo a  $30^\circ$  por hora, período de 12 horas.

2.º Términos diurnos, en los que  $q$  tiene un valor próximo a  $15^\circ$ , período de 24 horas.

3.º Términos de largo período, en los que  $q$  es muy pequeño, períodos mensuales y anuales.

El número de términos del potencial y por lo tanto de ondas, es de 30, de las cuales las más importantes son.

$M_2$ . Onda *semidiurna principal lunar*, puede considerarse engendrada por un astro ideal que recorre una circunferencia en el plano del ecuador con movimiento uniforme en  $24^h 84$ , produciendo una pleamar en el pasaje superior e inferior que difieren en  $12^h 42$ . De esta onda dependen otras de menor importancia cuyo período es un múltiplo o submúltiplo.

La semiamplitud de esta onda se designa  $H_{m2}$ , y su situación  $K_{m2}$ .

$S_2$  — Onda *semi-diurna principal solar*. Se encuentra respecto al Sol en las mismas condiciones que la marea lunar principal

respecto a la Luna. Los máximos de esta onda se observan exactamente cada 12 horas; su semi-amplitud se designa  $H_{s2}$  y su faz  $K_{s2}$ .

$K^2$  — Onda *semi-diurna luni-solar*. Es la resultante de la acción de dos ondas, una lunar y otra solar cuyo período es idéntico e igual a  $24^h 064$ . Las pleamares se producen en el pasaje superior e inferior del astro resultante que engendra la onda cada  $12^h 032$ .

La semi-amplitud se designa  $H''$  y su faz  $K''$ .

O — Onda *diurna lunar*. Es la onda que dá lugar a una sola pleamar, debida a la acción de la Luna, cuyo período es  $22^h 31$ , designase su semi-amplitud por  $H_0$  y su faz  $K_0$ .

P — Onda *diurna solar*. Es la onda que dá lugar a una sola pleamar, debida a la acción del Sol, cuyo período es  $23^h 532$  designase su semi-amplitud por  $H_p$  y su faz  $K_p$ .

$K_1$  — Onda *diurna luni solar*. En el desarrollo del potencial de los términos correspondientes a la Luna y el Sol, se encuentra una onda para cada astro que tienen el mismo período, con el método armónico solo pueden separarse las ondas de distinto período, se les reemplaza con una onda combinada por las dos, la que tiene la misma periodicidad, designase la semi-amplitud por  $H'$  y su faz por  $K'$ .

La altura de la marea en función de las ondas está dada por la fórmula

$$h = A_0 + f_{s2} H_{s2} \cos(x - K_{s2}) + f_{s2} S_2 \cos(x - K_{s2}) + \dots$$

El valor del coeficiente  $f$ , que es función del tiempo, se considera constante durante un año y está tabulado, los valores de  $x$  están también tabulados; con tablas que dan el producto  $f H \cos(x - K)$  se calcula la ordenada de cada onda para un instante y la suma dá la altura total de la marea.

**329. Relación entre las constantes armónicas y de Laplace.** — Las constantes de Laplace han sido definidas teniendo en cuenta solo la onda semi-diurna, consideraremos solo los términos semidiurnos de la fórmula armónica,  $M_2$ ,  $S_2$  y  $K_2$ ; onda lunar, solar y luni solar semidiurna respectivamente.

*Unidad de altura.* — Se ha definido como la semi-amplitud de la marea semidiurna producida por el Sol y la Luna es-

tando en el ecuador, pasando juntos por el meridiano y a sus distancias medias de la tierra; en estas condiciones la acción de los astros es concordante y la unidad de altura será la suma de la semi-amplitud de cada onda, en esto se supone que el coeficiente astronómico  $f$  tiene su valor medio igual a la unidad.

$$U = H_{m2} + H_{s2} + H''.$$

*Relación entre la acción del Sol y la Luna.* — El coeficiente  $\frac{B_2}{B'_2} = \alpha$ , es evidentemente la relación entre las semi-amplitudes medias de las ondas semi-diurnas, lunar  $M_2$  y solar  $S_2$ .

$$\alpha = \frac{H_{m2}}{H_{s2}}.$$

*Constante  $\lambda$ .* — Es el horario del Sol en el instante de su máximo efecto

$$\lambda = \frac{K_{s2}}{2}.$$

*Edad de la marea.* — Es el tiempo que transcurre entre el instante en que la Luna y el Sol están en conjunción u oposición y el instante de la concordancia de las marcas semi-diurnas lunar y solar, su expresión es:

$$(\text{horas}) T = \frac{K_{s2} - K_{m2}}{1.016}.$$

*Establecimiento de puerto.* — Se calcula con las fórmulas (8) y (9), en la que se reemplazan los valores de  $\lambda$ ,  $\alpha$  y  $T$  deducidos con las constantes armónicas.

Para calcular  $\phi_x = \frac{1}{50}(T - E)$  se hace un primer cálculo del mismo con un valor aproximado de  $E$ .

*Establecimiento corregido.* — Adoptado por la hidrografía inglesa tiene por valor

$$\frac{K_{m2}}{20}$$

*Coefficientes de marea.* — Se reemplaza en las fórmulas (15)

$$\alpha \text{ por su valor } \frac{H_{m2}}{H_{s2}}.$$

Para las zizigias  $\psi_m = 0^\circ$  ó  $180^\circ$

$$C = A + A'.$$

Para las cuadraturas  $\psi_m = 90^\circ$  ó  $270^\circ$

$$C = A - A'.$$

Para cada caso hay que calcular los valores de  $i^8 \cos^2 \delta$  y  $i^8 \cos^2 \delta'$  que entran en la expresión de A y A'.

### 330. Determinación de los elementos de la marea. —

Al iniciar los estudios de mareas de un puerto es necesario establecer si la onda preponderante es la diurna o la semi-diurna. Para esto se construye con las lecturas de la escala de mareas, tomando como abscisa el tiempo y como ordenadas las alturas la curva del fenómeno y según que esta se asimile a una u otra de las clasificadas en la fig. 298 será la naturaleza de la marea.

La amplitud de las ondas pueden calcularse como sigue:

Sean  $y_1, y_2, y_3$ , (fig. 304) las alturas de tres pleamares con-

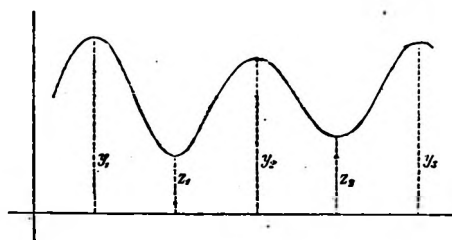


Fig. 304.

secutivas sobre el cero de la escala;  $z_1$  y  $z_2$  las de las bajamares intermedias.

La *amplitud de la onda diurna* está dada por la relación

$$2 h_1 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

siendo  $h_1$  la semi-amplitud.

La *amplitud de la onda semi-diurna*, siendo  $h_2$  la semi-amplitud es

$$2 h_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Como *amplitud total* de la marea cuando se trata de construcción de curvas consideraremos el valor

$$2h = \frac{p_1 + p_2}{2} - z_1$$

El *nivel medio* N, en el caso que sólo hubiere la onda semi-diurna estaría dada por el promedio de las lecturas correspondientes a una pleam y bajamar consecutivas.

$$N = \frac{p_1 + z_1}{2}$$

Si la onda diurna es apreciable

$$N = \frac{p_1 + z_1 + p_2 + z_2}{4}$$

Más aproximada es la siguiente fórmula

$$N = \frac{p_1 + 2z_1 + 2p_2 + 2z_2 + p_3}{8}$$

Cuando se tienen observaciones horarias durante un largo periodo, se hace el promedio de todas las lecturas horarias.

*Edad de la marea.* — Admitiendo que la amplitud total corresponde al instante de la bajamar intermedia que sirve para determinarla, se construye la curva de las amplitudes totales tomando como ordenadas a las mismas y como abscisas a los tiempos. El intervalo de tiempo entre la máxima amplitud total y el instante de la zizigia, oposición o conjunción de los astros es el valor de la Edad de la marca. Se repite esta operación para todas las zizigias que se pueden observar y se halla el valor promedio.

*Establecimiento de puerto.* — Se ha establecido la formula

$$H_m^p = H_m (\text{paso de la Luna}) + E \psi_m - 17''$$

para puertos cuyas marcas tengan las características de Brest, lo que se puede aceptar sin mucho error para todos los puertos en que la marca semidiurna es preponderante.

De las observaciones se deduce el valor de la  $H_m$  local de la pleamar  $H_m^p$ , con las efemérides se deduce la  $H_m$  del paso de la Luna  $H_m^p$ , y con esta la  $H_m^p$ . Con el semi-diámetro o paralaje de la Luna, según las tablas que se emplean para hallar

el término correctivo  $K = \psi_m - 10^m$ , y la  $H_p^0$  se tienen los elementos para calcular el Establecimiento de puerto.

$$E = H_m^p - H_p^m - K$$

Se toma el promedio de los valores que se pueden obtener

*Unidad de altura.*— Adoptando para el puerto, los valores del coeficiente de mareas dado por el *Annuaire des marées des côtes de France* o por la *Connaissance des Temps*; después de determinado el nivel medio  $N$ , si se observa una pleamar  $h_m$ :

$$h_m - N$$

es el valor de la semi-amplitud, que también puede expresarse

$$h_m - N = UC$$

luego

$$U = \frac{h_m - N}{C}$$

El valor de  $C$  se toma para el día de la fecha de la observación.

En vez de la altura de la pleamar sobre el nivel medio puede emplearse la semi-amplitud de la onda semi-diurna para esa marea.

*Observación.*—Aun en el caso que la onda semidiurna es preponderante, conviene emplear el método armónico para su estudio, con 15 o 30 días de observaciones, puede hacerse un análisis de corto período, luego con las constantes armónicas deducir las de Laplace correspondientes a la marea semi-diurna.

**331. Propagación de la marea.**—Según Whewel, la onda de marea se genera en el Océano Antártico y después se propaga en el Atlántico, Pacífico e Indico; otros piensan que una onda puede perfectamente formarse en el centro de cada océano y propagarse hasta alcanzar las costas de los continentes que lo limitan. Sea cualquiera la teoría admitida, la onda de marea se propaga con una velocidad que depende de la altura  $a$  de ella misma y de la profundidad  $p$  del mar; siendo  $v$  su velocidad de-propagación en m/s y  $g$  la gravedad,

$$v = \sqrt{gp \left( 1 + \frac{a}{p} \right)}$$

cuando  $\frac{a}{p}$  es muy pequeño, puede ponerse  $v = \sqrt{gp}$  o expresarse en millas por horas  $v = 1.944 \sqrt{gp}$ .

Esta fórmula nos dice que la velocidad de propagación de la onda aumenta con la profundidad y nos muestra porqué una onda que corre paralelamente a una playa, modifica su dirección hasta hacerse perpendicular a ella.

La misma fórmula permite calcular aproximadamente la profundidad media del oceano entre los puntos; la onda del Atlántico propagándose S a N, tarda 12.5 horas en ir desde la Isla Santa Helena a Finisterre, lo que implica una profundidad media de 7 a 8000 ms., esa fué la profundidad encontrada más tarde al tender el cable telegráfico. También se le utiliza para construir las líneas de igual hora de pleamar y bajamar, calculando sobre la dirección de propagación de la onda y a partir desde un punto donde se ha observado, que distancia recorrerá en un tiempo dado o que tiempo tardará en recorrer una distancia dada.

Todo obstáculo produce alteraciones en la propagación debidas a la disminución de la profundidad; además, si la onda entra en un canal estrecho su velocidad de propagación y su altura aumenta.

El lugar geométrico de los puntos donde la pleamar tiene lugar a la misma hora se llaman *líneas cotidales*; las que trazadas sobre la carta del globo presentan grandes inflexiones debidas a los continentes del hemisferio austral.

Considerando el Atlántico Sud, la onda entrando en él de Sur a Norte, el vértice de las cotidales está dirigido hacia el Norte en su centro y la velocidad de propagación y altura de la onda aumenta al pasar ella por el estrechamiento del Océano entre la costa del Brasil y del Senegal. Particularmente para la República Argentina, debido a la gran extensión de la meseta continental, la onda de marea que en el Atlántico Sur se propaga de Sur a Norte, se propaga cerca de su costa en dirección normal a ella.

La influencia del viento trae anomalías de la mayor importancia, pudiendo en ciertos casos cambiar completamente el sentido de la propagación de la marea.

En los ríos las mareas se propagan sufriendo alteraciones de las cuales las principales son: el nivel de la pleamar se mantiene próximamente en un plano horizontal y las bajamares van en pendiente hacia el nacimiento del río, esto hace que la amplitud de la marea llegue a ser nula, circunstancia que limita la parte marítima del río. Además el nivel medio pierde su constancia y las alteraciones por la acción del viento son mayores.



## REDUCCION DE SONDAJES

**332. Consideraciones generales.**—Los sondeos de una carta hidrográfica están reducidos a un nivel de referencia  $RR'$  (figura 305) y las sondas marcadas en ellas son las alturas  $ED$ ,  $DB$  y  $GF$  de ese plano sobre el fondo del mar.

Al plano de referencia corresponde una graduación  $R$  de una escala de marcas; si en cierto instante el nivel del mar está en  $LL'$  a la graduación  $L$  de la escala y hacemos la sonda  $AB$ , el sondeo reducido es

$$CB = AB - AC = \\ = AB - (L - R)$$

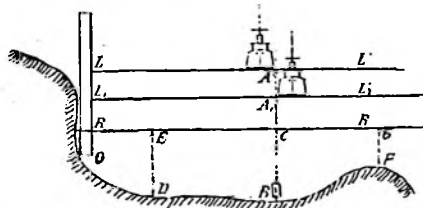


Fig. 305.

En otro estado de la marea, siendo el nivel del agua  $L_1 L'_1$  y  $L_1$  la graduación de la escala, sondando en el mismo sitio  $B$  la profundidad será

$$CB = A_1 B - A_1 C = A_1 B - (L_1 - R)$$

Si las profundidades obtenidas para  $B$ , cuando el nivel está en  $LL'$  y  $L_1 L'_1$ , no son iguales; habrá que repetir el trabajo.

La causa de la diferencia puede ser: 1), haber sondado mal en una de las operaciones haciendo una medida  $AB$  o  $A_1 B$  errónea: 2), o haber hecho mal la reducción  $(L - R)$  o  $(L_1 - R)$ .

Si sondando en las mismas condiciones de marea, pleamar, bajamar, media marea, creciendo, etc., se obtiene acuerdo entre las sondas y luego sondando en condiciones diferentes, una vez en creciente y otra en bajante, aparecen discordancias, el criterio que se ha aplicado para la reducción es el erróneo.

**333. Nivel de reducción de sondas.** El plano de referencia  $R$  al que están relacionados todos los sondeos, se llama *nivel de reducción de sondas*.

En la hidrografía francesa, para elegir este nivel, se ha te-

nido el criterio de que el navegante debe siempre encontrar en cualquier lugar que sonde, por lo menos, tanta agua como la indicada en la carta; las sondas deben ser reducidas al nivel de las mayores bajamares que se puedan producir.

En la hidrografía inglesa se ha elegido como nivel de reducción de sondas el nivel de las bajamares de zizigias medias, es un nivel rara vez descendido por las aguas y no tiene el inconveniente de disminuir tanto las profundidades como lo hace la hidrografía francesa.

La hidrografía de los Estados Unidos de Norte América, ha elegido un plano por arriba del inglés, el promedio general de todas las bajamares; el plano de la hidrografía alemana está entre el inglés y francés.

Los planos de reducción usados por la Marina Argentina en los diversos levantamientos hechos, no responden a un criterio único. En el Río de la Plata y Río de Deseado, el plano elegido es el de las mayores bajamares, prácticamente el plano francés; en la carta de Puerto Militar, el plano de reducción es prácticamente el inglés.

La Conferencia Hidrográfica Internacional de Londres de 1919 ha establecido la regla siguiente para determinar el plano de reducción: tómese la semi amplitud del promedio de las mayores bajamares y pleamares y multiplíquese por 1.5, el resultado se resta de la graduación correspondiente al nivel medio. El Servicio Hidrográfico ha adoptado este plano de reducción.

La figura 306 muestra los distintos planos que se eligen para la reducción de sondajes.

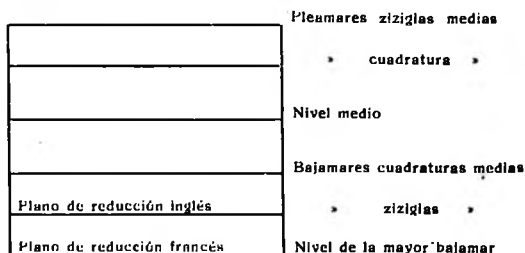


Fig. 306

**334. Determinación del plano de reducción.**—En lo que sigue supondremos que se ha determinado la graduación  $N$  de la escala de mareas que corresponde al nivel medio.

1) *Caso en que no se conocen las constantes de la marea.*—Se observará la costa para encontrar las indicaciones sobre la altura a que llegan las más altas mareas; línea de resaca, color de las piedras, etc. Mediante una nivelación se halla la diferencia de nivel  $P$  de las mayores pleamares con el cero de la escala.

La semi-amplitud de las máximas mareas será  $P - N$  y el nivel de las mayores bajamares corresponderá la graduación  $N - (P - N)$  de la escala.

2) *Caso en que la marea semidiurna es preponderante.*—Habiéndose determinado la unidad de altura  $U$ , el producto por el coeficiente de marea  $C$  correspondiente a la marea del plano que se quiere determinar, dará la distancia  $UC$  por debajo del plano del nivel medio; la lectura de la escala que corresponde al plano de reducción será

$$y = N - UC$$

Si al coeficiente  $C$  corresponde su valor máximo 1.20, para los puertos cuyas mareas sean comparables con la de Brest, la lectura  $y$  corresponderá al plano de los mayores bajamares, criterio francés; si corresponde a las zizigias medias 0.95, el plano de reducción será el del criterio inglés.

3) *Caso en que la marea diurna tiene un valor comparable al de la semidiurna.*—No podrán usarse las constantes de Laplace, deberán determinarse las armónicas. Para el servicio hidrográfico en las Indias, la hidrografía inglesa ha adoptado la siguiente fórmula que responde al nivel de las bajamares en zizigias medias; se resta de la altura del nivel medio la suma de las semi-amplitudes de las ondas semidiurnas y diurnas principales.

$$y = N - (M_2 + S_2 + H' + H_0)$$

4) *Caso en que se está próximo a un puerto cuyo régimen de las mareas es conocido.*—Si se puede suponer que un puerto  $B$  tiene el mismo régimen de mareas que otro  $A$ , el

que conocemos; observamos simultáneamente las amplitudes que adquiere una misma marea, preferentemente las zizijias; sean  $(b_1, a_1)$ ,  $(b_2, a_2)$  etc., respectivamente, hallamos el promedio  $K$  de las relaciones  $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots$  etc.

Llamando  $N_A$  la graduación de la escala que corresponde al nivel medio en  $A$  y  $a$  la amplitud de la marea que ha determinado el nivel de reducción;  $N_A - \frac{a}{2}$  indica la graduación que corresponde a ese plano. Para el puerto  $B$ , siendo  $N_B$  la graduación que corresponde al nivel medio, el plano de reducción queda fijado por  $N_B - \frac{K a}{2}$ .

Para determinar  $N_B$ , hallamos en  $A$  y  $B$  el promedio de una pleamar y bajamar sucesivas, sean  $N'_A$  y  $N'_B$ ; en realidad, en  $A$  debiera ser  $N_A$ , luego hay una diferencia  $N'_A - N_A$  que en  $B$  será  $K(N'_A - N_A)$  y en este último puerto la graduación de la escala que corresponde al nivel medio es  $N_B = N'_B + (N'_A - N_A) K$ .

**335. Construcción de curvas de reducción.**— 1) *Caso de una sola escala.*— Si  $R$  es la graduación que corresponde al plano de reducción:  $L_0, L_1, L_2, \dots$  las lecturas horarias de la regla, con las diferencias  $L_0 - R, L_1 - R, L_2 - R, \dots$  como ordenadas y los tiempos como abscisas construimos la curva de reducción.

Esta construcción tiene la ventaja de permitir eliminar los errores accidentales y leer sobre la curva las alturas que corresponden a las horas en que las sondas no coinciden con las de la observación, se evita así tener que interpolar, lo que sería necesario si se emplease directamente las alturas observadas.

En la construcción de la curva no hay que darle una forma muy regular, por qué puede producirse en las mareas particularidades que modifican la curva.

2) *Reducción de las sondas entre dos escalas.*— Cuando la bahía o la costa que se estudia tiene una extensión considerable, y tal que la marea ponga un tiempo apreciable para

propagarse de un extremo al otro, el nivel del agua no es el mismo en toda ella en un mismo instante; una sola escala no basta entonces para reducir todas las sondas.

En este caso hay que observar las mareas en varias escalas, colocadas en cuanto sea posible, a distancias en que el nivel del mar en cada punto de la costa, pueda considerarse el mismo con diferencia de algunos centímetros, que el nivel observado en el mismo instante en la escala más cercana. El número y la distancia de las escalas que convendrá observar depende pues, de las diferencias que se noten en el desarrollo de la marea. En una bahía cerrada será casi siempre necesario poner por lo menos dos escalas, una en la entrada, la otra al fondo de la bahía; en un río será indispensable colocar escalas a distancias menores que en la costa abierta, porque las variaciones que rigen la marea en él, son siempre mayores.

Los ceros de ambas escalas pueden referirse mediante una nivelación geométrica; sea  $d N$  ( $A - B$ ) la diferencia de nivel entre ellos, si  $N_A$  es la graduación que corresponde al nivel medio en la escala A, la graduación  $N_B$  de la escala B que corresponde al mismo nivel será

$$N_B = N_A + d N (A - B).$$

Habiéndose determinado la relación de las amplitudes K (354) se tendrá la graduación correspondiente al plano de reducción en B.

Para reducir las sondas en la zona comprendida entre las dos escalas no es exacto tomar el promedio entre las reducciones simultáneas que corresponde a las dos escalas, ni repartir la diferencia de estas alturas proporcionalmente a la distancia de cada escala al lugar donde se ha sondado. Además, hay que tener en cuenta la dirección de la propagación de la marea, si esta coincide con la dirección de la línea que une las escalas, podrá suponerse que las pleamares, por ejemplo, recorren la mitad de la distancia entre ellas en la mitad del tiempo que tardan en recorrer esa misma distancia.

Dos casos pueden presentarse en la reducción a) que el coeficiente  $K = 1$ ) las amplitudes son iguales en ambas esca-

las y solo difiere la hora de la pleamar, *b*) que las amplitudes también sean diferentes.

a) Sean los valores obtenidos para la reducción de dos escalas A y B los siguientes:

	A	B
2h m	1m 42	1m 12
2h 30m	1 50	1 29
3h	1 43	1 43
3h 50m	1 32	1 50
4h	1 15	1 44

Construimos las curvas de reducción; (fig. 307) la pleamar en A se ha producido a 2h 30m y en B a 3h 30m. Si la ple-

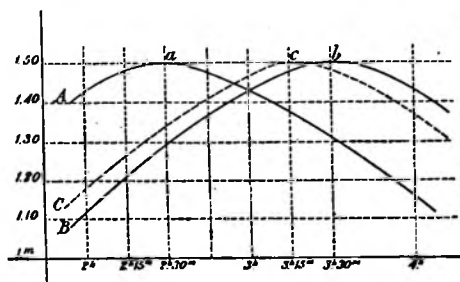


Fig. 307

mar se ha propagado con una velocidad uniforme entre A y B, en un punto C, situado a  $\frac{1}{4}$  de la distancia entre A y B, más cerca de B, la pleamar llegará a 3h 15m y habrá alcanzado la misma altura, el valor de la reducción será 1m 50. Puede verse aquí lo erroneo que sería considerar para C una reducción proporcional a la diferencia de las lecturas en A y B, la que con este criterio es  $148 - \frac{148 - 138}{4} = 145.5$

El procedimiento que debe seguirse se evidencia, se divide *a b* proporcionalmente a las distancias entre la estación para la que se quiere interpolar y las que se tienen las escalas

instaladas; después se dibujará una curva C igual a las obtenidas para A y B cuyo máximo esté en  $c$ .

b). Si las amplitudes son distintas y las curvas de reducción son A y B fig. 308 se procederá como sigue.

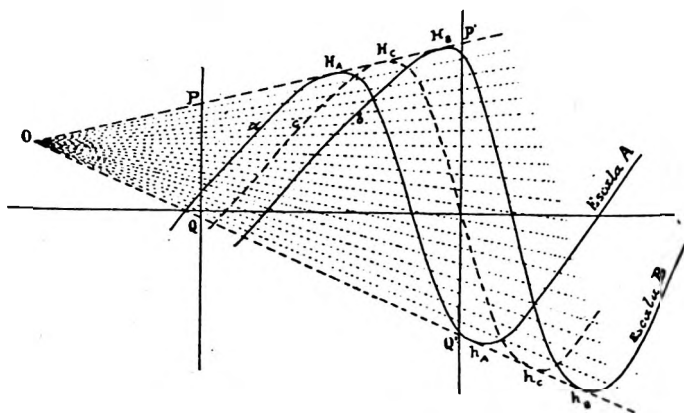


Fig. 308.

Se unirán los puntos  $H_A$  y  $H_B$ , y  $h_A$  y  $h_B$  (fig. 308); que corresponden a las dos pleamares y a las dos bajamares, por dos rectas cuya intersección O puede ser considerada como el polo común de las dos curvas. Por este punto O, trazaremos una serie de rectas  $O a b$  que determinarán los puntos homólogos  $a, b$ .

Si se quiere trazar una curva intermedia para las localidades situadas entre las escalas A y B, se dividirán las longitudes tales como  $a b$ , proporcionalmente a las distancias respectivas de estos puntos a las escalas A y B, y se harán pasar curvas por los puntos correspondientes  $c$  así obtenidos.

Como el punto O caerá, por lo general, fuera de la hoja del papel de construcción, bastará cortar las dos líneas  $H_A H_B$ ,  $h_A h_B$ , por dos ordenadas  $PQ$ ,  $P'Q'$ , que se dividirán en un mismo número de partes iguales, y unir los puntos correspondientes para obtener las líneas  $a b$  que se dividirán proporcionalmente a las distancias dadas.

## CORRIENTES MARINAS

X **336. Generalidades.**—El conocimiento de la fuerza y dirección de las corrientes en el mar, entradas a puertos, ríos, etc. es de gran utilidad para la navegación.

En general las corrientes pueden dividirse en *oceánicas* y de *mareas*; las primeras son casi constantes en dirección y fuerza o varían en períodos largos, su estudio pertenece a la Oceanografía; las segundas son fenómenos locales y a menudo muy diferentes aún entre dos puntos muy cercanos y se caracterizan porque varían en fuerza y dirección según el estado de la marea, su estudio pertenece a la Hidrografía.

Las corrientes varían también con la profundidad y para las necesidades de la navegación convendrá medirlas a 3 o 4 metros de profundidad en vez de medirlas en la superficie, suponiendo que ella representa el efecto medio sobre buques de calado.

X **337. Métodos e instrumentos para la observación.**— Las corrientes pueden observarse de dos maneras:

1.º Abandonando libremente un flotador en el mar y determinando frecuentemente su situación mediante observaciones desde tierra; de las trayectorias y el tiempo en que han sido recorridas se tendrá su dirección y velocidad.

2.º El procedimiento generalmente usado en los levantamientos hidrográficos y suficientemente exacto para las necesidades de la navegación, es el siguiente: desde una embarcación fondeada se larga un flotador amarrado a un cabo fino; por la cantidad de cabo filado en un determinado tiempo se deduce la velocidad y marcando al flotador desde a bordo se tiene la dirección de su desplazamiento, y por consiguiente, la de la corriente. La sondaleza puede graduarse en metros, se tendrá la velocidad en m/s; o en nudos para tener la velocidad en millas por hora, cada nudo igual a 15.43 ms. La graduación debe empezarse a unos 30 mts. del flotador o barquilla para evitar la influencia de los remolinos producidos por el buque fondeado.

El flotador puede ser un sector lastrado como el empleado en la corredera de barquilla, el que se hará de mayores dimen-



siones que el comunmente usado, o como está indicado en la (fig. 309); constituido por una boya A que es el flotador y que debe emerger muy poco para que el viento no tenga efecto sobre él, cuatro planchas B de 80 cm. de largó por 20 cm. de ancho cruzadas en ángulo recto, estan unidas a la boya por el cable C, según la profundidad a la que se quiere determinar la corriente se alargará o acortará el cable C, el peso D completa el aparato.

Las observaciones deben hacerse cada cuarto o media hora, durante mareas completas, debiéndose anotar la fuerza y dirección del viento y las horas en que se producen las pleas y bajamares para poder deducir la correspondencia entre la fuerza y dirección de las corrientes y el estado de la marea.

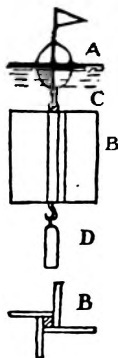


Fig. 309

Alejándose de la costa, deberá hacerse una estima exacta y mediante observaciones astronómicas o situación directa con los puntos de la costa se deducirán las corrientes por comparación de la derrota estimada y la verdadera.

X- 338. **Corrientes de mareas.** — La causa principal de las corrientes que se observan cerca de la costa es simplemente un fenómeno de derrame. Cuando el mar penetra en una bahía, más o menos grande, o mas generalmente, en un paraje que no tenga sino una comunicación con el mar, las aguas deben, evidentemente, correr en el mismo sentido, hacia adentro, hasta el momento en que hayan alcanzado el nivel máximo del exterior, entonces el sentido de la corriente se invertirá y las aguas habiendo empezado a descender el nivel en el exterior correrán hacia afuera hasta llegar al nivel mínimo. Cuando se produce la inversión de las corrientes, en la plea o bajamar, su velocidad se anula y su máximo valor lo adquiere a media marea.

Alejándose de la costa, a unas 10 millas de ella, cuando la onda de marea se propaga libremente, las corrientes cumplen las leyes que Hatt ha demostrado analíticamente y que son: «Existe una corriente dirigida en el sentido del movimiento de la onda, que nace a media marea creciendo, llega a un má-

ximo en pleamar y termina a media marea bajando, iniciándose entonces una corriente de sentido contrario a la anterior, que alcanzará su máximo en bajamar para terminar a media marea creciendo». Los cambios de corriente se producen prácticamente tres horas después de las plea y bajamares.

Entre los dos extremos antes citados, corrientes nulas o máximas en las pleas o bajamares, observaremos circunstancias intermedias, es decir, que los retardos entre el instante de los cambios de corrientes y el de las pleas o bajamares serán más o menos grandes según que en el lugar que observemos las mareas se propaguen más o menos libremente.

Cerca de la costa la dirección de la corriente de creciente o bajante tampoco es siempre constante, en algunos casos ella varía  $180^\circ$  durante la creciente y otros  $180^\circ$  durante la bajante, su dirección hace un giro completo al horizonte, son las corrientes *rotatorias*. Los accidentes de la costa también afectan su dirección, llegando a formar contracorrientes y remolinos.

La velocidad de la corriente puede aceptarse que es proporcional a la semi-amplitud de la marea; en el Océano tiene, en general, muy poca intensidad y está dominada por las corrientes permanentes o de duración periódica, pero en las costas, especialmente cerca de puntas que avanzan en el mar, en los canales, entradas a puerto, etc., adquieren mayor velocidad, llegando hasta 6 u 8 millas horarias. Su estudio en este caso es de la mayor importancia para aprovecharlas o evitarlas y para la seguridad de los buques.

El viento, modificando la propagación de las mareas, modifica también la dirección de las corrientes, poniendo ambos fenómenos en concordancia. En los parajes donde la amplitud de la marea es muy pequeña, la corriente tira en dirección hacia donde va el viento, siendo entonces un efecto exclusivamente meteorológico.

## CAPITULO XXIX.

### PROYECCIONES.

**339. Sistemas de cartas principales.**—La dificultad que presenta la construcción y empleo de globos terrestres de grandes dimensiones ha hecho renunciar a su uso y ha impuesto la necesidad de representar sobre superficies planas, llamadas *cartas*, la posición de los diversos puntos de la tierra.

Las cartas pueden dividirse en *cartas geográficas*, *náuticas* y *especiales*, estas últimas pueden ser geológicas, magnéticas, meteorológicas, etc.

Las cartas geográficas se subdividen en: *mapamundos* o *planisferos*, los que representan toda la superficie de la tierra: *cartas generales* (escala  $\frac{1}{5.000.000}$ ) que representan una de sus partes principales; un continente, un oceano, etc.; *cartas corográficas* que sirven para representar el territorio de uno o más estados (escala  $\frac{1}{1.000.000}$  a  $\frac{1}{2.000.000}$ ) y en las que están representados los ríos, montañas, etc. y las *cartas topográficas* que representan una región limitada con los detalles de la naturaleza del terreno (escala  $\frac{1}{200.000}$  a  $\frac{1}{25.000}$ ).

Podría también considerarse como una subdivisión a los *planos* cuya escala es mayor que  $\frac{1}{25000}$ .

La superficie de la tierra, no siendo desarrollable, es imposible hacer una representación plana que reproduzca exactamente las distancias, superficies, posición relativa de los puntos, etc. Se está obligado a alterar en la carta ciertas relaciones de unas dimensiones más que de otras, según el objeto de la

misma. Se puede conservar casi inalterable el valor de los ángulos, con lo que se consigue gran semejanza entre la situación relativa de los puntos en la representación y sobre la tierra. estas cartas se llaman *isogonas*; o puede conservarse una relación constante entre el área real de las figuras en la tierra y las que les corresponde en la carta, éstas se llaman *equivalentes*. Por su generación los sistemas de cartas toman en general el nombre de *proyecciones* y se dividen en dos clases: *Proyección perspectiva* y *proyección desarrollada*.

Sea cuaiquiera el género de proyección, la construcción de una carta se reduce a la construcción del *reticulado de paralelos y meridianos*, llamado *canevds*, y sobre el cual se sitúan los puntos principales mediante sus coordenadas geográficas y después los puntos secundarios refiriéndolos a los principales.

#### PROYECCIÓN PERSPECTIVA

En esta proyección, la posición de un punto sobre el plano de representación, el que se llama *cuadro*, es la intersección de este con la recta determinada por la unión del punto donde se supone el ojo, *punto de vista*, con el punto considerado de la superficie de la tierra.

Según que el cuadro sea el ecuador, un meridiano o el plano horizontal del lugar, la proyección se llama *polar*, *ecuatorial* u *horizontal*.

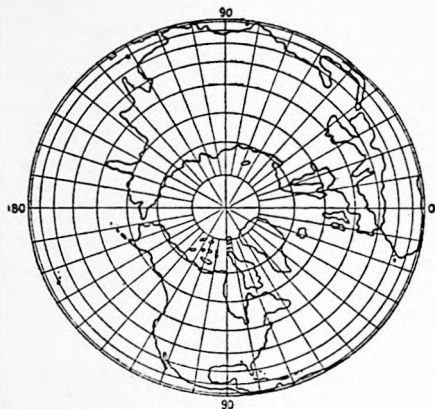
Según que la posición del punto de vista esté en el centro de la tierra, sobre la superficie de la misma o en el infinito; la proyección se llama respectivamente *gnomónica* o *central*, *estereográfica* y *ortográfica* ortogonal.

**340. Proyección ortográfica.**— En este sistema el punto de vista está situado en el infinito, como plano de proyección se elije el ecuador o un meridiano. Esta representación es la que se emplea en la representación de las regiones polares y de los astros con diámetro sensible; Sol, Luna y Planetas.

a) Si el cuadro es el plano del ecuador (fig. 310); un meridiano  $PAP'$  está representado por su traza con ese plano y un paralelo  $BB'$  por un círculo concéntrico con el ecuador



seno del ángulo Q T B, ángulo que es la longitud del meridiano considerado con respecto al meridiano tomado como plano de proyección.



Ortográfica polar.

Fig. 512.



Ortográfica ecuatorial.

Fig. 513.

Las figuras 512 y 513, muestran un canevas de esta proyección.

**341. Proyección estereográfica.**—Se emplea en la construcción de los mapamundos. En este sistema el plano de proyección es el círculo máximo base del hemisferio que se quiere representar y el punto de vista está colocado en uno de los polos de ese círculo máximo.

Esta proyección goza de dos propiedades que la caracterizan:

1) El ángulo formado por la proyección de las líneas, trazadas sobre la esfera, es igual al ángulo formado por las mismas.

2) La proyección de un círculo es un círculo que tiene por centro la proyección del vértice del cono circunscripto a la esfera según el círculo que se quiere representar.

De estas propiedades se deduce que un triángulo muy pequeño trazado sobre la esfera y sensiblemente plano tendrá por proyección un triángulo cuyos ángulos son iguales a los del triángulo propuesto y, por consiguiente, semejante; en general, una porción muy pequeña de la esfera estará representada por una figura semejante. Además los paralelos y meridianos estarán representados por círculos.

La proyección estereográfica puede hacerse:

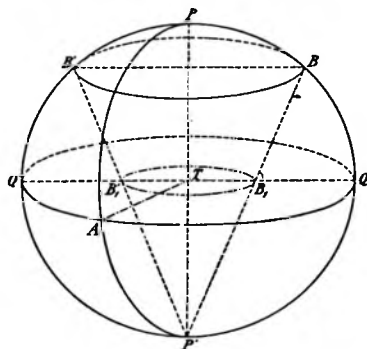


Fig. 314.

a) Tomando como plano de proyección el ecuador QQ' (fig. 314); el punto de vista en el polo  $P'$  si se quiere representar el hemisferio boreal, un paralelo  $B B'$  se proyecta según la circunferencia  $B_1 B'_1$  y un meridiano  $P A P'$ , según la recta  $T A$ .

También puede tomarse como plano de proyección el tangente polar correspondiente al hemisferio que se quiere representar; la única diferencia que resulta con la proyección este-reográfica ecuatorial es la de la escala del dibujo.

La fig. (315) representa el hemisferio norte.

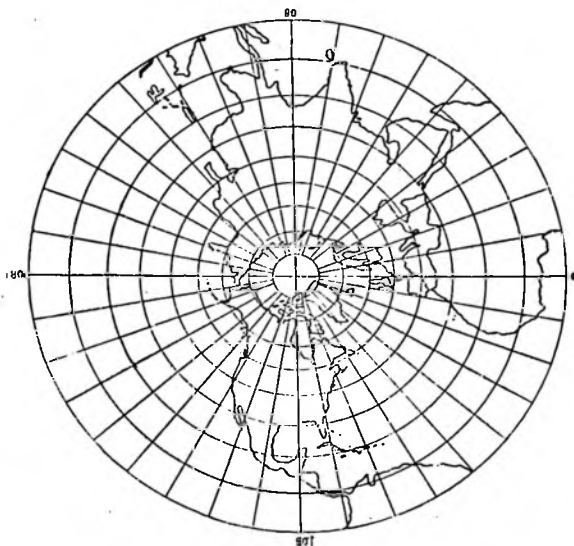


Fig. 315.

b) Tomando como plano de proyección el plano del meridiano  $PQ P' Q'$  (fig. 316), el punto de vista está en  $V$ , polo posterior del plano meridiano considerado,  $V'$  es el polo anterior.

Un meridiano  $PM P'$  se proyecta según el arco de círculo  $Pm P'$  determinado en el plano de proyección por los puntos  $P'$  y  $P''$  y la intersección  $m$  del rayo proyectante  $VM$  con el plano de proyección. Un paralelo  $N' N N''$  se proyecta según el arco de círculo  $N' n N''$ , determinado por los puntos  $N' N''$  y la intersección del rayo proyectante  $VN$  con el plano de proyección. El punto  $M$  que se considera está situado en el plano



del ecuador, su proyección  $m$  debe estar sobre la recta  $Q Q'$  que lo representa; el punto  $N$  está en el plano polar  $O P V' P'$ , su proyección estará sobre  $P P'$ .

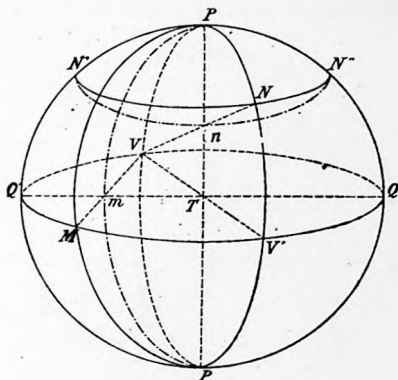


Fig. 316

La fig. 317 representa el hemisferio occidental, el centro de

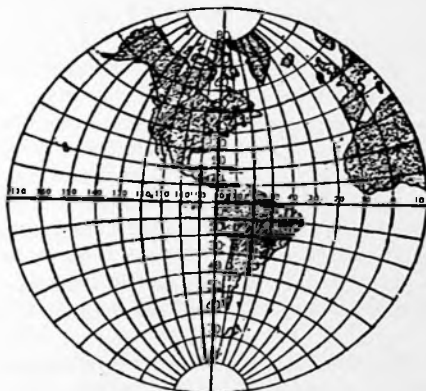


Fig. 317

proyección es la intersección del meridiano  $70^\circ$  con el ecuador,

el plano meridiano sobre el que se ha hecho la proyección es el determinado por los meridianos  $10^{\circ}$  y  $170^{\circ}$ .

c) Si M (fig. 318) es un punto cualquiera de la superficie terrestre, proyectemos el hemisferio que lo contiene sobre el

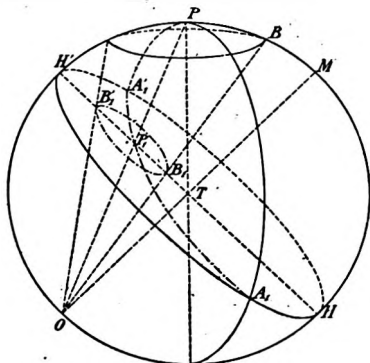


Fig. 318.

plano  $H H'$  determinado por el horizonte del lugar. El punto de vista es O. La proyección del polo P estará en  $P_1$ , la de un paralelo será el círculo con centro  $P_1$ ,  $B_1 B_1'$ ; los demás paralelos son círculos concéntricos. Un meridiano  $P A_1 P' A_1$  se proyecta según el arco de círculo  $A_1 P_1 A_1$ .

**342. Proyección gnomónica.**— En esta proyección el punto de vista está situado en el centro de la tierra y el plano de proyección es el plano tangente en el punto medio de la superficie a representar. La intersección de un plano cualquiera que pasa por el centro de la esfera, determina sobre esta un círculo máximo de la misma y sobre el plano de proyección una recta que es la proyección de ese círculo máximo; esta es su propiedad característica que la hace útil para la navegación ortodrómica.

Sea  $H H'$  (fig. 319), un plano tangente en el punto medio de la superficie a representar A;  $P P'$  el eje polar y  $Q Q'$  la traza del ecuador. El rebatimiento de  $H H'$  es  $h h'$ .

El plano meridiano que pasa por A está representado por la

recta  $m_1 r'_1$ ; el eje polar por su traza con el plano de proyección  $p_1$  y los demás meridianos siendo círculos máximos convergentes en el polo  $P$ , estarán representados por rectas convergentes en la proyección del polo.

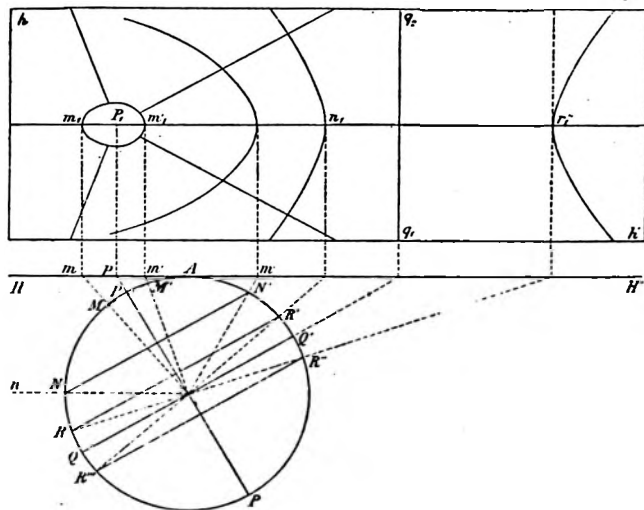


Fig. 319.

Un paralelo  $M M'$  cuya latitud  $M Q$  sea mayor que la colatitud  $A P$  del punto de tangencia  $A$ , se proyectará según una elipse  $m_1 m'_1$ , intersección del plano de proyección con la superficie cónica que se engendra considerando dicho paralelo como directriz y los rayos proyectantes como generatrices.

Para un paralelo  $N N'$  cuya latitud  $N Q$  es igual a  $P A$ , la generatriz proyectante  $O N n$  es paralela al plano de proyección; la intersección de este plano con la superficie cónica será una parábola cuyo vértice es la proyección de  $N'$ .

Para un paralelo  $R R'$  cuya latitud  $R Q$  es menor que  $P A$ , el plano de proyección corta una de las napas de la super-

ficie cónica engendrada con  $R R'$  como directriz y  $O R'$  como generatriz según una curva cuyo vértice es  $\pi_1$ ; la otra napa, determinada por las mismas generatrices prolongadas, cortan la esfera según el paralelo  $R'' R'''$  y el plano de proyección según otra curva cuyo vértice es  $\pi_1''$ . Las curvas con vértice en  $\pi_1$  y  $\pi_1''$  pertenecen a una hipérbola.

El ecuador  $Q Q'$  siendo un círculo máximo está representado por la recta  $q_1 q_2$

**343. Cartas gnomónicas de navegación.**— Se ha construido para cada uno de los tres grandes océanos cartas en esta proyección, tomando como cuadro al plano tangente al ecuador, resulta así una proyección meridiana; el ecuador es la horizontal del plano, los meridianos son rectas perpendiculares al ecuador y los paralelos son hipérbolas. La característica de esta proyección, es que una recta que une dos puntos de ella representa el arco de círculo máximo que pasa por ellos, es decir, el *camino ortodrómico*; para utilizarlo se obtienen las coordenadas geográficas de unos cuantos puntos de la recta y con ellas se determina la derrota sobre la carta Mercator.

Esta proyección produce grandes deformaciones lejos del punto tomado como centro.

La fig. 320) representa parte del hemisferio occidental en proyección gnomónica ecuatorial, el plano de proyección es tangente al ecuador en el meridiano  $80^\circ W$ .

Tratándose de la representación de una pequeña zona de la tierra las deformaciones que se producen son gráficamente despreciables, aún para las escalas mayores que generalmente se usan, siempre que la zona esté limitada a 100 km. o  $1^\circ$  próximamente alrededor del centro de proyección; en estos límites se pueden substituir los puntos del terreno por su proyección según la vertical sobre el plano tangente en la parte central de la zona.

La deformación angular máxima que resulta es de  $40''$ ; la deformación lineal para las líneas convergentes en el centro es de 25 cm. por km. y para las normales a estas de 12 cm. por km.

## II PROYECCIÓN DESARROLLADA

Si se considera una zona limitada del globo terrestre, se le puede siempre asimilar a una zona de superficie desarrollable circunscripta y después desarrollar sobre un plano la parte sensiblemente común de las dos superficies.

El error cometido será tanto menor cuanto la región de la cual se hace la carta sea menos extendida en el sentido perpendicular al círculo de contacto.

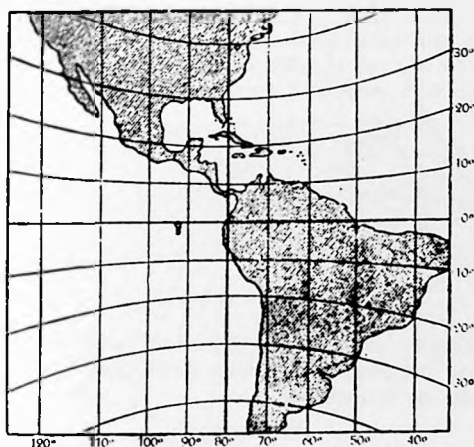


Fig. 320.

Las regiones ecuatoriales pueden ser consideradas trazadas sobre el cilindro circunscripto a la esfera según el ecuador. Una región situada entre el polo y el ecuador puede representarse sobre el tronco de cono limitado por los paralelos extremos y circunscripto a la esfera según el paralelo medio; el tronco de cono se desarrolla sobre el plano tangente al mismo en su generatriz media. En un caso se tiene la *proyección cilíndrica* y en el otro la *proyección cónica*.

**344. Proyección conica.**—Sea  $M$  el punto medio de la superficie  $A B C D$  a representar (fig. 321), por el paralelo  $E F$  que pasa por ese punto medio imaginemos el cono circunscrito a la esfera y al que puede considerarse, para una pequeña extensión, confundido con la superficie de la tierra.

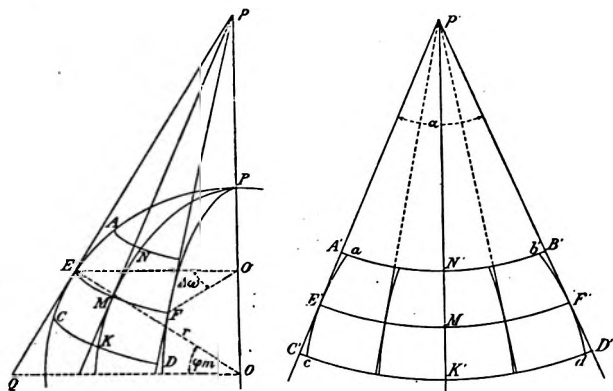


Fig. 321.

La tangente al meridiano  $M P$  corta la línea de los polos en  $p$ , vértice del cono circunscrito. La longitud  $M p = E p$ , siendo  $r$  el radio de la esfera es

$$M p = r \cotg. \varphi_m$$

La amplitud  $\alpha$  del ángulo formado por las tangentes a los meridianos extremos cuando el cono está desarrollado es dada por la relación

$$M p . \alpha = E F = r \cotg. \varphi_m . \alpha$$

Por otra parte el arco de paralelo  $E F$  tiene la amplitud  $\Delta \omega$ , diferencia de longitud entre los meridianos  $P E$  y  $P F$ ; siendo el radio de paralelo  $E O' = r \cos \varphi_m$ ,

$$E F = r \cos \varphi_m . \Delta \omega = r \cotg. \varphi_m . \alpha$$

$$\alpha = \Delta \omega \operatorname{sen} \varphi_m$$

fórmula ya establecida para la convergencia de meridianos.

Para construir el canevas después de calculado  $\alpha$  y  $p$  M, se traza el meridiano central  $p' M'$  (fig. 321); con radio  $p' M' = p M$  se traza el arco  $E' F'$  tal que su amplitud sea el ángulo  $\alpha$  y se tienen los meridianos  $A' C'$  y  $B' D'$ ; luego se hacen las subdivisiones para completar el reticulado.

Para construir los paralelos extremos, con longitud  $E' A'$  igual a la del arco  $E A$  y con centro en  $p'$ , se traza el arco  $A' B'$ ; análogamente con  $E' C' = E C$ , se obtendrá el paralelo  $C' D'$ .

En esta proyección las distancias sobre los meridianos y sobre el paralelo medio se conservan, pero sobre los otros paralelos son aumentadas; esto determina alteraciones sobre las distancias, ángulos y superficies y por esto no puede ser usada para la representación de superficies muy extendidas en latitud.

Si en vez de representar los meridianos por las rectas  $p' A'$ ,  $p' B'$ , sobre el arco  $A' B'$  tomamos  $N' a$  igual a la longitud de

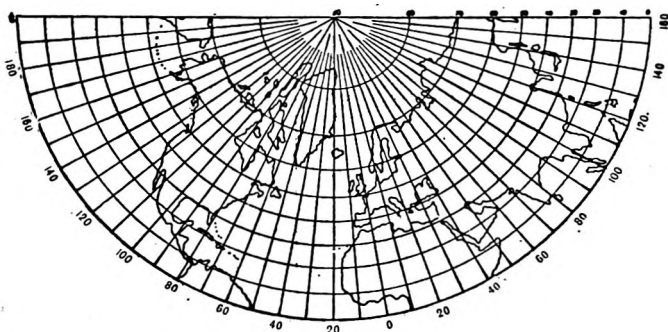


Fig. 322.

paralelo  $N A$  y  $K' c = K' C$ , uniendo los puntos  $a$ ,  $E'$  y  $c$  tenemos una nueva representación del meridiano.

Este sistema de proyección conserva las superficies en su representación y es por lo tanto *equivalente*.

La propiedad de conservar las áreas ha hecho que generalmente se le prefiera para las cartas generales y particulares de vastas regiones; esta proyección se llama *cónica equivalente de Mercator* o *proyección Bonne*.

La figura (322) representa el hemisferio norte en proyección

cónica, el cono es tangente según el paralelo  $50^{\circ}$  y el punto de vista es el centro de la tierra.

**345. Proyección cilíndrica.**—Se usan los siguientes sistemas : 1.º) Se considera, en una pequeña extensión, confundida la superficie terrestre con el cilindro circunscripto según el meridiano central, cilindro cuyas generatrices serán paralelas al eje ecuatorial; es el *desarrollo de Cassini*. 2.º) La proyección isó-

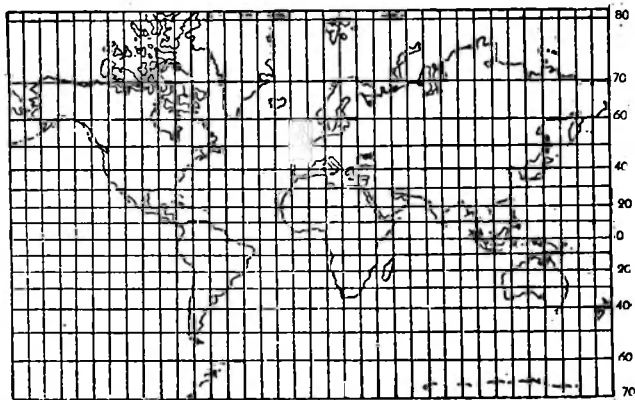


Fig. 323.

gonal de Mercator, llamada simplemente *carta de Mercator* o *reducida*, el cilindro sobre el cual se hace la representación es el circunscripto a la esfera terrestre según el ecuador, sus generatrices paralelas al eje polar. Estas cartas son las que exclusivamente se usan en navegación y de las que solo nos ocuparemos.

En la *carta Mercator* hay una relación uniforme entre el alargamiento en latitud y en longitud que más adelante se estudia.

Su empleo en la construcción de mapamundos no es conveniente porque agranda mucho las regiones polares, puede considerarse como límite el paralelo  $60^{\circ}$ . (Fig. 323). En esta repre-



sentación la Groelandia parece ser mayor que Sud América cuando en realidad es nueve veces menor; lo que se explica si se considera que al darse al paralelo  $60^\circ$  la longitud del ecuador, hemos duplicado la longitud de su desarrollo y habiendo hecho lo mismo en latitud, las áreas estarán cuadruplicadas. En el paralelo  $80^\circ$  esta proporción se eleva a 56 veces.

En la proyección Mercator la línea loxodromica, la que sobre la esfera terrestre corta a todos los meridianos formando el mismo ángulo y que es la línea que siguen los buques en su navegación, está representada por la línea recta.

Sea  $N E' S E$  (fig. 324) el globo terrestre, supuesto esférico y de radio  $a$ ;  $E M E' M'$  un cilindro tangente a la esfera según el ecuador  $E E'$ . Un plano paralelo al ecuador determina dos círculos concéntricos, uno  $P P$ , sobre la superficie cilíndrica de radio  $a$  y otro  $p p'$  sobre la esfera de radio  $r$ .

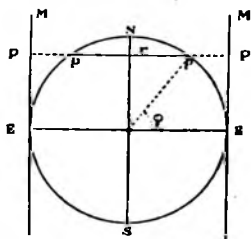


Fig. 324.

La relación de las longitudes de esas circunferencias es:

$$\frac{r}{a} = \cos \varphi.$$

Para un ángulo  $d\theta$ , corresponderá respectivamente en cada una de las circunferencias los elementos

$$da = r d\theta$$

$$d\omega = a d\theta$$

y

$$d\omega = \frac{da}{\cos \varphi}$$

Si hacemos que se dilate en la misma proporción el elemento  $d\varphi$  de meridiano, en su representación sobre el cilindro será  $\frac{d\varphi}{\cos \varphi}$  y un punto cuya latitud es  $\varphi$  distará del punto de tangencia la suma de todos los elementos dilatados; la distancia  $\lambda$  será

$$\lambda = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = t \operatorname{táng} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

El valor de  $\lambda$  se denomina *latitud creciente o partes meridionales*, su valor se hace infinito para  $\varphi = 90^\circ$ ; luego, los polos no podrán representarse en el desarrollo Mercator.

Esta expresión reducida a minutos de arco y cambiada la base de los logaritmos es

$$\lambda = 7915'704468 \log \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

valor que está en la Tabla LI (Pastor) y N° 35 (E N M).

En la construcción de las cartas se tiene en cuenta el aplamamiento, esta corrección está dada por la fórmula siguiente

$$\text{corr} = -3437'74677 \left( e^2 \sin \varphi + \frac{1}{3} e^4 \sin^3 \varphi + \frac{1}{5} e^6 \sin^5 \varphi + \dots \right)$$

su valor está dado en la tabla XLII (Pastor) para  $e = \frac{1}{292}$  y

en la tabla N° 35 (E N M) para  $e = \frac{1}{297}$

Si suponemos que el cilindro tangente de la fig. 324 se abra según una generatriz y se desarrolle sobre un plano, el ecuador estará representado por una recta en su verdadera magnitud y los meridianos por el sistema de generatrices o rectas perpendiculares al ecuador y equidistantes, si corresponden a puntos separados por igual diferencia de longitud.

Los paralelos forman un sistema de rectas paralelas al ecuador y cuyas distancias a éste serán los valores respectivos de  $\lambda'$ .

Esta proyección se emplea en las cartas marinas cuando por la extensión del trabajo hidrográfico se hace sensible la convergencia de los meridianos.

Siendo la expresión de la convergencia de meridianos

$$\Delta Z = \Delta_w \sin \varphi_m;$$

la longitud del arco de paralelo  $\Delta A = \Delta_w \cos \varphi_m$ , se obtiene  $\Delta A = \Delta Z \cotg \varphi_m$ . Aceptándose que el ángulo máximo que pueden formar los meridianos extremos no pase de  $20'$ , se tendría para  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\Delta A = 34.5$  millas, es decir, que el plano no debe abarcar más de 34.5 millas en longitud, sin que deba recurrirse a la proyección Mercator.

346. Influencia del aplanamiento en la latitud creciente. — Considerando la tierra esférica se ha obtenido

$$d\omega = \frac{da}{\cos \varphi} = da \frac{a}{r}$$

teniendo en cuenta la forma elipsoidal de la tierra,  $d\omega$  es el elemento de longitud sobre el cilindro que corresponde al elemento de longitud  $da$  de paralelo sobre el elipsoide y se debe reemplazar  $r$  por su valor dado en (185).

Un elemento  $ds$  de meridiano sobre el elipsoide está dado en función de la variación  $d\varphi$  de la latitud y el radio de curvatura del mismo (190) por

$$ds = R d\varphi$$

Para obtener el valor que le corresponde sobre la generatriz del cilindro hay que multiplicarlo por  $\frac{a}{r}$

$$ds_e = \frac{R d\varphi}{r} a.$$

Tomando el radio ecuatorial por unidad  $a = 1$  y reemplazando  $R$  y  $r$  por sus valores (188) y (185)

$$\begin{aligned} ds_e &= \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \left( 1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \\ &= \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{e^2 \cos \varphi d\varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{d \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} - e \frac{d \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la integral indefinida es de la forma

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

y que

$$\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

y que también

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \dots$$

limitando la integral entre 0 y  $\varphi$

$$\lambda' = \int_0^\varphi ds_e = \ln \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$- (e^2 \sin \varphi + \frac{1}{3} e^4 \sin^3 \varphi + \frac{1}{5} e^6 \sin^5 \varphi + \dots)$$

reducida a minutos de arco y cambiada la base de logaritmos

$$\lambda' = 7915704468 \log \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$- 343774677 (e^2 \sin \varphi + \frac{1}{3} e^4 \sin^3 \varphi + \frac{1}{5} e^6 \sin^5 \varphi + \dots).$$

## CAPITULO XXX

### CONSTRUCCIÓN DEL PLANO.

**347. Escalas.**—La escala de un plano es la relación constante entre la longitud gráfica  $l$  de una línea cualquiera y su correspondiente longitud  $L$  en el terreno; relación que es siempre una parte alícuota de la unidad, es decir, una cantidad de la forma  $\frac{1}{n}$ ,  $n$  siendo un número entero.

La fórmula  $\frac{l}{L} = \frac{1}{n}$ , permite calcular los valores de  $n$ ,  $l$  y  $L$  cuando se conoce dos de ellos.

La longitud mínima que puede apreciarse en un plano es 0.0002 metros; se llama aproximación gráfica del plano su valor real,  $A = n \times 0.0002$ : para  $n = 5000$ ,  $A = 1^m$ ; para  $n = 100000$ ,  $A = 20$  m.

La elección de la escala depende del objeto de la carta y puede decirse que para su construcción se emplean todas las escalas. Cuando la carta sirve para establecer el itinerario de derrotas largas es suficiente una pequeña escala de  $\frac{1}{300.000}$  ó

$\frac{1}{250.000}$ . Si la carta está destinada a servir para la navegación a vista de costa, para tomar fondeadero, etc., se usará una escala media de  $\frac{1}{100.000}$  ó  $\frac{1}{50.000}$ . Finalmente para los fondeaderos, puertos, canales será suficiente sea de  $\frac{1}{20.000}$  ó

$\frac{1}{10.000}$  y en algunos casos cuando se trata de parajes estrechos y peligrosos por los bajofondos o rocas submarinas de  $\frac{1}{5000}$ .

**348. Plano de construcción.**—A medida que se van teniendo los datos del levantamiento, se va calculando las coordenadas de todos los vértices de la triangulación, puntos de poligonal y detalle y con ellas se construye el llamado *plano de construcción* cuya escala conviene sea el doble de la que

tendrá el plano definitivo. Además se hacen planos parciales en escala aún mayor para situar el contorno de la costa y los sondeos hechos cerca de la misma.

Las zonas que abarcan cada plano de construcción son aquellas en las que puede considerarse confundida la superficie terrestre con el plano tangente trazado por su centro, 100 Kms.

Para hacer el dibujo es necesario construir el *canevás* o reticulado del plano.

La longitud de los lados de los cuadrados se determina de acuerdo con la escala del plano de manera que ellos sirvan al objeto propuesto; para la situación de los puntos de triangulación y de la topografía es suficiente que esa longitud tenga 10 cm. sea cualquiera la escala.

Para construir el *canevás*, de acuerdo con la escala y la máxima diferencia en las coordenadas de los puntos a representar, se toma una longitud de papel de dibujo conveniente y se traza la recta  $XX'$  (fig. 325), que será el eje de las abci-

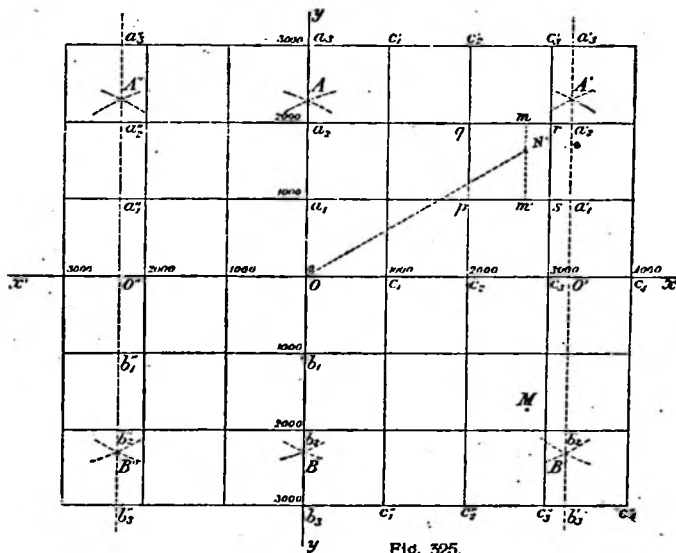


Fig. 325.

sas. Geométricamente se trazan las rectas  $A'B'$ ,  $AB$  y  $A''B''$  perpendiculares a  $XX'$ ; una de ellas  $AB$  la elegimos como eje de coordenadas y el punto  $O$  será el origen de coordenadas y, por lo tanto, representará en el plano el vértice de la triangulación tomado como origen de coordenadas.

Sobre  $A''B''$  se toma a partir de  $O''$ :

$$O''a''_1 = a''_1a''_2 = \dots = O''b''_1 = b''_1b''_2 = \dots = 1 \text{ dm.};$$

$$Oa_1 = a_1a_2 = \dots = Ob_1 = b_1b_2 = \dots = 1 \text{ dm.};$$

$$O'a'_1 = a'_1a'_2 = \dots = O'b'_1 = b'_1b'_2 = \dots = 1 \text{ dm.}$$

Los puntos  $a''_1a_1a'_1$ ,  $a''_2a_2a'_2$ ,  $b''_1b_1b'_1$ ,  $\dots$  etc., si están bien colocados estarán en línea recta y tendremos la red de paralelas al eje de las  $x$  situadas 1 dm. una de otra. Análogamente sobre las rectas  $a''_3a'_3$ ,  $O'O$  y  $b''_3b'_3$  se marca a 1 dm. de distancia los puntos  $c'_1, c'_2, \dots, c_1, c_2, \dots, c''_1, c''_2$  y tendremos la red de paralelas al eje de las  $y$ :

$$c'_1c''_1, c'_2c''_2, \dots \text{ etc.}$$

Las  $A''B''$  y  $A'B'$  que no forman parte de la red se borran del plano.

Si la escala es  $\frac{1}{10000}$  cada decímetro representa 1000 ms. y pondremos la graduación que la figura indica.

La exactitud del cuadrículado se comprueba por la longitud de las diagonales y la coincidencia de los vértices de cuadrículas que deben estar sobre una misma línea.

*Situación de los vértices de la triangulación.*—Si se quisiera situar un punto  $N$  cuyas coordenadas respecto a  $O$  sean  $X = 2225$ ,  $y = 1637$ , evidentemente estará en la cuadrícula  $pqr s$ ; sobre  $qr$  y  $ps$  se toma  $qm = pm' = 5 \text{ cm. } 2 \text{ mm. } 5$ ,  $mm'$  determina la paralela al eje de las ordenadas sobre la que tomaremos  $m'N = 6 \text{ cm. } 3 \text{ mm. } 7$ .

Así situado el vértice  $N$  de la triangulación, medimos su distancia en el plano a  $O$ ;  $NO = 30 \text{ cm. } 15$  lo que representa 3015 ms., este valor debe coincidir con el registrado para escalar en el cálculo de la triangulación.

Análogamente situaremos otro punto  $M$  con sus coordenadas y como comprobación mediremos las distancias  $MO$  y  $MN$  en el plano, las que deben estar de acuerdo con las dadas por el cálculo de la triangulación.



divisiones levantar las perpendiculares, sobre estas se tomarán las cotas anotadas en el registro de la poligonal y en el croquis de la misma y tendremos los puntos  $a, b, c, d \dots$  de la *línea de la costa*. Obtenida esta sacamos gráficamente las coordenadas  $y_a = a a_1, x_a = O a_1$ ; etc., y... de cuantos puntos de la misma se necesitan para hacer el dibujo en el plano de construcción.

Análogamente después de situar gráficamente la restinga R la isla I, el monte M, etc., de acuerdo con los datos del Registro de tangentes y visuales, sacamos de este plano las coordenadas correspondientes para poder transportarlos al plano de construcción; en esta forma habremos situado todos los *detalles topográficos* cuyas coordenadas no han sido calculadas directamente.

*Colocación de sondas.* — Los sondeos, en general, se sitúan directamente en el plano de construcción, pero las sondas hechas más densamente en las proximidades de la costa se colocan en el plano de situación de la poligonal y detalles topográficos.

A las sondas que tienen situación planimétrica, se les hace una marca que las distinga de aquellas que están situadas por simple interpolación.

Cuando los sondeos están situados a gran distancia de las bases de observación, para situarlos debe calcularse el triángulo que les corresponde y deducir sus coordenadas o emplear en su situación el estigógrafo.

Cuando los sondeos están hechos cerca de la costa, levantamiento de un puerto, bahía, etc., será suficiente proceder como sigue. Supongamos que sean tres las estaciones de observación, con centro en cada uno de los tres puntos, y con un gran radio, se trazan círculos cuyos arcos exteriores a la costa se subdividen de medio en medio grado o de grado en grado; en los citados vértices se hacen firmes unos hilos, que conjuntamente con las graduaciones de los círculos desempeñarán el oficio transportadores. Llevados los tres hilos en las direcciones de los relevamientos anotados en la libreta y correspondientes al número del sondeo, su intersección indicará esa situación; si como sucede generalmente los tres hilos no se



cortarán en un mismo punto, se tomará el punto central del triángulo que determinan las intersecciones, siempre que dicho triángulo no sea de dimensiones exageradas, en cuyo caso la situación se desechará.

En vez de utilizar los círculos graduados es más exacto construir los marcos de tangentes.

Sean A y B los puntos correspondientes a las estaciones de situación, si B tiene cero en A, a la normal B B' corresponderá la graduación  $90^\circ$ ; con  $B - 90^\circ = m$  como cateto obte-

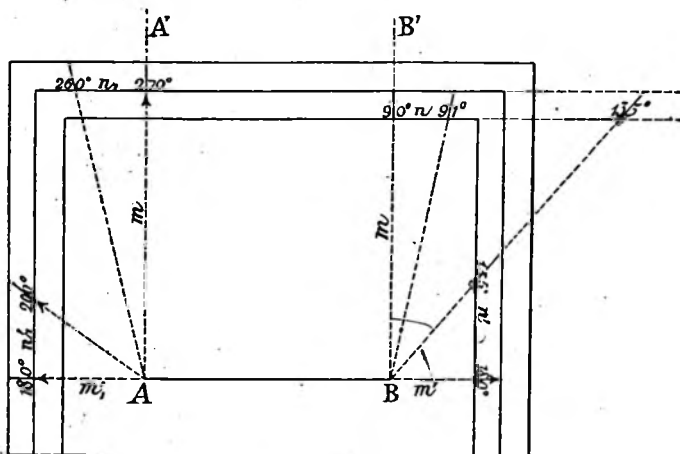


Fig. 527.

nemos la longitud  $n = m \tan 1^\circ$  que sirve para determinar el punto que corresponde a la graduación  $91^\circ$  y así sucesivamente,  $m$  se tomará de longitud conveniente, 1 metro por ejemplo.

La graduación del marco vertical puede hacerse tomando sobre la prolongación del horizontal la distancia  $90^\circ - 135^\circ$  o calculando con la longitud  $B - 180^\circ = m'$  el valor de  $n' = m' \tan (180^\circ - 135^\circ)$ .

Para A se repite la operación, con  $m$  se obtendrá  $n_1 = m \tan (270^\circ - 220^\circ)$  y  $n'_1 = m'_1 \tan (200^\circ - 180^\circ)$ .

La longitud  $AB$  representa en todos los casos la distancia y orientación de las dos estaciones donde se ha observado y como estas son variables, la escala del plano de situación también lo será; para trasportar los sondeos al plano definitivo se cuadricula sobre  $AB$  y su prolongación el plano de tangentes y se traza la cuadrícula correspondiente en el plano definitivo, el transporte de sondeos se hace por correspondencia de posición en cada cuadrícula. Este método de transporte es usado también para los detalles topográficos y línea de costa.

Si sólo son dos los observadores de tierra se procederá en forma semejante, quedando en este caso determinada el punto por la intersección de dos hilos.

Marcada la posición en el plano que debe tener el sondeo, se escribirá la sonda reducida correspondiente y la calidad del fondo.

Los sondeos situados con el problema de la carta, si no se ha calculado sus coordenadas, se sitúan con el estigógrafo, en algunos casos convendrá construir los ángulos sobre papel transparente y servirse del mismo para la situación.

**349. Plano hidrográfico.**— Después de terminado el plano de construcción, en el que se habrán situado todos los detalles topográficos y colocadas todas las sondas, se trasporta el dibujo al plano definitivo, el que se hará en la escala correspondiente.

Según la extensión de la zona levantada podrá considerarse la superficie de la tierra confundida con el plano tangente a la misma y dibujarse el plano con una escala gráfica de partes iguales o deberá usarse la proyección Mercator.

En el primer caso se situarán los vértices de triangulación que están sobre la costa mediante sus coordenadas planas, situaciones que servirán de referencia para pasar todos los demás detalles del dibujo del plano de construcción. El método más exacto y conveniente a emplear es el cuadriculado; para esto se cuadricula toda la faja de la costa y la zona que abarca los sondeos de centímetro en centímetro (según la escala) e igual operación se hace en el plano hidrográfico de manera que cada cuadrado del mismo, en su escala, represente lo que

vale 1 cm. en el plano de construcción; luego en forma análoga a la ya dicha (348) al tratar la forma de pasar la línea de costa, se dibuja esta sobre el plano hidrográfico. Igualmente se hace con los sondeos y detalles topográficos. Los bancos, boyas, etc., se dibujan de acuerdo con el «Patrón de signos y abreviaturas» reglamentario.

En el plano hidrográfico se colocan el número de sondas que son necesarios para darse cuenta perfecta de la región en lo que se refiere a las necesidades de la navegación. Lo mismo se hace con la parte topográfica suprimiéndose ciertos detalles innecesarios al navegante.

El plano hidrográfico además de estar exactamente orientado debe tener la *escala de latitudes y longitudes*; se dá al minuto de latitud o meridiano la longitud gráfica que corresponde a 1852 ms. y al minuto de longitud o paralelo la longitud correspondiente a 1852 cos  $\varphi_m$ .

**350. Inscripciones.** — Se inscribirán los siguientes datos:  $\varphi$  y  $\omega$  de un punto notable; establecimiento de puerto, unidad de altura, amplitud máxima y mínima de mareas y su altura sobre el nivel de reducción; declinación magnética del lugar y su variación anual.

Además, se dibujará la planta de la ciudad o población que comprenda, señalando especialmente los edificios reconocibles desde el mar; pequeñas anclas que indiquen el fondeadero tanto de grandes como de pequeñas naves; las líneas de dirección principales para tomar o dejar fondeadero, evitar peligros, etc., y por último, será muy conveniente presentar una vista perspectiva de la costa.

**351. Construcción de la carta reducida o Mercator.** — Como para hacer el plano de construcción se construye el *canevds*, en este caso formado por la red de meridianos y paralelos. Determinaremos primero las dimensiones del papel; sea:

$\varphi'$  y  $\varphi''$  las latitudes de los paralelos límites.

$\lambda'$  y  $\lambda''$  las latitudes crecientes correspondientes a esos paralelos.

$\omega''$  y  $\omega'$  las longitudes de los meridianos límites.

A la altura del papel, L el largo del mismo.

Sabemos que en el ecuador la longitud del minuto de arco es 1852 ms. y que en un paralelo  $\varphi_m$  el valor del minuto de arco de paralelo es  $U = 1852 \cos \varphi_m$ , siendo

$$\varphi_m = \frac{\varphi' + \varphi''}{2}.$$

La longitud efectiva  $U$  estará representada en la carta, si  $\frac{1}{n}$  es la escala, por la longitud gráfica  $u = \frac{U}{n}$ .

El largo del papel será  $L = (\omega'' - \omega') u$  y la altura

$$A = (\lambda'' - \lambda') u.$$

Estas fórmulas permiten determinar las dimensiones del plano cuando se ha fijado la escala o inversamente.

Para construir el reticulado se empieza por determinar el valor de  $u$  de acuerdo con la escala del plano y la latitud media  $\varphi_m$ .

El valor de  $U$  está dado en tablas con el nombre de «Longitud del minuto de paralelo» para cada grado de latitud o de  $10'$  en  $10'$  de la misma.

El valor de  $\lambda$  está dado en la tabla LI de Pastor, supuesta la tierra esférica y la corrección por elipticidad del meridiano la da la tabla XLII, para un aplanamiento  $\frac{1}{292}$ .

Para fijar ideas supongamos que se quiera construir el canevás correspondiente a una zona comprendida por los paralelos  $\varphi' = 40^\circ \text{ S}$  y  $\varphi'' = 42^\circ \text{ S}$ ;  $\omega' = 64^\circ \text{ O}$  y  $\omega'' = 65^\circ \text{ O}$ . La escala

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{200.000}.$$

De las tablas se obtiene, para la latitud  $\varphi_m = 41^\circ$ , la longitud efectiva del minuto de paralelo  $U = 1402.41 \text{ ms.}$ ; la longitud gráfica será

$$u = \frac{1402.31}{200000} = 0.00701 \text{ m.}$$

Los meridianos extremos difieren  $60'$ , el largo del papel será  $60 \times 0.007101 = 0.42 \text{ m.}$

La tabla L1 dá para  $\varphi' = 40$ ,  $\lambda' = 2622'7$ ; para  $\varphi'' = 42^\circ$ ,  $\lambda'' = 2781'7$ ; la altura del papel es  $u(\lambda'' - \lambda') = 1.114$  m.

Para trazar los méridianos y paralelos, así como para situar los vértices de triangulación conviene tomar como origen de referencia uno de los vértices del canevas y luego calcular las distancias en milímetros que corresponde a cada minuto de longitud y latitud. Tomaremos en este ejemplo el vértice superior de la derecha, al que corresponde  $\varphi = 40^\circ$  S y  $\omega = 64^\circ 0$ .

Para la longitud a cada minuto corresponde 7.01 mm. luego:

Minutos de longitud	Valor en milímetros
64° 00'	0.00
01	7.01
02	14.02
03	21.03
: :	: :
64° 10'	70.10
: :	: :
64° 20'	140.20
21	147.21
22	154.22
: :	: :
65° 00'	420.60

Para tener los meridianos  $64^\circ 10'$ ,  $64^\circ 20'$ , etc., tomaremos sobre los paralelos 70.10 mm., 140.20 mm., etc. y trazaremos las verticales correspondientes.

Para las latitudes se hace la tabla siguiente:

Minutos de latitud	Latitud creciente Tabla LI	Corrección Tabla XLII	Latitud creciente corregida	Diferencia $\Delta$	$\Delta \times 7.01$ mm. Valor en milímetros
40° 00'	2622.7	— 15.1	2607.6	0.0	0.00
01	24.0	»	08.9	1.3	9.11
02	25.5	»	10.2	2.6	18.22
03	26.8	»	11.5	5.9	27.33
: : :	: : :	: : :	: : :	: : :	: : :
40° 10'	2635.8	— 15.1	2620.7	13.1	91.85
: : :	: : :	: : :	: : :	: : :	: : :
40° 20'	2648.9	— 15.2	2633.7	26.1	182.96
: : :	: : :	: : :	: : :	: : :	: : :
41° 00'	2701.6	— 15.4	2686.2	78.6	550.48
: : :	: : :	: : :	: : :	: : :	: : :
41° 10'	2714.9	— 15.4	2699.5	91.9	644.22
11	16.2	»	2700.8	93.2	653.33
12	17.5	»	02.1	94.5	662.44
: : :	: : :	: : :	: : :	: : :	: : :
40° 20'	2728.2	— 15.5	2712.7	105.1	736.35
: : :	: : :	: : :	: : :	: : :	: : :
42° 00'	2781.7	— 15.7	2766.0	158.4	1110.38

NOTA.—Hecho este cálculo con la tabla N.º 35 y aplanamiento  $\frac{1}{297}$  da

$$\varphi' = 40^\circ \quad \lambda' = 2622.69 - 14.87 = 2607.82$$

$$\varphi'' = 42^\circ \quad \lambda'' = 2781.71 - 15.48 = 2766.23$$

$$\lambda'' - \lambda' = \Delta \lambda = 158.41$$

$$T. 35. \quad \Delta \lambda \times u = 1110.45 \text{ mm.}$$

$$T. XLII \quad \Delta \lambda \times u = 1110.38 \text{ »}$$

$$\text{Diferencia} = 0.07 \text{ mm.}$$

Construidas las tablas anteriores, sobre los paralelos superior, inferior y medio, se toma a partir del meridiano origen, 64° en este ejemplo, las longitudes 70.10 mm, 140.20 mm., etc., que corresponden a los meridianos 64°10', 64°20', etc., y por ellos se trazan los meridianos correspondientes a esas longitudes. Como la escala de longitudes es de partes iguales, se dividirá en 10 partes iguales cada división entre dos meridianos y tendremos las divisiones en minutos de paralelos.

Análogamente sobre los meridianos extremos y un meridiano medio tomamos a partir del paralelo origen, en este caso  $40^{\circ}$ , las longitudes 9.11 mm. 18.22 mm. ....  $91.85$  .... etc., que corresponden a los paralelos  $40^{\circ}01'$ ,  $40^{\circ}02'$  ....  $40^{\circ}10'$  .... etc. y tendremos las divisiones del marco en minutos y los puntos para trazar los paralelos cada  $10'$  de latitud.

En el ejemplo presentado se han trazado los paralelos y meridianos cada  $10'$ , esta no es regla invariable, en algunos casos se trazan cada  $20'$ ,  $30'$ , o  $1^{\circ}$ , según la escala de la carta.

*Situación de los vértices de la triangulación.*— Para su colocación es necesario haber calculado las coordenadas geográficas de los mismos, con ellas se obtiene las distancias en milímetros según el paralelo y el meridiano al vértice origen. Ejemp.: un vértice cuyas coordenadas son  $\varphi = 41^{\circ} 11' 36''$  y  $w = 64^{\circ} 21' 42''$ ; de la tabla anterior se obtiene por interpolación.

para  $\varphi = 41^{\circ} 11' 6''$  le corresponde  $655.33 + 5.46 = 658.79$  mm.

•  $w = 64^{\circ} 21' 7''$  • •  $147.21 + 4.90 = 152.11$  •

*Copia del plano de construcción.*— Sea la (fig. 328) el plano de construcción y el canevas de la carta Mercator correspondiente, sobre este último colocamos mediante sus coordenadas geográficas los vértices  $M'$  y  $N'$  de la triangulación cuya situación en el plano de construcción es  $M$  y  $N$ .

Arreglamos un compás de reducción de manera que haya concordancia entre la diferencia de abscisa  $Mm$  y la diferencia de longitud  $M'm$  este será el *compás de longitud*; análogamente arreglamos otro de manera que haya concordancia entre la diferencia de ordenada  $Nn$  y la diferencia de latitud  $N'n'$ , este será el *compás de latitud*.

Las distancias  $Ma$  y  $Nb$  reducidas con el compás de longitud nos dan las distancias  $M'a'$  y  $N'b'$  que permiten trazar los meridianos  $A'A_1$  y  $B'B_1$  que corresponden a las líneas  $A A_1$  y  $B B_1$ . Análogamente, con el compás de latitud se hallarán las distancias reducidas  $M'c'$  y  $N'd'$  correspondientes a  $M c$  y  $N d$ , las que nos permiten trazar los paralelos  $C' C_1$  y  $D' D_1$  que corresponden a  $C C_1$  y  $D D_1$ .

Queriendo situar la línea de la costa, con el compás de lon-

gitud hallamos la distancia reducida que corresponde a  $p - 1$  y tendremos con  $p' - 1'$  el punto 1. Con el compás de latitud

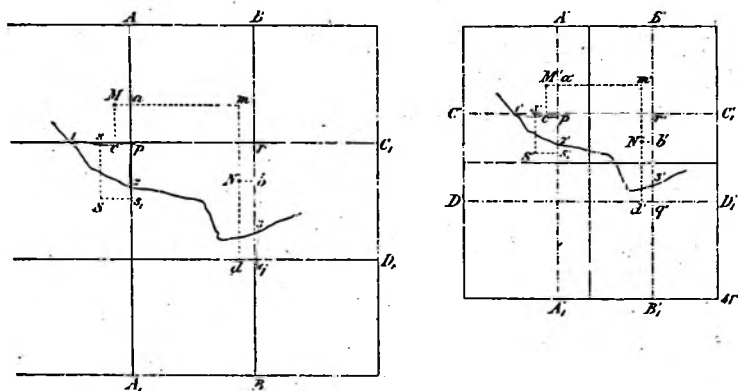


Fig. 328.

haremos lo mismo con  $p - 2$ , y  $q - 3$ , tendremos  $p' - 2'$  y  $q' - 3'$ . Los puntos  $1'$ ,  $2'$  y  $3'$  no son suficientes para trasportar sobre la carta reducida toda la línea de la costa, para hacerlo se divide  $1 - p$  y  $p - r$ , en partes iguales y se traza las ordenadas, con la distancia reducida con el compás de longitud, que corresponde a cada una de las partes iguales se divide  $1' - p'$  y  $p' - r'$  y también se trazan las ordenadas; se miden después sobre las ordenadas, con el compás de latitud, en el plano de construcción el segmento de ordenada interceptado entre el paralelo  $CC_1$  y la línea de la costa, la longitud reducida de ese segmento da sobre las ordenadas trazadas en la carta Mercator, tomadas a partir del paralelo  $C'C_1$ , los puntos necesarios de la línea de la costa.

Otro punto cualquiera del plano de construcción, un detalle topográfico o un sondaje  $S$ , lo situaremos midiendo con el compás de longitud la distancia  $Ss_1$ , y tendremos la medida reducida  $S's'_1$ , luego con el compás de latitud  $Ss$  y obtendremos  $S's'$ .



**352. Dibujo hidrográfico.**— Con el objeto de diferenciar netamente las características de la costa será necesario usar los *signos convencionales* para su dibujo; en general, la escala de la carta hará que sean imperceptibles ciertos detalles importantes. Cuando la escala del plano es grande y se ha determinado la cota de un gran número de puntos del terreno, éste será bien representado mediante las *curvas de nivel* definidas en (232).

Los planos horizontales cuya intersección con el terreno determinan las curvas de nivel son equidistantes y la distancia constante entre ellos, según la vertical, se llama *equidistancia real* =  $E$ . La *equidistancia gráfica*, representada por  $e$ , es la equidistancia real reducida a la escala del plano, si esta es  $\frac{1}{n}$

$$e = \frac{E}{n}.$$

En la elección de la equidistancia es necesario evitar que las curvas estén muy cerca, lo que traería confusión en los dibujos de pequeña escala; o muy separadas, lo que causaría indeterminación en los de grande escala. Prácticamente se ha encontrado que la relación más conveniente es la siguiente

$$e = \frac{E}{n} = 0.0005, \quad E = en = 0.0005 n.$$

En un plano cuya escala es  $\frac{1}{10000}$ ,  $E = 5$  ms., es decir que

las curvas de nivel deben ser las determinadas por planos horizontales cuya distancia sea 5 ms.

Para dar mayor relieve al dibujo y poder juzgar mejor la forma del terreno se emplea con o sin las curvas de nivel, los elementos de líneas de *maxima pendiente*.

Las líneas de mayor pendiente son normales a las curvas de nivel y sus proyecciones horizontales son perpendiculares a las proyecciones de estas curvas y serán rectas o curvas según que las líneas de nivel sean o nó paralelas entre si,

Cuando se hace uso de esta línea para representar el terreno, no se traza en toda su longitud, se les interrumpe en las curvas de nivel y ellas toman entonces el nombre de *ha-*

*churas*; haciendo variar su separación y espesor se obtiene un sombreado que representa exactamente la forma del terreno. La línea determinada por la interrupción de las hachuras es la curva de nivel.

La longitud de las hachuras depende del valor de la equidistancia gráfica adoptada y para hacer la diferencia de pendiente más fácilmente apreciable se ha convenido en darles un intervalo entre ellas de  $\frac{1}{4}$  de su longitud. También es regla, para dibujos más completos, espaciar las hachuras de manera que su ancho sea proporcional a la pendiente; después de numerosos ensayos se ha encontrado conveniente que la relación del negro al blanco  $\frac{2}{3}$  de la tangente de la pendiente, lo que se obtiene haciendo variar a la vez, el espesor de las hachuras (negro) el intervalo entre ellas (blanco).

En el plano hidrográfico suelen trazarse también las curvas de nivel que unen los puntos de igual profundidad, para esto debe tenerse en cuenta los signos convencionales. La *equidistancia real* que debe adoptarse depende de la variación de la profundidad y del objeto de la carta, en navegación se usan para la situación cuando hay niebla o para hacerlo con la sonda.

Para completar una carta marina, es necesario acompañar el dibujo con vistas de la costa, relativas a la recalada, fondeaderos, entradas a puerto, etc.

## CAPITULO XXXI

### MÉTODOS Y FORMULAS

#### FUNDAMENTALES PARA LA COMPENSACION DE LOS ERRORES

##### I. ERRORES

**353.** Cuando se mide una magnitud conocida, por grande que sea la práctica y cuidado del observador, se obtendrá un valor diferente del conocido, la diferencia será el error en la medida, para disminuir su valor se recurre al perfeccionamiento de los instrumentos de medida y a la aplicación de métodos que permiten su eliminación con una serie de medidas. Los errores pueden clasificarse en: materiales, accidentales y sistemáticos.

**354. Errores materiales.**—Proviene de la inhabilidad o poco cuidado del observador, se elimina haciendo la medida, por lo menos, dos veces y la discordancia entre ellas es tan grande que los denuncia. Estos errores no se consideran, solo se eliminan con observaciones cuidadosas.

**355. Errores sistemáticos.**—También llamados *regulares* o *constantes* porque es la condición que los caracteriza, se originan por causas de naturaleza física, por errores instrumentales o por la acción de la apreciación de los observadores que es lo que constituye el *error personal*.

Los errores instrumentales afectan las medidas efectuadas con aparatos mal contrastados: constantes estadimétricas y graduación de miras erróneas, la mala comparación de una cinta da un error que es proporcional al número de cintadas en la medida de una longitud; la imperfecta rectificación de un instrumento cuando el método de observación no elimina los errores debidos a esta causa.

Entre las causas físicas que producen estos errores tenemos: la refracción atmosférica, el magnetismo terrestre, la dilatación

de los cuerpos por el calor, la distribución de la luz, etc. Con métodos especiales se atenúan sus efectos: así; en la determinación de la latitud se elimina el error de refracción por la observación de astros a ambos lados del zenit, el efecto del calor sobre un trípode o pirámide desde la cual se mide un ángulo se elimina repitiendo la puntería sobre el punto inicial al finalizar la observación.

El error personal es en general muy pequeño e influye solo en observaciones de gran precisión, son debidos a la imperfecta apreciación de nuestros sentidos; así, la errónea bisección de una señal con el hilo del retículo, el error cometido en apreciar el instante del paso de una estrella en la determinación del tiempo, el intervalo entre los instantes en que se percibe y se transmite o registra las señales, etc.

Los errores constantes se presentan en el mismo sentido y mientras no varían las condiciones de las medidas van en aumento o totalizándose.

**356. Errores accidentales.** Cuando se hacen distintas medidas de una misma magnitud, estas no concuerdan aunque se hallan eliminado los errores constantes y sistemáticos y contrariamente a este último, los errores accidentales son variables y dentro de ciertos límites se producen en un sentido o el opuesto y sin regla alguna en su sucesión, son errores que dependen de la imperfección de nuestros sentidos y que no se pueden eliminar y solo disminuir con métodos especiales de compensación, a estos errores son los que se le aplica los métodos de cálculo que después se exponen.

## II. LEYES DE LOS ERRORES

### OBSERVACIONES DE IGUAL PRECISIÓN

**357. Media aritmética.—Errores reales.**—Si  $M$  es la medida exacta de una magnitud  $x$ , se tendría

$$x - M = 0.$$

Las medidas  $M_1, M_2 \dots M_n$  estarán afectadas de un error real  $\pm \Delta_1, \pm \Delta_2 \dots \pm \Delta_n$  respectivamente y se tendrá

$$\begin{aligned}x - M_1 &= \pm \Delta_1 \\x - M_2 &= \pm \Delta_2 \\&\vdots \\x - M_n &= \pm \Delta_n\end{aligned}$$

El principio que se establece para resolver este sistema de ecuaciones es tomar como valor de  $x$  la media  $x_0$  de los valores que dan las medidas

$$x_0 = \frac{\Sigma (M)}{n} = \frac{[M]}{n}$$

Sumando la (1)

$$x = \frac{[M]}{n} + \frac{[\pm \Delta]}{n} = x_0 + \frac{[\pm \Delta]}{n}$$

si la suma de los errores  $\pm \Delta$  es casi igual a cero, ellos pueden considerarse como *errores accidentales*; si su valor es más ó menos grande pertenecen a la categoría de los *errores sistemáticos*.

Cuando el número de observaciones es muy grande, los valores de  $+\Delta$  y  $-\Delta$  se anulan en su suma, el denominador  $n$  será muy grande y podrá considerarse

$$\frac{[\pm \Delta]}{n} = 0.$$

ó

$$x = x_0 = \frac{[M]}{n}$$

Es decir, que aumentando indefinidamente el número de las medidas relativas a una magnitud dada, la media aritmética tiende al verdadero valor de la magnitud.

Elevando al cuadrado y sumando el sistema (1)

$$\Sigma (x - M)^2 = \Sigma \Delta^2 = [\Delta \Delta]$$

la condición para que esta suma sea mínima es

$$\frac{d \Sigma}{d x} = 2 \Sigma (x - M) = 0$$

ó

$$\Sigma x = \Sigma M$$

y siendo

$$\Sigma x = n \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma M}{n}$$

Es decir que la *media aritmética hace mínimo el valor en la suma de los cuadrados de los errores reales*.

**358. Error medio aritmético.**—*Errores reales*.—Es la media aritmética de los errores reales, tomados en valor absoluto sin considerar el signo.

$$m = \pm \frac{[\Delta]}{n}$$

**359. Error cuadrático medio.**—*Errores reales*—La supresión de los signos para hallar el error medio aritmético es arbitraria, se considera que es mejor juzgar la exactitud de una observación hallando la media de la suma de los cuadrados de los errores y extrayendo su raíz cuadrada.

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\Delta \Delta]}{n}}$$

Esta elección está justificada por el hecho de que para una serie dada de observaciones, el *error cuadrático medio* o simplemente *error medio* es mayor que el error medio aritmético y además porque cada error en particular influye con su respectivo cuadrado, los errores mayores tienen mayor influencia que los pequeños.

También se puede definir el error medio  $\pm \mu$  como aquel que sustituido en lugar de los errores reales  $\pm \Delta$ , hace que la suma de  $n$  errores iguales a  $+\mu$  como  $-\mu$  sea equivalente a la suma de los errores reales  $[\Delta]$  se tendrá:

$$\pm \Delta_1 \pm \Delta_2 \dots \pm \Delta_n = [\Delta]$$

$$\pm \mu \pm \mu \dots \pm \mu = \pm n \mu = [\Delta]$$

elevando al cuadrado

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2 \pm 2\Delta_1\Delta_2 \pm 2\Delta_1\Delta_3 \dots = [\Delta \Delta]$$

$$\mu^2 + \mu^2 + \dots + \mu^2 \pm 2\mu\mu \pm 2\mu\mu \dots = n\mu^2$$

los productos  $\pm 2\Delta_1\Delta_2 \dots$  y  $2\mu\mu \dots$  se consideran que se anulan en la suma de un gran número de observaciones y

$$n \mu^2 = [\Delta \Delta]$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\Delta \Delta]}{n}}$$

*El error medio de una observación es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores reales dividida por el número de observaciones.*

**360. Media aritmética. Errores aparentes.**—Hasta ahora hemos tratado el caso de errores reales, esto es, cuando se conoce el verdadero valor de la magnitud observada. Ejem.: en la suma de los ángulos de un triángulo o polígono la diferencia de cierre es un error real; la diferencia de nivel para un mismo punto tomado como inicial y final; cuando con un instrumento de precisión se ha medido una longitud o ángulo y luego se vuelve a medir directamente o indirectamente con instrumentos de mucha menor precisión y por lo que pueden considerarse exactas las primeras medidas.

En general el valor exacto de la magnitud medida no se conoce y se atribuye a ella la media de las medidas efectuadas.

$$x_0 = \frac{\Sigma M}{n}$$

La diferencia entre la medida  $x_0$  y cada una de las medidas son los *errores residuos*  $v$ .

Tendremos para cada medida.

$$x_0 - v_1 = M_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_0 - v_n = M_n$$

sumando

$$n x_0 - \Sigma v = \Sigma M$$

teniendo en cuenta el valor de  $x_0$

$$\Sigma v = 0 ;$$

este resultado da el control de las operaciones hechas: *la suma de los errores residuos es igual a cero.*

### 361. Precisión de la media aritmética. Error medio. Errores aparentes.

Obtenidos los valores  $M_1, M_2 \dots M_n$  de una magnitud exacta  $x$ ; los errores reales son  $x - M_1 = \Delta_1, \dots$  siendo  $x_0$  la media aritmética de las medidas efectuadas, los errores residuos son  $x_0 - M_1 = v_1, \dots$

Se tendrá:

$$\begin{aligned} x_0 - v_1 &= M_1 = x - \Delta_1 \\ x_0 - v_2 &= M_2 = x - \Delta_2 \\ &\vdots \\ x_0 - v_n &= M_n = x - \Delta_n \end{aligned} \quad (1)$$

sumando y siendo  $\Sigma v = 0$

$$n x_0 = n x - [\Delta] \quad (2)$$

multiplicando por  $n$  la (1)

$$n x_0 - n v_1 = n x - n \Delta_1$$

sustituyendo  $n x_0$  por su valor (2)

$$n v_1 = n \Delta_1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) = (n-1) \Delta_1 - \Delta_2 - \dots - \Delta_n$$

elevando al cuadrado

$$n^2 v_1^2 = (n-1)^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2 - 2(n-1) \Delta_1 \Delta_2 \dots$$

análogamente

$$n^2 v_2^2 = \Delta_1^2 + (n-1) \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2 - 2(n-1) \Delta_1 \Delta_2 \dots$$

sumando y considerando que los productos dobles se eliminan entre sí

$$\begin{aligned} n^2 [v v] &= \{(n-1)^2 + (n-1)\} [\Delta \Delta] \\ [v v] &= \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{n} [\Delta \Delta] = \frac{n-1}{n} [\Delta \Delta] \end{aligned}$$

cundo se conocen los errores reales, el valor del error medio es

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\Delta \Delta]}{n}}$$

luego



$$[v v] = (n - 1) \mu^2$$

$$y \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n - 1}}$$

*El error medio de una observación es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores residuos dividida por el número de observaciones menos una.*

**362. Error medio de una función lineal.**— Hasta ahora se ha tratado el caso en que la medida directa obtenida por la observación es la magnitud que se quiere determinar. Interesa conocer el error medio cuando la magnitud no es medida directamente sino que es función lineal de una o varias medidas independientes,  $M_1, M_2 \dots M_n$  cuyos errores medios  $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$  se han determinado; sean  $a_1, a_2 \dots a_n$  constantes la función será

$$F = f(M_1, M_2 \dots M_n) = a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots a_n M_n$$

si  $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_n$  son los errores reales de  $M_1, M_2 \dots M_n$  y  $T$  el verdadero valor de la función  $F$ , llamando  $\Delta$  el error verdadero de  $F$ , será  $T = F + \Delta$  y

$$\Delta = T - F = a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2 + \dots a_n \Delta_n$$

$$y \quad \Delta^2 = a_1^2 \Delta_1^2 + a_2^2 \Delta_2^2 + \dots + 2 a_1 a_2 \Delta_1 \Delta_2 + \dots$$

la suma de los términos no cuadráticos se supone nula en un gran número de observaciones y

$$\Delta^2 = a_1^2 \Delta_1^2 + a_2^2 \Delta_2^2 + \dots a_n^2 \Delta_n^2$$

pasando al error medio aparente, por ser  $\Delta^2 = n \mu^2$

$$n \mu^2 = a_1^2 \mu_1^2 + a_2^2 \mu_2^2 + \dots + a_n^2 \mu_n^2$$

**363. Error medio de la media aritmética.**— En el caso particular de la observación de una misma magnitud, podemos poner el valor de la media aritmética como sigue:

$$x_0 = \frac{1}{n} M_1 + \frac{1}{n} M_2 + \dots \frac{1}{n} M_n$$

siendo  $\mu$  el error medio de cada observación, el error medio de la función será

$$\mu_0^2 = \frac{1}{n^2} \mu^2 + \frac{1}{n^2} \mu^2 + \dots + \frac{1}{n^2} \mu^2 = \frac{n}{n^2} \mu^2 = \frac{\mu}{n}$$

$$\mu_0 = \frac{\mu}{n} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

*El error medio de la media aritmética de varias medidas de una misma magnitud es igual al error medio de una observación dividido por la raíz cuadrada del número de observaciones.*

Esta fórmula muestra que repitiendo las observaciones un número suficiente de veces podemos hacer el error medio tan reducido como nos convenga, lo que es cierto en cuanto a los errores accidentales, pero en toda medida aparecen errores constantes y sistemáticos a veces tan pequeños que solo son descubiertos después que los errores accidentales han sido reducidos por muchas observaciones u otras veces son tan grandes que se ponen en evidencia con las primeras medidas efectuadas.

La repetición de las observaciones no elimina los errores sistemáticos mientras las condiciones en que ellas se hacen no sean modificadas para que queden invertidos los indicios del error sistemático, en cambio reducen los errores accidentales en la proporción  $\sqrt{n}$ ; al principio el cambio de una unidad en  $n$  produce una variación sensible de  $\sqrt{n}$ , luego la variación correspondiente es muy lenta. El efecto de un número suficiente de repeticiones será el de disminuir los errores accidentales y dejar solo los sistemáticos; llegando a este límite es inútil aumentar el número de observaciones.

**364. Error probable.**—Es el error para el cual la probabilidad de que no se sobrepase es  $1/2$ , es decir, el que en una determinada clase de observaciones tiene igual número de probabilidades de no ser alcanzado o de ser sobrepasado. Se demuestra en la teoría de las probabilidades que el error probable es aproximadamente  $1/2$  o mas exactamente 0.6745 del error medio.

El error probable  $r$  de una observación es

$$r = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

y el de la media aritmética de  $n$  observaciones

$$r_0 = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[v v]}{n(n-1)}}$$

**565. Error máximo o tolerancia.**—Puede suceder que por la acumulación de errores accidentales el error de una observación de la serie sea desproporcionado; la probabilidad para que esta acumulación se verifique es tan pequeña que solo 3 veces en 1000 casos se sobrepasa el triple del error medio; este valor es el que se ha fijado como límite de tolerancia para aceptar el resultado de una observación.

$$t = 3 \mu$$

La observación cuyo residuo sobrepasa este límite se rechaza.

**366. Error medio de una función cualquiera.**—Sea la función

$$F = f(M_1, M_2, M_n)$$

siendo T su verdadero valor cuando se reemplaza  $M_1, M_2, M_n$  por sus valores exactos

$$M_1 + \Delta_1 = M_1 + dM_1$$

$$M_2 + \Delta_2 = M_2 + dM_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$M_n + \Delta_n = M_n + dM_n$$

Será  $T = f(M_1 + dM_1, M_2 + dM_2, \dots, M_n + dM_n)$  desarrollando en serie y no considerando los términos de grado superior al 1°

$$T = f(M_1, M_2, \dots, M_n) + \frac{df}{dM_1} dM_1 + \dots + \frac{df}{dM_n} dM_n$$

el error será

$$\Delta = \frac{df}{dM_1} dM_1 + \frac{df}{dM_2} dM_2 + \dots + \frac{df}{dM_n} dM_n$$

esta ecuación se identifica con la obtenida al tratar la función lineal § 362,  $\Delta$  se reemplaza por  $\mu_F$ ;

$$dM_1, dM_2, \dots \text{ por } \mu_1, \mu_2, \dots$$

$$(\mu_F)^2 = \left(\frac{df}{dM_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{df}{dM_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots$$

**367. Suma o diferencia de cantidades observadas.**—Para

$$F = \pm M_1 \pm M_2 \pm \dots$$

donde se supone cada medida afectada de los errores medios  $\pm \mu_1, \pm \mu_2 \dots$  siendo

$$\frac{dF}{dM_1} = \frac{dF}{dM_2} = \dots = \pm 1$$

$$\mu_F^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2$$

si además

$$\mu_1 = \mu_2 \dots = \mu_n$$

$$\mu_F^2 = n \mu^2$$

y

$$\mu_F = \mu \sqrt{n}$$

*El error medio de la función es proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones que se combinan.*

**368. Múltiplo de cantidades observadas.**—Para  $F = a_1 M_1$  en que  $a_1$  es un factor constante

$$\frac{dF}{dM_1} = a_1$$

y

$$\mu_F^2 = a_1^2 \mu_1^2$$

**369. Producto de cantidades observadas.**—Para

$$F = M_1 M_2$$

$$\frac{dF}{dM_1} = M_2, \quad \frac{dF}{dM_2} = M_1$$

y

$$\mu_F^2 = M_2^2 \mu_1^2 + M_1^2 \mu_2^2$$

**370. Fórmula logarítmica.**—Si la función tiene la forma

$$F = \frac{M_1 \cdot M_2 \dots M_r}{M_{r+1} \cdot M_{r+2} \dots M_n}$$

tomando logaritmos

$$\log F = \log M_1 + \log M_2 + \dots + \log M_r -$$

$$- (\log M_{r+1} + \dots + \log M_n)$$

hallando la diferencia total en la hipótesis de que a las peque-

nas variaciones de  $F$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  .... corresponden los respectivos errores medios

$$\pm \mu_1, \dots, \pm \mu_n$$

$$\pm \frac{d \log F}{d F} \mu_F = \pm \frac{d \log M_1}{d M_1} \mu_1 + \dots - \left( \frac{d \log M_r + 1}{d M_r + 1} + \dots \right)$$

Indicando con:  $\delta, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  la diferencia entre los logaritmos de  $F$  y  $F + 1$ ,  $M_1$  y  $M_1 + 1$ , etc.

Se puede admitir que los cocientes diferenciales son respectivamente iguales a la variación por unidad de los correspondientes logaritmos y se tendrá

$$\pm \delta \mu_F = \pm \delta_1 \mu_1 \pm \delta_2 \mu_2 \pm \dots \pm \delta_n \mu_n$$

poniendo

$$\frac{\delta_1}{\delta} = d_1, \quad \frac{\delta_2}{\delta} = d_2 \dots \frac{\delta_n}{\delta} = d_n$$

se obtiene

$$\mu_F = \pm d_1 \mu_1 \pm \dots \pm d_n \mu_n$$

y

$$\mu_F^2 = (d_1 \mu_1)^2 + \dots + (d_n \mu_n)^2$$

En este cálculo debiera emplearse logaritmos neperianos pero como el módulo de cambio de base entra en los dos miembros como factor, puede hacerse el cálculo con logaritmos decimales directamente.

Cuando la diferencia tabular  $D$  está dada en las tablas para  $1''$ ,  $10''$ ,  $15''$  o  $60''$  el valor de  $O$  es respectivamente

$$\frac{\delta}{1}, \frac{\delta}{10}, \frac{\delta}{15} \text{ ó } \frac{\delta}{60}.$$

### III. OBSERVACIONES DE DISTINTA PRECISIÓN

**371. Peso.**—Si una magnitud  $M$  es medida directamente  $n$  veces de manera que los resultados  $M_1, M_2 \dots M_n$  tienen diversa exactitud y están afectados de errores medios  $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$ ; el valor más probable de la magnitud debe determinarse de manera que se aproxime más a la medida parcial que ofrece mayor exactitud. La corrección  $v$  que se obtenga para cada

medida debe ser proporcional a sus errores medios respectivos, esto es, debe ser más pequeña para aquellos resultados en que los errores medios son más pequeños y al determinarse el valor más probable  $x_0$  debe obtenerse errores residuos que satisfagan la relación

$$v_1 : v_2 \dots v_n = \mu_1 : \mu_2 \dots \mu_n.$$

Supongamos que tenemos  $n$  observaciones.  $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$  de la misma exactitud  $\mu$  y sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  los errores residuos respectivos y que estas observaciones den el mismo resultado probable  $x_0$  que se obtuvo con las observaciones de distinta precisión  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .

$$v_1 : v_1 = \mu : \mu_1 \quad \text{O} \quad v_1 = \frac{\mu}{\mu_1} v_1$$

$$v_2 : v_2 = \mu : \mu_2 \quad v_2 = \frac{\mu}{\mu_2} v_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_n : v_n = \mu : \mu_n \quad v_n = \frac{\mu}{\mu_n} v_n$$

Siendo las observaciones  $M'$  de la misma exactitud, el valor más probable es aquel que hace mínimo la suma de los cuadrados de los errores  $v'$  por lo que debe determinarse de manera que

$$[v'v'] = \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 v_1^2 + \left(\frac{\mu}{\mu_2}\right)^2 v_2^2 + \dots + \left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)^2 v_n^2 = \text{mín.}$$

los cocientes

$$\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 = p_1, \left(\frac{\mu}{\mu_2}\right)^2 = p_2, \left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)^2 = p_n$$

se llaman *peso de las observaciones* y se deduce que entre el peso  $p$  y su error medio existe en general la relación

$$p = \frac{k}{\mu^2}$$

en la que  $k$  es una constante denominada *constante de peso*.

**372. Relación entre el peso y el error medio de la media.**  
Poniendo

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}, \quad \mu_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}} \dots \mu_n = \frac{\mu}{\sqrt{p_n}}$$

y comparando con la expresión del error medio de la media aritmética.

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

Se deduce que los pesos  $p_1, p_2, \dots$  expresan el número de observaciones de la misma exactitud necesarias para que el error medio de su medida sea respectivamente igual al error medio de la observación correspondiente de diversa exactitud.

Además se tiene:

$$v_1 = v_1 \sqrt{p}, \dots v_n = v_n \sqrt{p}$$

luego: multiplicando los errores de observación de una magnitud por la raíz cuadrada de los pesos correspondientes se transforman sus errores en otros referidos a la misma unidad de peso.

**373. Unidad de peso.**—Si se considera  $p_1 = p_2 = \dots = 1$ . Se tendrá  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$ , donde  $\mu$  es el error medio correspondiente al peso 1 ó el error medio de la unidad de peso.

La constante de peso tendrá el valor

$$k = \mu^2$$

es decir, que para una observación cuyo error medio es  $\pm \mu$  y  $p = 1$ , la constante  $k$  no es arbitraria sino que en tal caso  $k = \mu^2$ .

Una vez establecido el valor de la unidad de peso se obtiene el valor de la constante

$$k = p \mu^2$$

también

$$p_1 : p_2 \dots = \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right)^2 : \left( \frac{\mu}{\mu_2} \right)^2 \dots$$

o sea

$$p_1 : p_2 \dots = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} \dots$$

esto es, *que los pesos son inversamente proporcionales al cuadrado de los errores medios.*

**374. Valor de la media aritmética ponderada.** — Introduciendo los pesos  $p$  en la condición de mínimo § 371...

$$[v' v'] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots = [p v v] = \text{mim}$$

Esto es que *si las observaciones son de diversa exactitud es necesario hacer mínima la suma de los productos de los pesos por el cuadrado de los errores respectivos.*

Hallando la derivada e igualando a cero

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots + p_n v_n = 0$$

considerando que  $x_0$  sea la media buscada y  $M_1, M_2 \dots M_n$  las observaciones, los errores residuos serán

$$v_1 = x_0 - M_1$$

$$v_2 = x_0 - M_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$v_n = x_0 - M_n$$

reemplazados en la anterior

$$x_0 = \frac{p_1 M_1 + p_2 M_2 + \dots + p_n M_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[p M]}{[p]}$$

**375. Error medio de la unidad de peso, de la media ponderada y error medio de cada observación.** — Si  $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_n$  son los errores verdaderos de las observaciones  $M_1, M_2 \dots M_n$  de peso  $v_1, p_2 \dots p_n$ ; los errores referidos a la misma unidad de peso serán:  $v_1 \sqrt{p_1}, v_2 \sqrt{p_2} \dots v_n \sqrt{p_n}$  y el error medio de la unidad de peso

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p \Delta^2]}{n}}$$

Si  $x_0$  es la media ponderada cuya magnitud exacta es  $x$  y  $\mu_0$  el error medio de esa media tal que  $x_0 = x + \mu_0$ , se puede establecer

$$x_0 - v_1 = M_1 = x - \Delta_1$$

$$x_0 - v_2 = M_2 = x - \Delta_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_0 - v_n = M_n = x - \Delta_n$$



$$\begin{array}{l} \Delta_1 = v_1 - \mu_0 \\ \Delta_2 = v_2 - \mu_0 \\ \vdots \\ \Delta_n = v_n - \mu_0 \end{array}$$

Los errores  $v$  y  $\Delta$  pertenecen a un sistema de observaciones de distinta exactitud y para reducirlo a un sistema de peso único y de error medio  $\mu$  habrá que multiplicar los errores por la raíz cuadrada de los pesos correspondientes

$$\begin{array}{l} \Delta_1 \sqrt{p_1} = v_1 \sqrt{p_1} - \mu_0 \sqrt{p_1} \\ \vdots \\ \Delta_n \sqrt{p_n} = v_n \sqrt{p_n} - \mu_0 \sqrt{p_n} \end{array}$$

elevando al cuadrado y sumando

$$[p \Delta \Delta] = [p v v] + [p] \mu_0^2 - 2 [p \Delta] \mu_0$$

como

$$[p \Delta] = 0$$

$$[p \Delta \Delta] = [p v v] + [p] \mu_0^2$$

Si en la media ponderada se considera las observaciones parciales  $M_1, M_2, \dots, M_n$  como la media de  $p_1, p_2, \dots, p_n$  observaciones de igual error medio  $\mu$ , el error de la media ponderada como el de la media simple será

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$

$$\text{ó} \quad [p] \mu_0^2 = \mu^2$$

sustituyendo esta en la anterior

$$[p \Delta \Delta] = [p v v] + \mu^2$$

y teniéndose

$$[p \Delta \Delta] = n \mu^2$$

$$n \mu^2 = [p v v] + \mu^2$$

$$\text{ó} \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n - 1}}$$

que es el *error medio de la unidad de peso*

$$\text{y} \quad \mu_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{(n - 1) [p]}}$$

es el *error medio de la media ponderada*.

De las relaciones antes establecidas

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}, \dots \mu_n = \frac{\mu}{\sqrt{p_n}}$$

se obtiene el *error medio de una observación de peso h*.

$$\mu_h = \pm \frac{\mu}{\sqrt{p_h}} = \pm \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{(n-1)p_h}}$$

### 376. Propagación de los pesos de las observaciones.—

Como los pesos son inversamente proporcionales a los cuadrados de los errores medios respectivos, tendremos reemplazando  $\mu_n^2$  por  $\frac{1}{p_n}$  en las ecuaciones de errores de las funciones siguientes

$$F = \pm M_1 \pm M_2$$

$$F = a_1 M_1 \dots$$

$$F = \pm a M_1 \pm a M_2 \dots$$

$$F = f(M_1, M_2 \dots)$$

$$F = M_1 M_2$$

las siguientes expresiones para los pesos

$$\frac{1}{p_v} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \dots$$

$$\frac{1}{p_v} = \frac{a_1^2}{p_1}$$

$$\frac{1}{p_v} = \frac{a_1^2}{p_1} + \frac{a_2^2}{p_2} + \dots$$

$$\frac{1}{p_v} = \left( \frac{df}{dM_1} \right)^2 \frac{1}{p_1} + \left( \frac{df}{dM_2} \right)^2 \frac{1}{p_2}$$

$$\frac{1}{p_v} = \frac{M_2^2}{p_1} + \frac{M_1^2}{p_2}$$

**377. Elección de pesos.**—No es posible dar reglas generales para establecer el peso de las observaciones.

Cuando se trata de resultados obtenidos de la media aritmética de diversas observaciones hechas con la misma precisión,

el número de medidas de un mismo grupo puede considerarse como el peso de cada uno de los resultados.

Así, un ángulo medido con cuatro series de repeticiones en número 16, 25, 18 y 12 para cada serie, estos números pueden representar el peso.

Si se ha determinado el error medio de cada una de las series, puede considerarse como peso de las mismas la recíproca del cuadrado de los errores medios correspondientes. Así, una longitud medida con tres series de 10 medidas cada una y errores medios de la media respectiva de  $\pm 0.008$ ,  $\pm 0.010$ ,  $\pm 0.056$ , los pesos pueden deducirse de la relación

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{(0.008)^2} : \frac{1}{(0.010)^2} : \frac{1}{(0.056)^2}$$

En las medidas de longitud la unidad de peso es el peso de una medida de 100 ms. de longitud o en otros términos, los pesos son inversamente proporcionales a la longitud de las distancias medidas.

En las nivelaciones la unidad de peso corresponde al peso de una nivelación de 1 kilómetro o los pesos son inversamente proporcionales a la longitud de las líneas niveladas.

Finalmente puede hacerse una asignación arbitraria de pesos de acuerdo con la práctica del calculador y considerando las características de las observaciones, sea por el método de medida empleado, por el instrumento usado, por la habilidad del operador y por las condiciones físicas de la observación; esta asignación de pesos se basa en resultados experimentales y en el conocimiento de todas las circunstancias que puedan influir en las observaciones.

#### IV. COMPENSACIÓN DE OBSERVACIONES INDIRECTAS

**378. Determinación del valor probable.** — Hemos visto que la media aritmética es el valor más probable de una cantidad que ha sido medida directamente; examinaremos el caso en que los resultados que se obtienen de la medida de una magnitud representan una función de la que las incógnitas a determinar pueden considerarse como variables.

Si  $L_1, \dots, L_n$  es el verdadero valor de una serie de cantidades observadas  $l_1, \dots, l_n$  en número  $n$ ;  $x, y, z, \dots$ , las incógnitas a determinar en número  $m$ ;  $a_1, b_1, \dots$ , constantes dadas por la teoría de cada observación que constituyen las ecuaciones que ligán las incógnitas con las cantidades medidas, tendremos:

$$L_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots$$

$$L_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots$$

$$\vdots$$

$$L_n = a_n x + b_n y + c_n z + \dots$$

Si el número de ecuaciones  $n$  es igual al número de incógnitas  $m$ , no habrá medio para calcular la exactitud a que se ha alcanzado en la determinación de las incógnitas, pero si  $n > m$ , después de haber calculado las incógnitas empleando  $m$  ecuaciones, sus valores sustituidos en las restantes que no han entrado en su cálculo,  $n - m$  ecuaciones, no serán, por lo general, satisfechas por lo que deberá determinarse las incógnitas de manera que respondan en lo más posible a las  $n$  ecuaciones.

Sean  $l_1, l_2 \dots l_n$  los valores observados y  $v_1, v_2 \dots v_n$  sus errores que llenan la condición.

$$l_1 + v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$

$$\vdots$$

$$l_n + v_n = a_n x + b_n y + c_n z$$

por el principio fundamental del método de los cuadrados mínimos los valores de  $v$  deben determinarse de manera que la suma  $[v v]$  sea un mínimo; los errores medios que así se obtendrán para las incógnitas serán los mínimos y su peso el máximo. Cada una de las ecuaciones anteriores se llaman *ecuaciones de errores* y puede establecerse

$$v_1 = a_1 x + b_1 y \dots - l_1$$

$$v_2 = a_2 x + b_2 y \dots - l_2$$

$$\vdots$$

la condición de mínimo

$$[v v] = v_1^2 + v_2^2 + \dots v_n^2 = \min$$

será:

$$[v v] = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots l_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots l_2)^2 + \dots = \min.$$

o

$$\begin{aligned} [v v] = & a_1^2 x^2 + 2 a_1 b_1 x y + 2 a_1 c_1 x z + \dots - 2 a_1 l_1 x + \dots \\ & + a_2^2 x^2 + 2 a_2 b_2 x y + 2 a_2 c_2 x z + \dots - 2 a_2 l_2 x + \dots \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & + b_1^2 y^2 + 2 b_1 c_1 y z + \dots - 2 b_1 l_1 y - l_1^2 \\ & + b_2^2 y^2 + 2 b_2 c_2 y z + \dots - 2 b_2 l_2 y - l_2^2 \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

o sea

$$[v v] = [a a] x^2 + 2 [a b] x y + 2 [a c] x z + \dots - 2 [a l] x + [b b] y^2 + 2 [b c] y z + \dots - 2 [b l] y - [l l] = \min.$$

luego

$$\frac{d[v v]}{d x} = 2 [a a] x + 2 [a b] y + 2 [a c] z + \dots - 2 [a l] = 0$$

$$\frac{d[v v]}{d y} = 2 [a b] x + 2 [b b] y + 2 [b c] z + \dots - 2 [b l] = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

de las que se obtienen las llamadas *ecuaciones normales*

$$[a a] x + [a b] y + [a c] z + \dots - [a l] = 0$$

$$[a b] x + [b b] y + [b c] z + \dots - [b l] = 0$$

que también se expresan con la notación siguiente

$$[a v] = 0 \quad \quad [b v] = 0.$$

**379. Comprobación de la formación de las ecuaciones normales.**—Haciendo las sumas

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + \dots - l_1 &= s_1 \\ a_2 + b_2 + \dots - l_2 &= s_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (1)$$

Multiplicándolas respectivamente por  $a_1, a_2, \dots$  y sumándolas se obtiene

$$[a s] = [a a] + [a b] + [a c] + \dots$$

del mismo modo multiplicando por  $b_1, b_2, \dots, l_1, l_2, \dots$

$$\begin{aligned} [bs] &= [ab] + [bb] + [bc] + \dots \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ -[ls] &= -[al] - [bl] - [cl] + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

los siguientes miembros son los coeficientes de las ecuaciones normales cuyas sumas son  $[as]$ ,  $[bs]$ , ... estos valores pueden deducirse directamente de la (1)

$$\begin{aligned} a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots &= [as] \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ -l_1 s_1 - l_2 s_2 - \dots &= [ls] \end{aligned} \quad (3)$$

los valores así deducidos deben ser iguales a los obtenidos en (2); la ecuación de la suma da lugar a una nueva ecuación normal

$$[as]x + [bs]y + \dots [ls] = 0$$

**380. Resolución de las ecuaciones normales.** — Obtenidas las ecuaciones normales, su resolución puede hacerse por los diferentes métodos algebraicos conocidos para la solución de sistemas de ecuaciones con varias incógnitas o con la aplicación de determinantes.

Aplicaremos el método de sustitución al caso de tener un sistema de 3 incógnitas.

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z &= [al] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z &= [bl] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z &= [cl] \end{aligned} \quad (1)$$

de la primera

$$x = \frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[al]}{[aa]} \quad (2)$$

sustituyendo en la 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> de (1)

$$\begin{aligned} [bb.1]y + [bc.1]z &= [bl.1] \\ [bc.1]y + [cc.1]z &= [cl.1] \end{aligned} \quad (3)$$

Se emplea la notación de Gauss, el número (1) indica que la ecuación ha sido reducida una vez, los valores de los coeficientes son

$$\begin{aligned}
 [b b.1] &= [b b] - \frac{[a b]}{[a a]} [a. b] \\
 [b c.1] &= [b c] - \frac{[a b]}{[a a]} [a. c] \\
 [b l.1] &= [b l] - \frac{[a b]}{[a a]} [a. l] \\
 [c c.1] &= [c c] - \frac{[a c]}{[a a]} [a. c] \\
 [c l.1] &= [c l] - \frac{[a c]}{[a a]} [a. l]
 \end{aligned} \tag{4}$$

de la 1.<sup>a</sup> (3) se obtiene

$$y = - \frac{[b c.1]}{[b b.1]} z + \frac{[b l.1]}{[b b.1]} \tag{5}$$

que sustituido en la 2.<sup>a</sup> da

$$z = \frac{[c l.2]}{[c c.2]} \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned}
 [c c.2] &= [c c.1] - \frac{[b c.1]}{[b b.1]} [b c.1] \\
 [c l.2] &= [c l.1] - \frac{[b c.1]}{[b b.1]} [b l.1]
 \end{aligned} \tag{7}$$

Reemplazando en la (5) el valor  $z$  (6) se obtiene  $y$ , luego se halla  $x$  en la (2).

Las primeras ecuaciones de los grupos sucesivos son

$$\begin{aligned}
 [a a] x + [a b] y + [a c] z &= [a l] \\
 [b b.1] y + [b c.1] z &= [b l.1] \\
 [c c.2] z &= [c l.2]
 \end{aligned} \tag{8}$$

estas son las llamadas ecuaciones normales reducidas; de ellas se obtiene

$$\begin{aligned}
 x + \frac{[a b]}{[a a]} y + \frac{[a c]}{[a a]} z &= \frac{[a l]}{[a a]} \\
 y + \frac{[b c.1]}{[b b.1]} z &= \frac{[b l.1]}{[b b.1]} \\
 z &= \frac{[c l.2]}{[c c.2]}
 \end{aligned} \tag{9}$$

**381. Error medio de una observación.** — Los valores de las incógnitas obtenidos de las ecuaciones normales se reemplazan en las ecuaciones de los errores y se obtienen  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ; hallando  $[vv]$ , con la fórmula siguiente se halla el error medio de la observación

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-m}}$$

siendo  $n - m$  el número de observaciones superfluas.

**382. Error medio de cada incógnita. Coeficiente de peso.** — Las siguientes relaciones dan el valor de los errores medios de cada incógnita.

$$\mu_x = \pm \mu \sqrt{A_{11}}, \mu_y = \pm \mu \sqrt{A_{22}}, \mu_z = \pm \mu \sqrt{A_{33}}$$

Las cantidades  $A_{11}, A_{22}, A_{33} \dots$  son los coeficientes de las incógnitas en la última ecuación normal reducida para hallar su valor y se llaman *coeficientes de peso*. Para la determinación de estos coeficientes se forman las *ecuaciones de peso*, que se resuelven análogamente a las normales y que se obtienen reemplazando en estas últimas los términos conocidos  $[a1], [b1] \dots$  por 1, 0, y 0; para hallar el valor de  $A_{11}$ , el sistema será:

$$\begin{aligned} [aa] A_{11} + [ab] A_{12} + [ac] A_{13} &= 1 \\ [ab] A_{11} + [bb] A_{12} + [bc] A_{13} &= 0 \\ [ac] A_{11} + [bc] A_{12} + [cc] A_{13} &= 0 \end{aligned}$$

reemplazando por 0, 1, 0 los términos conocidos se obtendrá  $A_{22}$  y el sistema será

$$\begin{aligned} [aa] A_{21} + [ab] A_{22} + [ac] A_{23} &= 0 \\ [ab] A_{21} + [bb] A_{22} + [bc] A_{23} &= 1 \\ [ac] A_{21} + [bc] A_{22} + [cc] A_{23} &= 0 \end{aligned}$$

existe la igualdad entre los coeficientes:

$$A_{12} = A_{21}, A_{13} = A_{31}, A_{23} = A_{32}.$$

ellos son el *complemento algebraico* de términos del mismo puesto en la determinante.

**383. Observaciones de distinto peso.** — Si las ecuaciones tienen distinto peso,  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , para reducirlas a la misma



unidad de peso se multiplican por la raíz cuadrada del peso, tendremos:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{p_1} a_1 x + \sqrt{p_1} b_1 y + \dots & - & \sqrt{p_1} l_1 = \sqrt{p_1} v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sqrt{p_n} a_n x + \sqrt{p_n} b_n y + \dots & - & \sqrt{p_n} l_n = \sqrt{p_n} v_n \end{array}$$

La condición es  $[p v v] = \min.$  y análogamente se obtendrían las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} [p a a] x + [p a b] y + \dots & - & [p a l] = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ [p a b] x + [p b b] y + \dots & - & [p b l] = 0 \end{array}$$

y en general

$$[p a v] = 0 \quad [p b v] = 0$$

Estas ecuaciones se resuelven del modo antes indicado para las ecuaciones normales del mismo peso y admiten idéntica comprobación en su formación.

Obtenidos los valores de las incógnitas, se forma la suma  $[p v v]$  y se obtiene el error medio de la unidad de peso

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n - m}}$$

Para determinar el error medio de cada incógnita se forman las ecuaciones de peso

$$\begin{array}{l} [p a a] A_{11} + [p a b] A_{12} + [p a c] A_{13} = 1 \\ [p a b] A_{11} + [p b b] A_{12} + [p b c] A_{13} = 0 \\ [p a c] A_{11} + [p b c] A_{12} + [p c c] A_{13} = 0 \end{array}$$

obtenido el valor de los coeficientes de peso se determina el error medio de cada incógnita

$$\mu x = \pm \mu \sqrt{A_{11}}, \quad \mu y = \pm \mu \sqrt{A_{22}} \dots$$

## V. COMPENSACION DE OBSERVACIONES CON CONDICION

**384. Solución general.**—Supongamos que se han determinado mediante observaciones independientes los valores de  $n$  cantidades  $M_1, M_2, \dots, M_n$  que deben satisfacer las  $r$  ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 X_1 + \dots a_n X_n &= 0 \\ b_0 + b_1 X_1 + \dots b_n X_n &= 0 \\ \vdots & \\ q_0 + q_1 X_1 + \dots q_n X_n &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

al reemplazar  $X_1, X_2 \dots X_n$  por las cantidades obtenidas de la observación se hallará divergencias  $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$  y la (1) se convertirá en

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 M_1 + \dots a_n M_n + \omega_1 &= 0 \\ b_0 + b_1 M_1 + \dots b_n M_n + \omega_2 &= 0 \\ \vdots & \\ q_0 + q_1 M_1 + \dots q_n M_n + \omega_n &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Si a cada valor de  $M$  se le aplica la respectiva corrección  $v$  se eliminarán las divergencias  $\omega$  y se tendrá:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 (M_1 + v_1) + \dots a_n (M_n + v_n) &= 0 \\ b_0 + b_1 (M_1 + v_1) + \dots b_n (M_n + v_n) &= 0 \\ \vdots & \end{aligned} \quad (3)$$

restando de las ecuaciones (2) las correspondientes de la (3) se obtiene

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_n v_n + \omega_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots b_n v_n + \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

que se denominan *ecuaciones de error de las observaciones con condición*. Las divergencias  $\omega$  se obtienen de la diferencia, con su signo, entre el resultado de las observaciones y el correspondiente valor teórico.

Los valores mas convenientes para  $v_1, v_2 \dots v_n$  son aquellos que satisfacen las ecuaciones (4) y la siguiente

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \text{mim.} \quad (5)$$

estas condiciones se llenan multiplicando el sistema (4) por coeficientes por ahora indeterminados  $-2 k_1, -2 k_2 \dots -2 k_n$  tales que sumando esos productos con  $[vv]$  hagan minima la ecuación resultante  $R$ , esto es, suponiendo para mayor claridad que sean 3 las ecuaciones de condición

$$\begin{aligned}
 R &= v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \\
 &- 2 k_1 (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) \\
 &- 2 k_2 (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n) \\
 &- 2 k_3 (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = \text{mín.}
 \end{aligned}$$

esta condición se establece mediante las ecuaciones

$$\frac{dR}{dv_1} = 2 v_1 - 2 k_1 a_1 - 2 k_2 b_1 - 2 k_3 c_1 = 0$$

$$\frac{dR}{dv_2} = 2 v_2 - 2 k_1 a_2 - 2 k_2 b_2 - 2 k_3 c_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \frac{dR}{dv_n} &= 2 v_n - 2 k_1 a_n - 2 k_2 b_n - 2 k_3 c_n = 0
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 v_1 &= k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 \\
 v_2 &= k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2 \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 v_n &= k_1 a_n + k_2 b_n + k_3 c_n
 \end{aligned} \tag{6}$$

Estas ecuaciones con la (4) determinan las correcciones  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y los coeficientes  $k_1, k_2, k_3$ : a estos coeficientes se dá el nombre de *correlativos* y al sistema (6) el de *ecuaciones correlativas*.

Substituyendo en la (4) los valores para  $v$  obtenidos con la (6) se obtiene para la primera

$$\begin{aligned}
 &a_1 a_1 k_1 + a_1 b_1 k_2 + a_1 c_1 k_3 \\
 &+ a_2 a_2 k_1 + a_2 b_2 k_2 + a_2 c_2 k_3 \\
 &+ a_3 a_3 k_1 + a_3 b_3 k_2 + a_3 c_3 k_3 + \omega_1 = 0
 \end{aligned}$$

procediendo análogamente para las demás se obtienen las siguientes ecuaciones normales que sirven para determinar los coeficientes correlativos

$$\begin{aligned}
 |a a| k_1 + |a b| k_2 + |a c| k_3 + \omega_1 &= 0 \\
 |a b| k_1 + |b b| k_2 + |b c| k_3 + \omega_2 &= 0 \\
 |a c| k_1 + |b c| k_2 + |c c| k_3 + \omega_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

Para obtener un control de los cálculos se multiplica cada ecuación (6) por su respectiva  $v$  y se suman los productos: se obtendrá:

$$[v v] = [a v] k_1 + [b v] k_2 + [c v] k_3 \quad (8)$$

y además multiplicando las ecuaciones (4) respectivamente por  $k_1, k_2, k_3$  y sumando se obtiene:

$$[a v] k_1 + [b v] k_2 + [c v] k_3 + [\omega k] = 0 \quad (9)$$

De (8) y (9)

$$[v v] = -[\omega k]$$

El error medio por unidad de peso se obtiene con la fórmula

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{v}}$$

en que  $v$  es el número de ecuaciones de condición.

**385. Observaciones de diversa precisión.** — Si a las observaciones corresponden los pesos:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , la condición del mismo será:

$$[p v v] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + \quad (5')$$

siguiendo el procedimiento indicado se tendrá el sistema:

$$v_1 = \frac{1}{p_1} (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3)$$

$$v_2 = \frac{1}{p_2} (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3)$$

$$v_3 = \frac{1}{p_3} (a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3)$$

y las ecuaciones normales

$$\left[ \frac{a a}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{a b}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{a c}{p} \right] k_3 + \omega_1 = 0$$

$$\left[ \frac{a b}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{b b}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{b c}{p} \right] k_3 + \omega_2 = 0$$

$$\left[ \frac{a c}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{b c}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{c c}{p} \right] k_3 + \omega_3 = 0$$

el control del cálculo está dado por la relación

$$[p v v] = -[\omega k] \quad (10')$$

y el error medio de la unidad de peso

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{r}}$$

386. Caso en que la ecuacion de condicion es una funcion cualquiera.—Con el procedimiento ya indicado, empleando el desarrollo en serie de Taylor y no teniendo en cuenta las 2ª potencias y las superiores de  $v$ , se transforman en el caso de una función lineal.

Si las ecuaciones de condición son

$$\begin{aligned} F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) &= 0 \\ F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1)$$

reemplazamos  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , que son los valores compensados por los observados  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , con su corrección respectiva  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y

$$\begin{aligned} F_1(M_1 + v_1, M_2 + v_2, \dots, M_n + v_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_2(M_1 + v_1, M_2 + v_2, \dots, M_n + v_n) &= 0 \end{aligned}$$

desarrollando en serie

$$\begin{aligned} F_1(M_1, M_2, \dots, M_n) + \frac{dF_1}{dM_1}v_1 + \frac{dF_1}{dM_2}v_2 + \dots \frac{dF_1}{dM_n}v_n &= 0 \\ F_2(M_1, M_2, \dots, M_n) + \frac{dF_2}{dM_1}v_1 + \frac{dF_2}{dM_2}v_2 + \dots \frac{dF_2}{dM_n}v_n &= 0 \end{aligned}$$

haciendo:

$$F_1(M_1, M_2, \dots, M_n) = \omega_1, \quad F_2(M_1, M_2, \dots, M_n) = \omega_2, \dots$$

$$\frac{dF_1}{dM_1} = a_1, \dots, \frac{dF_1}{dM_n} = a_n$$

$$\frac{dF_2}{dM_1} = b_1, \dots, \frac{dF_2}{dM_n} = b_n$$

obtenemos las ecuaciones normales

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + \omega_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + \omega_2 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

que se resuelven según el procedimiento indicado

## VI. CALCULOS DE COMPENSACIÓN

### TRIANGULACIONES

**387 Problema general.**—El número de observaciones angulares en cada vértice de triangulación es casi siempre superior al estrictamente necesario para determinar el valor de los ángulos concurrentes en un vértice; el número de los ángulos medidos en varias estaciones es también superior a aquellos necesarios para deducir unas después de otras, las longitudes de los lados de los triángulos y finalmente es frecuente que además de la base de partida se tenga otra de llegada; a estas observaciones donde las hay en número superfluo puede aplicárseles los métodos de cálculo que hemos visto.

En el cuadrilátero  $A B C D$ , con la base  $A B$  determinada, bastarán los ángulos  $B A C$  y  $C A B$  para determinar la posición del punto  $C$ , es decir, la longitud de  $A C$  y  $B C$ ; con los ángulos  $B C D$  y  $C B D$  se determina la longitud de  $C D$  y  $B D$ .

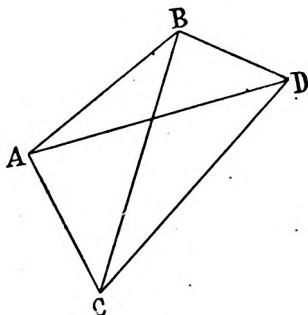


Fig. 329.

En general el número de medidas será mayor: en  $A$  se mide  $B A D$ ,  $D A C$  y  $C A B$  que deben satisfacer la condición

$$B A D + D A C + C A B = 360^\circ$$

o midiéndolos independientemente

$$B A D + D A C = B A C$$

El arreglo que en cada vértice se hace de los ángulos medidos en una misma estación constituyen la *compensación local* o *compensación de las estaciones*; esta generalmente precede a la compensación general de la red para disminuir el número de ecuaciones de condición.

Si también se han medido los ángulos  $A C B$  y  $C B D$ , después de la compensación local debe verificarse

$$A B C + B A C + A C B = 180^\circ + E x c \text{ esférico}$$

$$B C D + C B D + B D C = 180^\circ + \dots$$

estas condiciones establecen las *ecuaciones poligonales* (a).

La longitud del lado  $C D$  puede obtenerse de los triángulos  $A B C$  y  $A C D$  o  $A B C$  y  $B C D$ , ambos valores deben concordar; estas condiciones establecen las *ecuaciones laterales* (b).

Si partiendo de  $A B$  con una cadena de triángulos se llega a un lado medido directamente, este valor y el deducido por transporte debe concordar; ésta condición establece las *ecuaciones de base* (c).

Las ecuaciones (a), (b) y (c) son las *condiciones generales* y constituyen la verdadera *compensación de la red*.

**388. Número de condiciones generales.**—a) Un lado puede ser observado dos veces en sentido contrario desde  $A$  hacia  $B$  o desde  $B$  hacia  $A$ , haciendo estación en ambos extremos o una sola vez haciéndolo en uno solo.

Si  $l$  es el número total de lados y  $l'$  aquellos observados dos veces,  $l - l'$  serán los observados una sola vez.

Si  $p$  es el número total de vértices y  $p'$  aquellos en que se ha hecho estación,  $p - p'$  será el número de vértices determinados sin hacer estación con el instrumento.

Todos los puntos  $p'$  pueden unirse dos a dos de manera que resulte un polígono cerrado de  $p'$  lados, estos lados pertenecen a la serie de los lados  $l'$  en los que se ha hecho estación en los dos extremos, en consecuencia, todos los ángulos

del polígono serán conocidos y su suma debe satisfacer la condición  $(p - 2) = 180^\circ + \text{Exc. esférico}$ .

Cada diagonal de este polígono, doblemente observada, lo dividirá en otros dos polígonos, del que se conocerán los ángulos y esto dará lugar a una nueva condición, siendo  $l'$  los lados doblemente observados,  $l' - p'$  serán las diagonales del polígono doblemente observadas y se tendrá

$$a) \quad l' - p' + 1$$

*ecuaciones poligonales.*

Si la red tiene un punto donde los lados concurrentes forman ángulos que cierran todo el horizonte, debe cumplirse que su suma  $s = 360^\circ$ , cada punto central establece una nueva ecuación de condición.

b) Estas dependen del número de lados componentes; se dice que una *triangulación es simple* cuando la posición de cada vértice de la red, respecto al lado base, solo puede calcularse mediante la solución de un sistema único de triángulos.

Para determinar los tres primeros puntos de la red se necesitarán 3 lados y para los puntos sucesivos bastan 2 lados; si  $p$  es el número de puntos,  $3 + 2(p - 2) = 2p - 3$  será el mínimo de lados que determinan la red; si  $i$  es el número total de lados que ella tiene, será

$$b) \quad i - 2p + 3$$

el número de *ecuaciones laterales*

c) Para calcular la red no es necesario mas que una base, toda otra que intervenga, es una medida supérflua que dá lugar a una nueva ecuación de condición.

Si B es el número de bases que intervienen

$$B - 1$$

son las *ecuaciones de bases*

El número total de ecuaciones de condición es

$$B - 1 + l' - p' + 1 + i - 2p + 3 = B + l' + i - p' - 2p + 3.$$



*Ejemplo.*

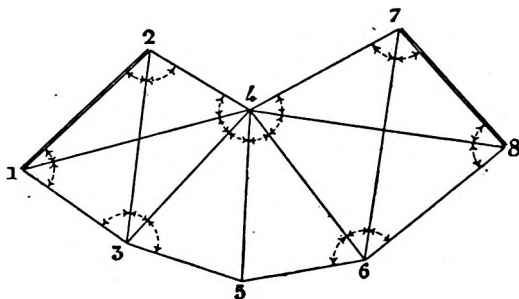


Fig. 330.

Bases	$B = 2$
vértices totales	$p = 8$
vértices ocupados	$p' = 7$
lados totales	$l = 15$
lados dobles	$l' = 12$

Ecuaciones de base	$B = 1 = 1$
» poligonales	$l' - p' + 1 = 6$
» laterales	$l - 2p + 3 = 2$
totales	$9$

Si con el mismo desarrollo ocupamos el punto 5 en vez del 4,  $l' - p' + 1 = 0$  y el número de ecuaciones de condición será 3.

Si la red fuese simple con todos los vértices ocupados y los lados dobles, se tendría: ecuación de base = 1; ecuaciones poligonales  $13 - 8 + 1 = 6$ , ecuaciones laterales  $13 - 16 + 3 = 0$ , el número de ecuaciones de condición será 7.

**389. Compensación local. Angulos con vértice común sin vuelta al horizonte.**—§ 74. Trataremos el caso de 4 puntos y 3 repeticiones; en la generalización se considerará que hay tantos valores de  $s$  como repeticiones y se asignará el peso 1 o 0 a cada observación según exista o no la correspondiente lectura.

De las ecuaciones de errores establecidas en (1) § 74 se tiene

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>l</i>
$v_1'$	$= s'$						$-1'$
$v_2'$	$= s'$			$+x$			$-2'$
$v_3'$	$= s'$				$+y$		$-3'$
$v_4'$	$= s'$					$+z$	$-4'$
$v_1''$	$=$	$s''$					$-1''$
$v_2''$	$=$	$s''$		$+x$			$-2''$
$v_3''$	$=$	$s''$			$+y$		$-3''$
$v_4''$	$=$	$s''$				$+z$	$-4''$
$v_1'''$	$=$		$s'''$				$-1'''$
$v_2'''$	$=$		$s'''$	$+x$			$-2'''$
$v_3'''$	$=$		$s'''$		$+y$		$-3'''$
$v_4'''$	$=$		$s'''$			$+z$	$-4'''$

los coeficientes son iguales a  $+1, 0$  y  $-1$ , y las ecuaciones normales son

$$\begin{aligned}
 4s'' + x + y + z - [1'] &= 0 \\
 4s'' + x + y + z - [1''] &= 0 \\
 4s''' + x + y + z - [1'''] &= 0 \\
 s' + s'' + s''' + 3x - [2] &= 0 \\
 s' + s'' + s''' + 3y - [3] &= 0 \\
 s' + s'' + s''' + 3z - [4] &= 0
 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 [1'] + [1''] + [1'''] &= [1] \\
 [2] + [3] + [4] &= [1] - [1]
 \end{aligned}$$

se tiene sumando las tres primeras y las tres últimas separadamente.

$$\begin{aligned}
 4s' + 4s'' + 4s''' + 3x + 3y + 3z - [1] &= 0 \\
 3s' + 3s'' + 3s''' + 3x + 3y + 3z - [1] + [1] &= 0
 \end{aligned}$$

de donde

$$s' + s'' + s''' - [1] = 0.$$

ó

$$[s] = [1]$$

valor que reemplazado en las tres últimas ecuaciones normales dá

$$x = \frac{[2]}{3} - \frac{[1]}{3}, y = \frac{[3]}{3} - \frac{[1]}{3}, z = \frac{[4]}{3} - \frac{[1]}{3}$$

es decir, que cuando no se ha excluido ninguna dirección en ninguna de las reiteraciones, la media de los valores de cada una, reducidas al mismo origen, son los valores compensados. Este principio permite hacer directamente el cálculo de los valores compensados cuando se cumple esta condición. § 74.

Siendo  $t$  el número de puntos,  $r$  el de reiteraciones, las ecuaciones de condición serán  $t r$ , el de incógnitas  $t + r - 1$ , el de ecuaciones supérfluas  $t r - (t + r - 1) = (t - 1)(r - 1)$  y el error medio de la unidad de peso

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(t-1)(r-1)}}$$

390. **Método de las combinaciones binarias.**—§ 77. Siendo  $t$  el número de puntos a visar,  $\frac{t(t-1)}{2}$  es el número de ángulos que se pueden medir y como para fijar  $t$  direcciones es suficiente  $t-1$  ángulos, el número de ecuaciones de condición será

$$\frac{t(t-1)}{2} - (t-1) = \frac{(t-1)(t-2)}{2}$$

Consideremos el caso de § 79, siendo todas las medidas del mismo peso,  $t=4$  y el número de ecuaciones de condición 3, que son

$$\begin{aligned} (1.2) + (2.3) - (1.3) &= \omega_1 \\ (1.2) + (2.4) - (1.4) &= \omega_2 \\ (1.3) + (3.4) - (1.4) &= \omega_3 \end{aligned} \quad (4)$$

las ecuaciones de error

$$\begin{aligned} v_{1.2} + v_{2.3} - v_{1.3} - \omega_1 &= 0 \\ v_{1.2} + v_{2.4} - v_{1.4} - \omega_2 &= 0 \\ v_{1.3} - v_{1.4} + v_{3.4} - \omega_3 &= 0 \end{aligned}$$

las ecuaciones correlativas son

$$\begin{aligned} v_{1.2} &= k_1 + k_2 & v_{2.4} &= k_2 \\ v_{2.3} &= k_1 & v_{1.4} &= -k_2 - k_3 \\ v_{1.3} &= -k_1 + k_3 & v_{3.4} &= k_3 \end{aligned} \quad (6)$$

substituyendo estos valores en la (4) se tienen las ecuaciones normales que determinan los coeficientes

$$\begin{aligned} 3 k_1 + k_2 - k_3 - \omega_1 &= 0 \\ k_1 + 3 k_2 + k_3 - \omega_2 &= 0 \\ -k_1 + k_2 + 3 k_3 - \omega_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

que resueltas dan

$$k_1 = \frac{2 \omega_1 - \omega_2 + \omega_3}{4}, \quad k_2 = \frac{2 \omega_2 - \omega_1 - \omega_3}{4}, \quad k_3 = \frac{2 \omega_3 - \omega_2 + \omega_1}{4}$$

el valor de los errores de los ángulos es

$$\begin{aligned} v_{1,2} &= k_1 + k_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4} \\ v_{1,3} &= -k_1 + k_3 = \frac{-\omega_1 + \omega_3}{4} \\ v_{1,4} &= -k_2 - k_3 = \frac{-\omega_2 - \omega_3}{4} \end{aligned}$$

los valores compensados de los ángulos fundamentales son

$$\begin{aligned} x &= (1.2) - v_{1,2} = \frac{2 (1.2) + (1.3) - (2.3) + (1.4) - (2.4)}{4} \\ y &= (1.3) - v_{1,3} = \frac{2 (1.3) + (1.2) + (2.3) + (1.4) - (3.4)}{4} \\ z &= (1.4) - v_{1,4} = \frac{2 (1.4) + (1.2) + (2.4) + (1.3) + (3.4)}{4} \end{aligned}$$

lo que está de acuerdo con el resultado obtenido en el § 77 y prueba la regla dada de que cada ángulo fundamental es igual al promedio de los  $(l - 1)$  valores que se pueden calcular mediante las observaciones con tal que se atribuya peso doble al valor directamente observado y que todas las medidas estén hechas en las mismas condiciones.

**391. Compensación general.**—Establecidas todas las ecuaciones de condición puede formarse un sistema que las resuelva simultáneamente y obtener los valores de la corrección de cada incógnita. En triangulaciones pequeñas y dentro de la exac-

titud requerida para trabajos topográficos e hidrográficos, es suficiente hacer la compensación tal como se ha indicado en los § 177, 178 y 179, satisfaciendo separadamente: primero las ecuaciones poligonales y después las laterales y de base.

**392. Compensación angular de un triángulo.**—§ 171. Medidos los tres ángulos 1, 2 y 3, el error de cierre es

$$\omega = 180^\circ - (1 + 2 + 3).$$

Si  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  es la corrección de cada ángulo, la ecuación de error es

$$v_1 + v_2 + v_3 + \omega = 0 \quad (4)$$

las ecuaciones correlativas

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 + k_2 + k_3 \\ v_2 &= k_1 + k_2 + k_3 \\ v_3 &= k_1 + k_2 + k_3 \end{aligned} \quad (6)$$

las ecuaciones normales

$$\begin{aligned} 3 k_1 + 3 k_1 + 3 k_1 + \omega &= 0 \\ 3 k_2 + 3 k_2 + 3 k_2 + \omega &= 0 \\ 3 k_3 + 3 k_3 + 3 k_3 + \omega &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

o 
$$k = k_1 = k_2 = k_3 = -\frac{\omega}{9}$$

y 
$$v_1 = v_2 = v_3 = -3 \frac{\omega}{9} = -\frac{\omega}{3}$$

el error medio es

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[v.v]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{3 \omega^2}{9 \cdot 1}} = \pm \frac{\omega}{3}$$

En este caso, en el que hay una sola ecuación de condición conviene hacer una solución directa, considerando el solo coeficiente en la única ecuación de condición.

Las ecuaciones de error son

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + \omega &= 0 \\ [v.v] &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \text{mín.} \end{aligned}$$

multiplicando por  $-2 k$

$$R = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2k v_1 - 2k v_2 - 2k v_3 = \text{mim.}$$

$$\frac{dR}{dv_1} = 2v_1 - 2k = 0$$

$$\frac{dR}{dv_2} = 2v_2 - 2k = 0$$

$$\frac{dR}{dv_3} = 2v_3 - 2k = 0$$

luego

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{k}{2}$$

$$3 \frac{k}{2} + \omega = 0$$

y

$$v_1 = v_2 = v_3 = -\frac{\omega}{3}$$

**393. Compensación angular de una red de triángulos. —**

§ 177. Para simplificar consideremos solo 3 triángulos.

Sean

<i>Angulos</i>	<i>Errores</i>
1, $\alpha_1$ , $\beta_1$	$v_1, v_1'', v_1'''$
2, $\alpha_2$ , $\beta_2$	$v_2, v_2'', v_2'''$
3, $\alpha_3$ , $\beta_3$	$v_3, v_3'', v_3'''$

siendo  $\omega_1, \omega_2$ , y  $\omega_3$  los errores de cada triángulo y  $e'$  el error de cierre en la vuelta al horizonte del punto central

$$e' = 360^\circ - (1 + 2 + 3)$$

$$\omega_1 = 180^\circ - (1 + \alpha_1 + \beta_1)$$

$$\omega_2 = 180^\circ - (2 + \alpha_2 + \beta_2)$$

$$\omega_3 = 180^\circ - (3 + \alpha_3 + \beta_3)$$

las ecuaciones de error son

$$v_1 + v_2 + v_3 + e' = 0$$

$$v_1 + v_1'' + v_1''' + \omega_1 = 0$$

$$v_2 + v_2'' + v_2''' + \omega_2 = 0$$

$$v_3 + v_3'' + v_3''' + \omega_3 = 0$$

de las que se deducen las correlativas

$$\begin{array}{lll} v'_1 = k + k_1 & v'_2 = k + k_2 & v'_3 = k + k_3 \\ v''_1 = k_1 & v''_2 = k_2 & v''_3 = k_3 \\ v'''_1 = k_1 & v'''_2 = k_2 & v'''_3 = k_3 \end{array}$$

luego las normales

$$\begin{array}{l} 3k + k_1 + k_2 + k_3 + e' = 0 \\ k + 3k_1 + \omega_1 = 0 \\ k + 3k_2 + \omega_2 = 0 \\ k + 3k_3 + \omega_3 = 0 \end{array}$$

poniendo  $W = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ , se obtiene

$$k = \frac{1}{6} (W - 3e')$$

$$k_1 = \frac{1}{3} (k + \omega_1)$$

$$k_2 = \frac{1}{3} (k + \omega_2)$$

$$k_3 = \frac{1}{3} (k + \omega_3)$$

Los valores de las correcciones son

$$v'_1 = k + k_1 = \frac{1}{3} (2k + \omega_1)$$

$$v'_2 = k + k_2 = \frac{1}{3} (2k + \omega_2)$$

$$v'_3 = k + k_3 = \frac{1}{3} (2k + \omega_3)$$

$$v''_1 = v'''_1 = k_1 = -\frac{1}{3} (k + \omega_1)$$

$$v''_2 = v'''_2 = k_2 = -\frac{1}{3} (k + \omega_2)$$

$$v''_3 = v'''_3 = k_3 = -\frac{1}{3} (k + \omega_3)$$

El error medio de la unidad de peso, siendo 4 las ecuaciones de condición es

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{4}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{[vv]}$$

Este resultado puede generalizarse para un número  $n$  de triángulos, siendo  $e'$  el error en la vuelta al horizonte,  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  los errores de cierre en los triángulos y  $W = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$

$$k = \frac{1}{2 \cdot n} (W - n e')$$

$$k_1 = -\frac{1}{n} (W + \omega_1)$$

$$\vdots$$

$$k_n = -\frac{1}{n} (W + \omega_n)$$

las correcciones son

$$v'_1 = \frac{1}{n} (2k - \omega_1)$$

$$\vdots$$

$$v'_n = \frac{1}{n} (2k - \omega_n)$$

$$v''_1 = v'''_1 = -\frac{1}{n} (k + \omega_1)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$v''_n = v'''_n = -\frac{1}{n} (k + \omega_n)$$

En la aplicación del § 177 antes de hacer la compensación central se ha efectuado la parcial de cada triángulo; siendo

$$W = \omega_1 = \omega_2 = \omega_n = 0$$

las fórmulas anteriores dan

$$k = -\frac{1}{2} e'$$

$$v'_1 = v'_2 = \dots v'_n = -\frac{e'}{n}$$

$$v''_1 = v'''_1 = \dots v''_n = v'''_n = \frac{e'}{2n}$$

Estos son los valores de las correcciones aplicadas en el citado párrafo.



394. Compensación angular de una cadena de triángulos.  
§ 178.

Con referencia al ejemplo de la figura 189, se tiene

$$\begin{aligned} ZBA &= ZAB + 180^\circ \\ ZBC &= ZBA - \gamma_1 \\ ZBD &= ZBC - \gamma_2 \\ ZDB &= ZBD + 180^\circ \\ ZDE &= ZDB + \gamma_3 \\ ZDF &= ZDE + \gamma_4 \\ \hline ZDF &= ZAB - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \end{aligned}$$

la ecuación de condición azimutal es

$$ZAB - ZDF - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 0$$

siendo  $e'$  el error azimutal y  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  los de cierre de los triángulos y siendo respectivamente los ángulos y sus errores

Ángulos	Errores
$\gamma_1, \alpha_1, \beta_1$	$\nu'_1, \nu''_1, \nu'''_1$
$\gamma_2, \alpha_2, \beta_2$	$\nu'_2, \nu''_2, \nu'''_2$
$\gamma_3, \alpha_3, \beta_3$	$\nu'_3, \nu''_3, \nu'''_3$
$\gamma_4, \alpha_4, \beta_4$	$\nu'_4, \nu''_4, \nu'''_4$

las ecuaciones de error son

$$\begin{aligned} -\nu'_1 - \nu'_2 + \nu'_3 + \nu'_4 + e' &= 0 \\ \nu'_1 + \nu''_1 + \nu'''_1 + \omega_1 &= 0 \\ \nu'_2 + \nu''_2 + \nu'''_2 + \omega_2 &= 0 \\ \nu'_3 + \nu''_3 + \nu'''_3 + \omega_3 &= 0 \\ \nu'_4 + \nu''_4 + \nu'''_4 + \omega_4 &= 0 \end{aligned}$$

las ecuaciones correlativas

$$\begin{aligned} \nu'_1 &= -k + k_1, & \nu'_2 &= -k + k_2, & \nu'_3 &= k + k_3, & \nu'_4 &= k + k_4 \\ \nu''_1 &= k_1, & \nu''_2 &= k_2, & \nu''_3 &= k_3, & \nu''_4 &= k_4 \\ \nu'''_1 &= k_1, & \nu'''_2 &= k_2, & \nu'''_3 &= k_3, & \nu'''_4 &= k_4 \end{aligned}$$

las ecuaciones normales

$$\begin{array}{rcl}
 4k - k_1 - k_2 + k_3 + k_4 + e' & = & 0 \\
 -k + 3k_1 & + & \omega_1 = 0 \\
 -k & + & 3k_2 + \omega_2 = 0 \\
 k & + & 3k_3 + \omega_3 = 0 \\
 k & + & 3k_4 + \omega_4 = 0
 \end{array}$$

que resueltas, poniendo  $W = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4$ , dan

$$\begin{aligned}
 k &= -\frac{3}{8}e' - \frac{W}{8} \\
 k_1 &= -\frac{e'}{8} - \frac{1}{3}\left(\frac{W}{8} + \omega_1\right) \\
 k_2 &= -\frac{e'}{8} - \frac{1}{3}\left(\frac{W}{8} + \omega_2\right) \\
 k_3 &= \frac{e'}{8} + \frac{1}{3}\left(\frac{W}{8} - \omega_3\right) \\
 k_4 &= \frac{e'}{8} + \frac{1}{3}\left(\frac{W}{8} - \omega_4\right)
 \end{aligned}$$

con estos valores se obtienen los errores de los ángulos

$$\begin{aligned}
 v'_1 &= \frac{e'}{4} + \left(\frac{W}{4} - \frac{\omega_1}{3}\right) \\
 v'_2 &= \frac{e'}{4} + \left(\frac{W}{3} - \frac{\omega_2}{3}\right) \\
 v'_3 &= \frac{e'}{4} - \left(\frac{W}{4} + \frac{\omega_3}{3}\right) \\
 v'_4 &= \frac{e'}{4} - \left(\frac{W}{4} + \frac{\omega_4}{3}\right) \\
 v''_1 = v'''_1 &= -\frac{e'}{8} - \frac{1}{3}\left(\frac{W}{8} + \omega_1\right) \\
 v''_2 = v'''_2 &= -\frac{e'}{8} - \frac{1}{3}\left(\frac{W}{8} + \omega_2\right) \\
 v''_3 = v'''_3 &= \frac{e'}{8} + \frac{1}{3}\left(\frac{W}{8} - \omega_3\right) \\
 v''_4 = v'''_4 &= \frac{e'}{8} + \frac{1}{3}\left(\frac{W}{8} - \omega_4\right)
 \end{aligned}$$

En el caso del ejemplo, en que previamente se ha efectuado la compensación de los triángulos,

$$W = W_1 = W_2 \dots = 0 \quad y$$

$$v'_1 = v'_2 = + \frac{e'}{4}$$

$$v'_3 = v'_4 = - \frac{e'}{4}$$

$$v''_1 = v''_2 = v''_3 = v''_4 = - \frac{e'}{2.4}$$

$$v'''_1 = v'''_2 = v'''_3 = v'''_4 = + \frac{e'}{2.4}$$

lo que está de acuerdo con la regla de compensación dada en el citado párrafo.

**395. Compensación de un cuadrilátero.**— Como ejemplo de compensación simultánea de las ecuaciones poligonales y laterales se considerará el caso de un cuadrilátero en su compensación completa; el procedimiento que se sigue para un mayor número de triángulos es análogo. Con referencia a la figura 190 § 179, se tiene las condiciones siguientes:

$B = 1$	Ecuaciones de base	$B - 1 = 0$
$p = 4$	poligonales	$l' - p' + 1 = 3$
$p' = 4$	laterales	$l - 2p + 3 = 1$
$l = 6$	Ecuaciones en condición	$= 4$
$l' = 6$		

En las ecuaciones poligonales basta considerar tres triángulos; ellos incluyen la condición que debe satisfacer el cuarto.

La ecuación lateral se forma tomando los tres triángulos que convergen en uno de los vértices; este vértice se designa centro o polo y debe elegirse de manera que en él concurren los ángulos más agudos.

Considerando como polo el vértice A, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{\text{sen } 5}{\text{sen } (3 + 4)} \\ \frac{AC}{AD} &= \frac{\text{sen } (7 + 8)}{\text{sen } 6} \\ \frac{AD}{AB} &= \frac{\text{sen } 3}{\text{sen } 8} \end{aligned}$$

$$\text{luego} \quad \frac{\text{sen } 5 \text{ sen } (7+8) \text{ sen } 3}{\text{sen } (3+4) \text{ sen } 6 \text{ sen } 8} = 1$$

esta ecuación no será satisfecha y llamando  $v_1 \dots v_8$  las correcciones en los ángulos  $1, \dots, 8$ , se tendrá

$$\frac{\text{sen } (5+v_5) \text{ sen } (7+v_7+8+v_8) \text{ sen } (3+v_3)}{\text{sen } (3+v_3+4+v_4) \text{ sen } (6+v_6) \text{ sen } (8+v_8)}$$

empleando la fórmula logarítmica

$$\begin{aligned} & \log. \text{sen } 5 + v_5 \delta_5 + \log \text{sen } (7+8) + v_7 \delta_{(7+8)} + v_8 \delta_{(7+8)} + \\ & \log \text{sen } 3 + v_3 \delta_3 - \log \text{sen } (3+4) - v_4 \delta_{(3+4)} - \\ & - v_4 \delta_{(3+4)} - \log \text{sen } 6 - v_6 \delta_6 - \log \text{sen } 8 - v_8 \delta_8 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

que es la ecuación de error lateral

De los triángulos ABC, ADC y ADB se obtienen las ecuaciones de error poligonales

$$\begin{aligned} v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + \omega_1 &= 0 \\ v_1 + v_6 + v_7 + v_8 + \omega_2 &= 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + \omega_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

con las (1) y (2) se deducen las ecuaciones correlativas. Tratando el mismo ejemplo del § 179.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 180^\circ - (2+3+4+5) = -4.0 \\ \omega_2 &= 180 - (1+8+7+6) = 0.4 \\ \omega_3 &= 180 - (1+2+3+8) = -2.7 \end{aligned}$$

Para la ecuación lateral, tomando con 7 decimales los logaritmos se tiene

$$\begin{aligned} \log. \text{sen } 5 &= \bar{1}. 7429861 + 31 v_5 \\ \log. \text{sen } (7+8) &= \bar{1}. 9490414 + 11 v_7 + 11 v_8 \\ \log. \text{sen } 3 &= \bar{1}. 9183800 + 14 v_3 \\ &\quad \bar{1}. 6104075 \\ &\quad \bar{1}. 6103943 \\ &\quad + 132 \\ \log. \text{sen } (3+4) &= \bar{1}. 9333411 - 12 v_3 - 12 v_4 \\ \log. \text{sen } 6 &= \bar{1}. 9102257 + 15 v_6 \\ \log. \text{sen } 8 &= \bar{1}. 7668275 + 29 v_8 \end{aligned}$$

la ecuación lateral transformada en lineal es

$$31 v_5 + 11 v_7 + 11 v_8 + 14 v_3 + 12 v_3 + 12 v_4 - 15 v_6 - 29 v_2 + 132 = 0 \quad (1)$$

ó

$$-29 v_2 + 26 v_3 + 12 v_4 + 31 v_5 - 15 v_6 + 11 v_7 + 11 v_8 + 132 \dots = 0$$

las poligonales son

$$v_1 + v_6 + v_7 + v_8 + 0.4 = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_8 - 2.7 = 0$$

$$v_2 + v_8 + v_4 + v_5 - 4.0 = 0$$

con este sistema se obtiene las correlativas

$$\begin{aligned} v_1 &= & k_2 + k_3 \\ v_2 &= -29 k_1 & + k_3 + k_4 \\ v_3 &= 26 k_1 & + k_3 + k_4 \\ v_4 &= 12 k_1 & + k_4 \\ v_5 &= 31 k_1 & + k_4 \\ v_6 &= -15 k_1 & + k_2 \\ v_7 &= 11 k_1 & + k_2 \\ v_8 &= 11 k_1 & + k_2 + k_3 \end{aligned}$$

las ecuaciones normales son

$$\begin{aligned} 3089 k_1 + 7 k_2 + 8 k_3 - 22 k_4 + 132.0 &= 0 \\ 7 k_1 + 4 k_2 + 2 k_3 &+ 0.4 = 0 \\ 8 k_1 + 2 k_2 + 4 k_3 + 2 k_4 - 2.7 &= 0 \\ -22 k_1 &+ 2 k_3 + 4 k_4 - 4.0 = 0 \end{aligned}$$

Este sistema se resolverá aplicando el método general; obtenidos los valores de  $k$  se tendrán los de  $v$  y los ángulos definitivos.

En la aplicación del § 179 previamente se ha efectuado la compensación angular, las ecuaciones de error poligonales son

$$v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 0$$

$$v_1 + v_8 + v_7 + v_6 = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_8 = 0$$

la ecuación lateral se obtiene con los ángulos que han sido corregidos en la compensación angular en forma idéntica a la ya expuesta.

En vez de hacerse la compensación sobre los ángulos, puede efectuarse en las direcciones; sea el mismo ejemplo.

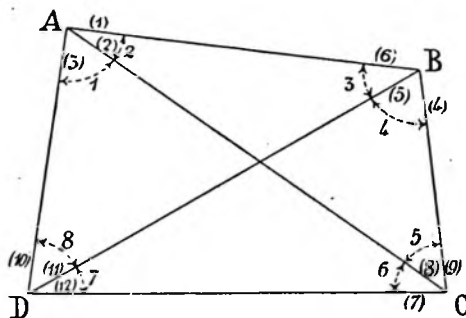


Fig. 331.

*Estación A*

- (1) =  $00^{\circ}-00'-00''$  .0  
 (2) =  $25-27-56$  .6  
 (3) =  $88-16-01$  .0

*Estación B*

- (4) =  $00^{\circ}-00'-00''$  .0  
 (5) =  $64-58-38$  .6  
 (6) =  $120-56-22$  .0

*Estación C*

- (7) =  $00^{\circ}-00'-00''$  .0  
 (8) =  $54-24-54$  .0  
 (9) =  $88-00-39$  .4

*Estación D*

- (10) =  $00^{\circ}-00'-00''$  .0  
 (11) =  $35-46-18$  .3  
 (12) =  $62-47-01$  .2

Las ecuaciones poligonales son, llamando  $v_1, v_2, \dots, v_{12}$  el error en las direcciones (1), (2) .... (12) y considerando los mismos triángulos ABC, ADC y ADB

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 + v_6 - v_5 + v_5 - v_4 + v_9 - v_8 - 4.0 &= 0 \\ v_3 - v_2 + v_{11} - v_{10} + v_{12} - v_{11} + v_8 - v_7 + 0.4 &= 0 \quad (1) \\ v_8 - v_2 + v_2 - v_1 + v_6 - v_5 + v_{11} - v_{10} - 2.7 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

la ecuación lateral será

$$\frac{\sin [(9)+v_9-(8)-v_8] \sin [(12)+v_{12}-(10)-v_{10}] \sin [(6)+v_6-(5)-v_5]}{\sin [(6)+v_6-(4)-v_4] \sin [(8)+v_8-(7)-v_7] \sin [(11)+v_{11}-(10)-v_{10}]} = 1$$

cuya transformación en lineal es

$$\text{sen}[(9) - (8)] = \bar{1}.7429861 + 51 v_9 - 31 v_8$$

$$\text{sen}[(12) - (10)] = \bar{1}.9490414 + 11 v_{12} - 11 v_{10}$$

$$\text{sen}[(6) - (5)] = \bar{1}.9183800 + 14 v_6 - 14 v_5$$

$$\bar{1}.6104075$$

$$\bar{1}.6103943$$

$$+ 132$$

$$\text{sen}[(6) - (4)] = \bar{1}.9333411 - 12 v_2 + 12 v_4$$

$$\text{sen}[(8) - (7)] = \bar{1}.9102257 + 15 v_8 - 15 v_7$$

$$\text{sen}[(11) - (10)] = \bar{1}.7668275 + 29 v_{11} - 29 v_{10}$$

$$\bar{1}.6103943$$

y la ecuación lateral de error es

$$\begin{aligned} & - 12 v_4 - 14 v_5 + 26 v_6 + 15 v_7 - 46 v_8 \\ & + 31 v_9 + 18 v_{10} - 29 v_{11} + 11 v_{12} + 132 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Con (1) y (2) se resuelve el problema.

Para la figura 332, en la que se han medido todos los ángulos, el número de ecuaciones laterales es  $l - 2p + 3 = 12$

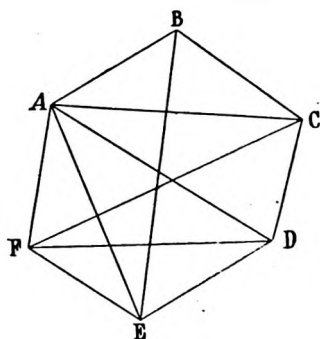


Fig. 332.

$- 2 \times 6 + 3 = 3$ . Estas tres ecuaciones se obtienen de los tres cuadriláteros ABCD, ACDF y ADEF que se forman en A, este vértice se considera como polo de cada cuadrilátero.

El número de ecuaciones poligonales es  $l' - p' + 1 = 12 - 6 + 1 = 7$ . Estas ecuaciones se obtienen considerando los triángulos ABC, ACD, ADE, AEF, ADF, ACF y FED.

**396. Consideración final sobre la aplicación del método de los cuadrados mínimos.** Este método debe considerarse como un sistema de cálculo que comprueba las operaciones hechas; la aplicación de este método no hará mas preciso el resultado, solo sirve para descubrir las observaciones afectadas de grandes divergencias y eliminarlas cuando están fuera de la tolerancia establecida.

Además del análisis de los resultados obtenidos se puede deducir los métodos de trabajo más convenientes para obtener las observaciones, considerando la precisión del instrumento y la exactitud que se requiere para el fin propuesto.

La calidad de las observaciones fijan el límite de su exactitud; la aplicación del método de los mínimos cuadrados solo sirve para asegurar al calculista el correcto cálculo de las observaciones acercando éste a un límite de exactitud sin poder superarlo.